Statistikë e aplikuar

UNIVERSITETI I EJL
ЈИЕ УНИВЕРЗИТЕТ
SEE UNIVERSITY

Variablat e rastësishme të vazhdueshme

Faton Berisha

Kapitulli 5

Variablat e rastësishme të vazhdueshme

McGraw-Hill/Irwin

Variablat e rastësishme të vazhdueshme

Shpërndarjet e vazhdueshme të probabilitetit

Rikujtojmë: Një *variabël e rastësishme e vazhdueshme* mund të marrë çfarëdo vlere numerike nga një ose më tepër intervale.

Përdorim *shpërndarje të vazhdueshme probabiliteti* për t'u shoqëruar probabilitete intervaleve të ndryshme të vlerave.

Një lakore $f(x)$ është *shpërndarje e vazhdueshme e probabilitetit* të variablës së rastësishme të vazhdueshme x në qoftë se probabiliteti se x do të jetë në intervalin e dhënë të numrave është syprina e sipërfaqes nën lakoren $f(x)$ në intervalin përkatës.

- Emërtime tjera për një shpërndarje të vazhdueshme probabiliteti:
  - *lakore probabiliteti,* ose
  - *funksion i dendësisë së probabilitetit*

Vetitë e shpërndarjeve të vazhdueshme të probabilitetit

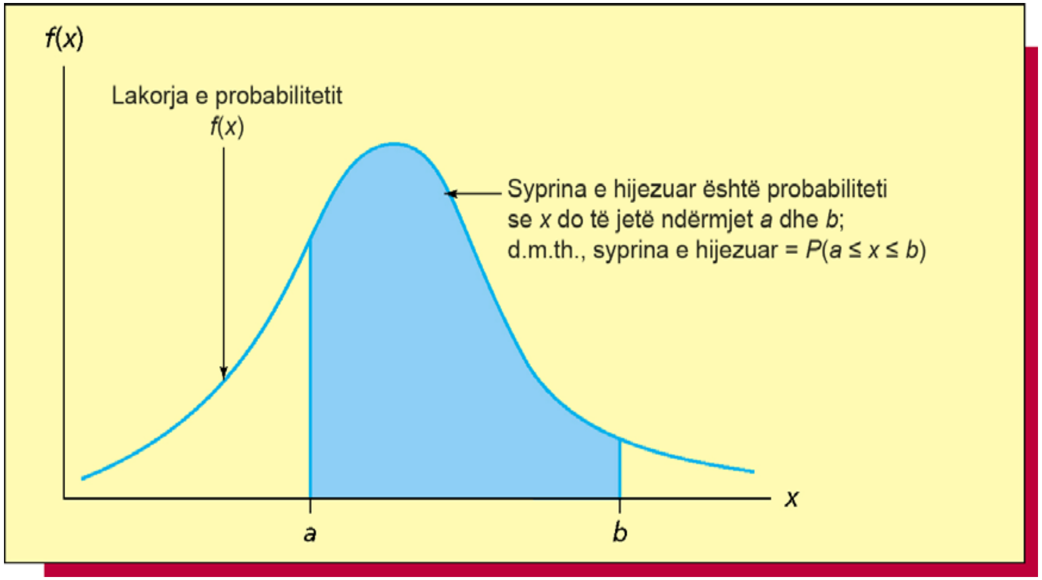
Vetitë e $f(x)$: $f(x)$ është funksion i vazhdueshëm i tillë që

1. $f(x) \geq 0$ për çdo x
2. Syprina e tërë sipërfaqes nën lakoren $f(x)$ është e barabartë me 1.

Pikë thelbësore: Një syprinë nën një shpërndarje të vazhdueshme probabiliteti është probabilitet.

Syprina dhe probabiliteti

- Syprina e sipërfaqes së hijezuar nën lakoren e probabilitetit $f(x)$ nga vlera $x = a$ deri $x = b$ është probabiliteti se x mund të marrë ndonjë vlerë në intervalin a deri b
  - Simbolikisht shenohet $P(a \leq x \leq b)$
    - Ose $P(a < x < b)$, meqë secili nga skajet e intervalit ka probabilitet 0



Forma shpërndarjeje

- Simetrike dhe drejtkëndëshe
  - Shpërndarja uniforme
    - Pika 5.2
- Simetrike dhe në formë këmbane
  - Shpërndarja normale
    - Pika 5.3
- E shtrembëruar
  - E shtrembëruar qoftë mjatas ose djathtas
    - Pika 5.5 për shpërndarjen eksponenciale të shtrembëruar nga e djathta

Probabiliteti i vazhdueshëm

- ***Probabiliteti***: $P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$
- ***Mesatarja***: $\mu_X = \int_a^b x f(x)\,dx$
- ***Varianca***: $\sigma_X^2 = \int_a^b (x - \mu_X)^2 f(x)\,dx$
- ***Devijimi standard***: $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$

Shpërndarja uniforme

Në qoftë se c dhe d janë numra në drejtëzën reale, atëherë lakorja e probabilitetit e cila përshkruan ***shpërndarjen uniforme*** është

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{d-c} & \text{për } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{përndryshe} \end{cases}$$

Probabiliteti se x është ndonjë vlerë ndërmjet vlerave të dhëna të a dhe b ($a < b$) është

$$P\left(a \leq x \leq b\right) = \frac{b-a}{d-c}$$

Vërejtje: Renditja e numrave është $c < a < b < d$

Shpërndarja uniforme. (Vazhdim)

Mesatarja dhe devijimi standard i një variable të rastësishme uniforme x janë

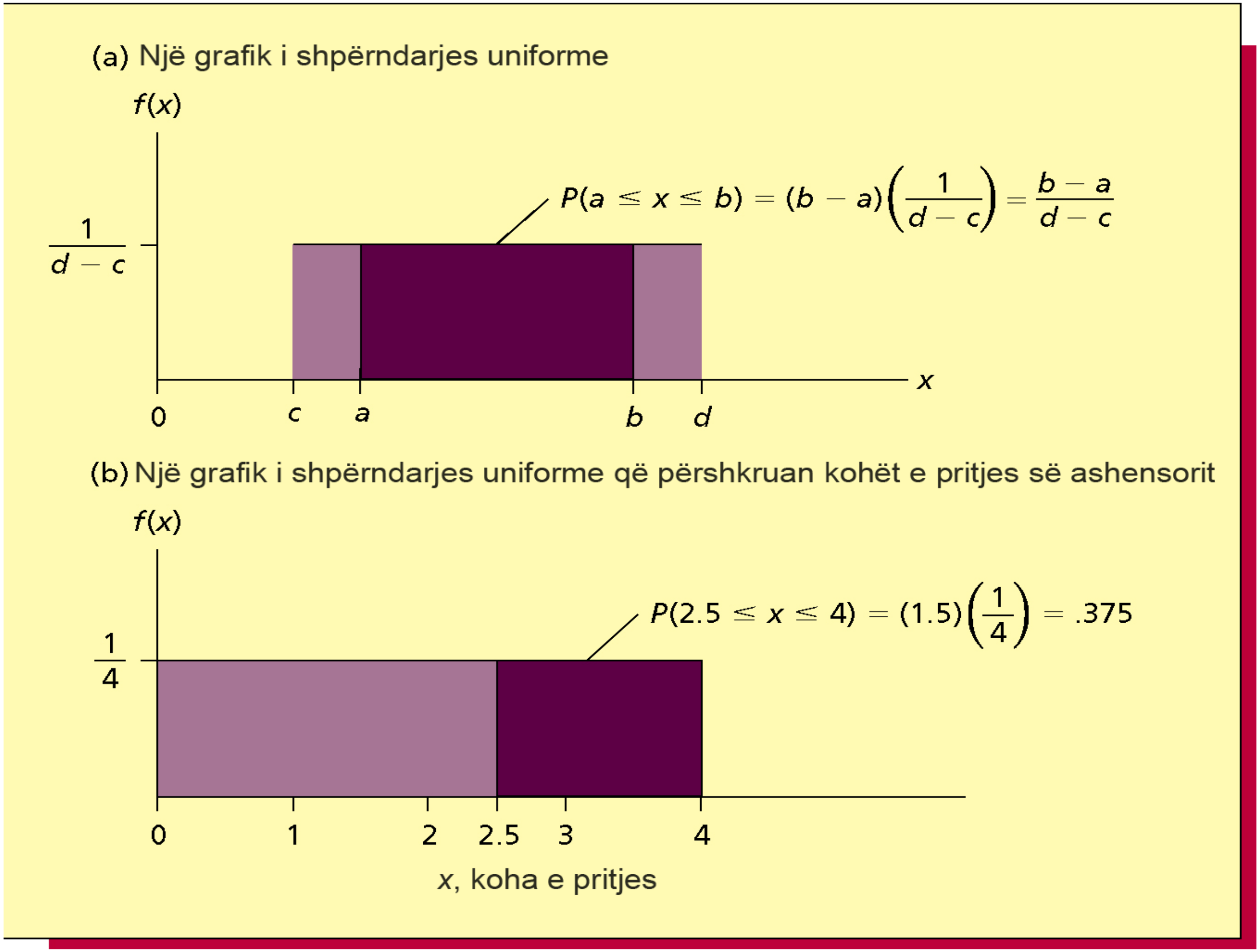
$$\mu_X = \frac{c+d}{2},$$

$$\sigma_X = \frac{d-c}{\sqrt{12}}$$

- Janë këta parametrat e shpërndarjes uniforme me skajet c dhe d ($c < d$).

Lakorja e probabilitetit uniform

Shembulli 5.1. Koha e pritjes së ashensorit



Vërejtje mbi shëpërndarjen uniforme

- Shpërndarja uniforme është simetrike
  - Simetrike ndaj mesatarës së saj μ_x
  - μ_x është edhe mediana
- Shpërndarja uniforme është e formës drejtkëndëshe
  - Për skajet c dhe d ($c < d$) gjerësia e shpërndarjes (rangu) është $d - c$ dhe lartësia është $1/(d - c)$.
  - Syprina nën tërë shpërndarjen uniforme është 1
    - Sepse $(d - c)\,[1/(d - c)] = 1$
    - Prandaj, $P(c \leq x \leq d) = 1$

Shpërndarja normale e probabilitetit

Shpërndarja normale e probabilitetit përkufizohet me ekuacionin

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

për çdo x nga drejtëza reale

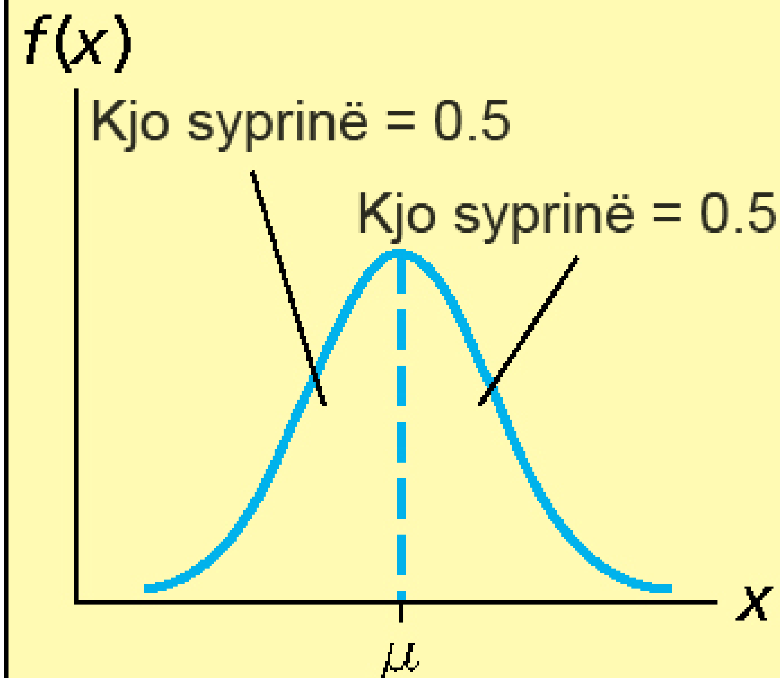
μ dhe σ janë mesatarja dhe devijimi standard,
$\pi = 3.14159...$ dhe $e = 2.71828...$ është baza e logaritmit natyror.

Shpërndarja normale e probabilitetit. (Vazhdim)

Lakorja normale është simetrike me formë këmbane.

- Është simetrike ndaj mesatares μ
  - Mesatarja është në mes nën lakoren
  - Prandaj μ është edhe mediana
- Është më e larta mbi mesataren μ
- Syprina nën tërë lakoren normale është 1.
  - Syprina nën cilëndo gjysmë të lakores është 0.5.

Lakorja normale është simetrike përreth μ, dhe e tërë syprina nën lakoren është e barabartë me 1.



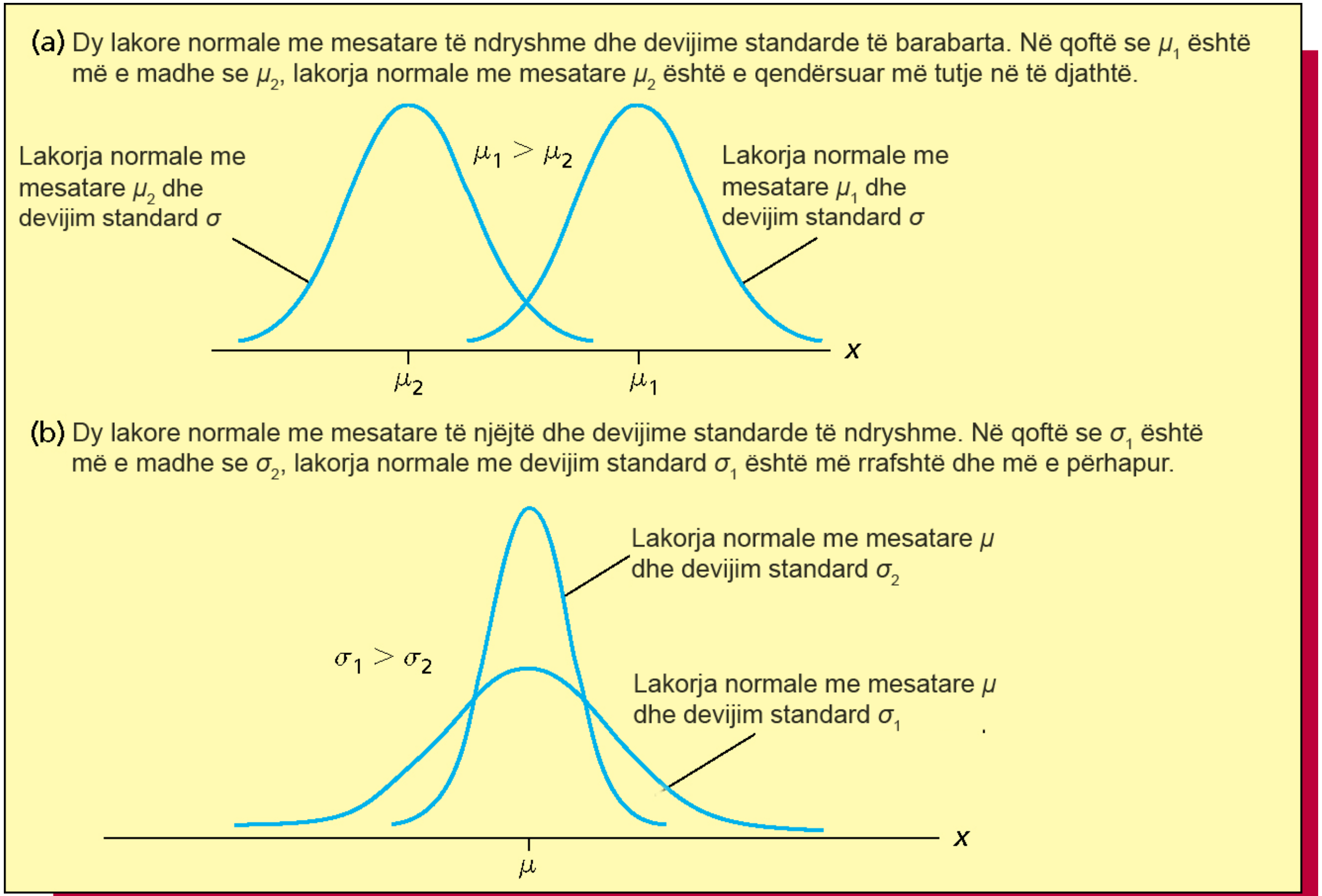
Veti të shpërndarjes normale

- Ka numër të pafundëm lakoresh normale të mundshme
  - Forma e veçantë e një lakoreje normale të caktuar varet nga mesatarja e saj *m* dhe devijimi standard *s*.
- Pika më e lartë e lalores ndodhet mbi mesataren.
- Mesatarja = Mediana = Moda
  - Të gjitha masat e tendencës qendrore janë të barabarta ndërmjet vedi.
    - Kjo është shëprndarja e vetme për të cilën është i saktë ky pohim.

Veti të shpërndarjes normale. (Vazhdim)

- Lakorja është simetrike ndaj mesatares.
  - Gjysma e majtë dhe ajo e djathtë e lakores janë përfytyra pasqyre të njëra tjetrës.
- Bishtat e lakores zgjaten deri në pafundësi në të dyja drejtimet.
  - Bishtat i afrohen boshtit horizontal por kurrë nuk e prekin atë.
- Syprina nën lakoren normale në të djathtë të mesatares është e barabartë me syprinën nën lakoren në të majtë të mesatares.
  - Syprina nën secilën gjysmë të lakores është 0.5.

Pozita dhe forma e lakores normale

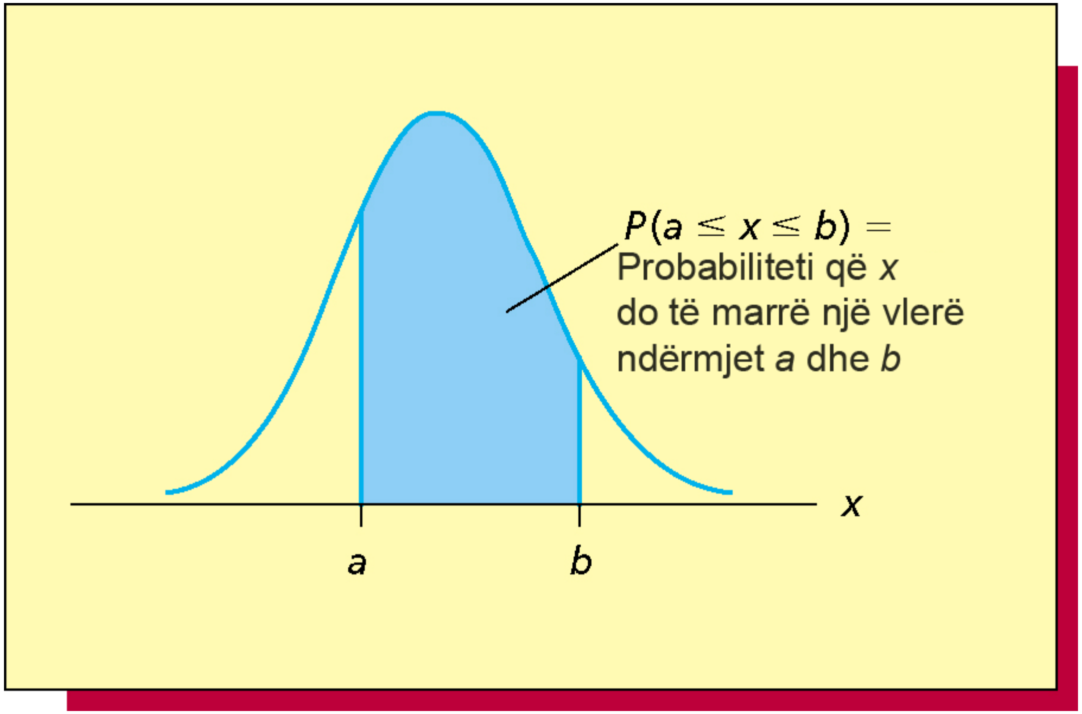


(a) Mesatarja μ përcakton kulmin e lakores normale mbi boshtin.
(b) Varianca σ^2 mat gjerësinë ose përhapjen e lakores normale.

Probabilitete normale

Le të jetë x variabël e rastësishme me shpërndarje normale me mesatare μ dhe devijim standard σ.

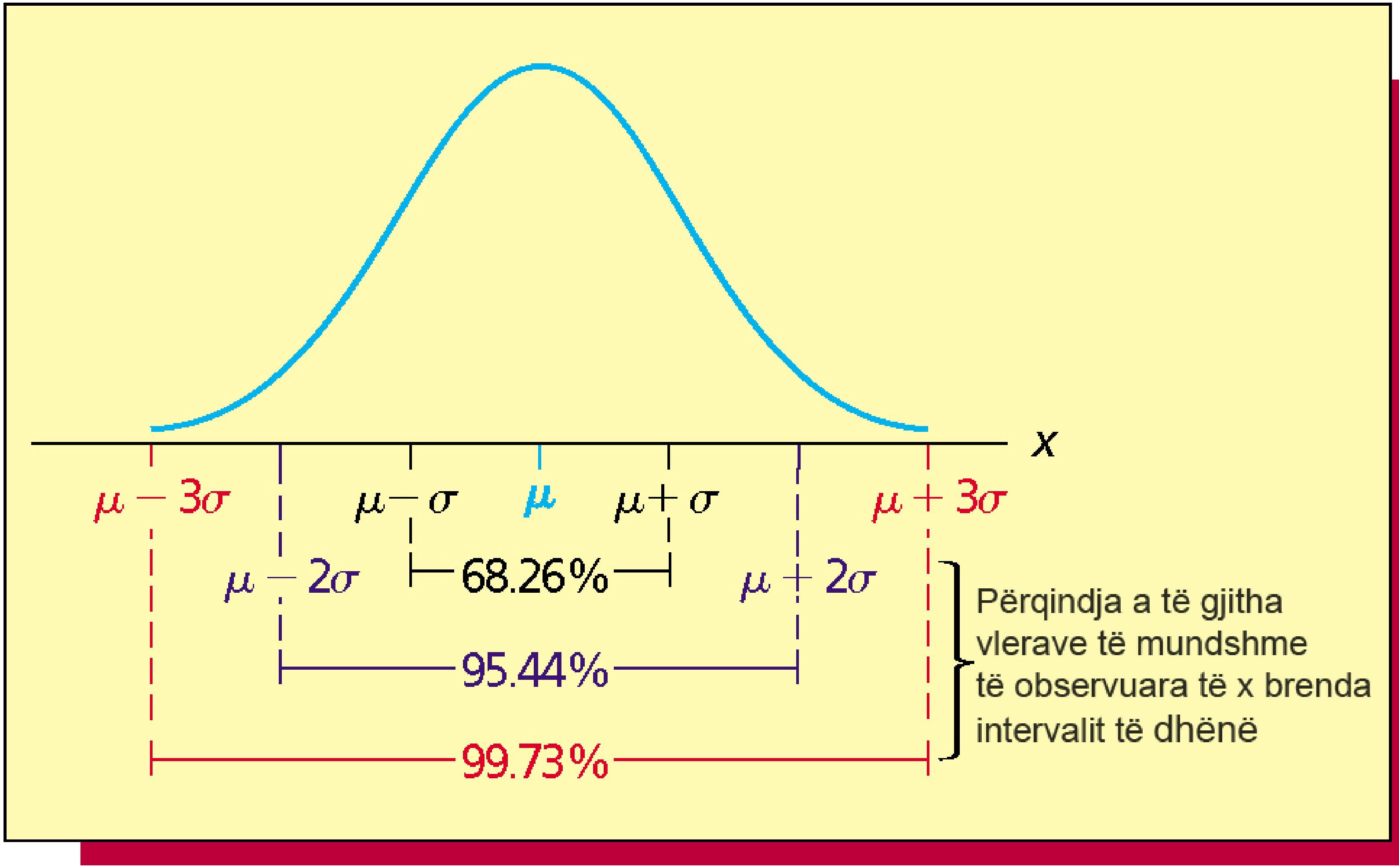
Probabiliteti se x mund të marrë ndonjë vlerë ndërmjet vlerave të dhëna a dhe b ($a < b$) është $P(a \leq x \leq b)$



$P(a \leq x \leq b)$ është syprina e hijezuar nën lakoren normale dhe ndërmjet vlerave $x = a$ dhe $x = b$.

Tri përqindje të rëndësishme

Rregulla empirike e popullimeve normale



Shpërndarja normale standarde

Në qoftë se x ka shpërndarje normale me mesatare μ dhe devijim standard σ, atëherë

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

ka shpërndarje normale me mesatare 0 dhe devijim standard 1.

Kjo shpërndarje normale quhet *shpërndarja normale standarde*.

Shpërndarja normale standarde. (Vazhdim)

z mat numrin e devijimeve standarde që vlera e x ndodhet nga mesatarja μ

- Parashenja e z përcakton në cilën anë të μ është x
- z është pozitive në qoftë se $x > \mu$ (x në të djathtë të μ në boshtin)
- z është negative në qoftë se $x < \mu$ (x në të djathtë të μ në boshtin)

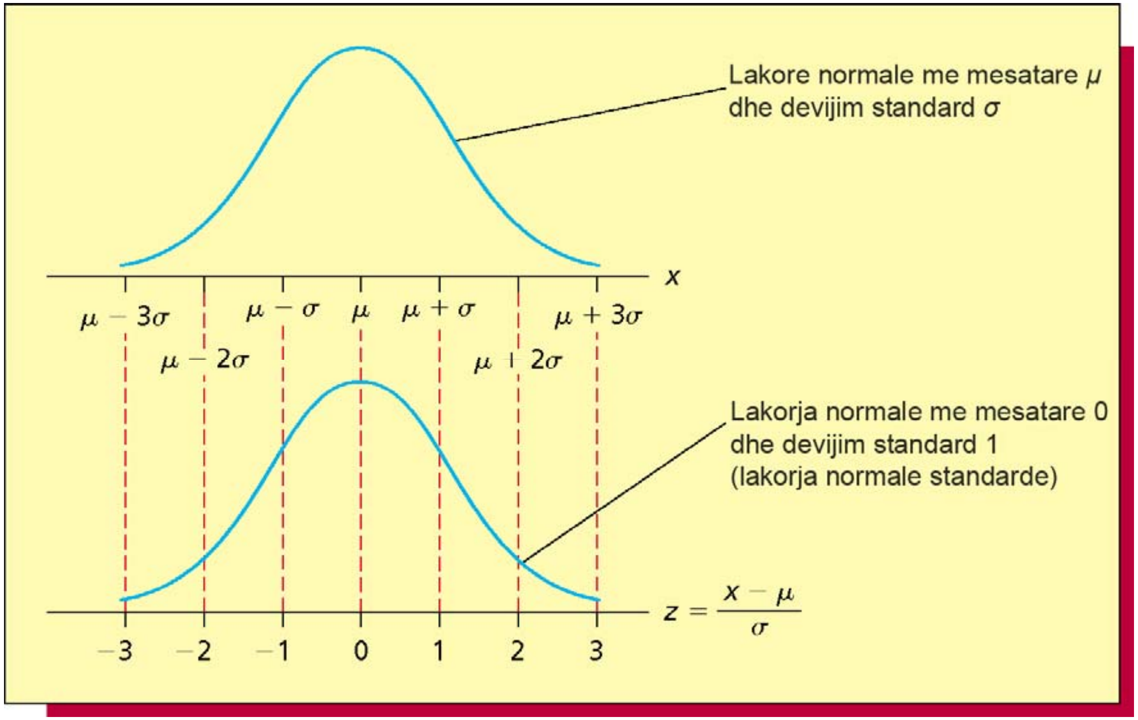


Tabela normale standarde

- Tabela normale standarde është tabelë e cila liston syprinën nën lakoren normale standarde në të djathtë të mesatares ($z = 0$) deri te z vlera përkatëse.
  - Tabela 5.1
  - Tabela A.3 in shtojcën A dhe tabela në kopertinën
    - Tabelë tepër e rëndësishme!
    - Gjithmonë shikoni figurën përcjellëse si udhëzim për përdorimin e tabelës.

Tabela normale standarde. (Vazhdim)

- Vlerat e *z* (me saktësi të qindtash) në tabelën shtrihen në rangun 0.00 deri 3.09 me rritje 0.01.
  - *z* me saktësi të dhjetash janë listuar në shtyllën e majtë.
  - Shifra e të qindtave të *z* është listuar në rreshtin e parë.
- Syprinat nën lakoren normale standarde në të djathtë të mesatares deri te cilado vlerë e *z* jepen në trupin e tabelës.

Tabela normale standarde. (Vazhdim)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Shembull: Tabela normale standarde

- Gjemë $P(0 \leq z \leq 1)$
  - Gjejmë syprinën e listuar në tabelën që i përket vlerës 1.00 të z
  - Duke filluar nga maja e shtyllës së majtë, shkojmë tatëpjetë deri te "1.0"
  - Shkojmë përgjat rreshtit $z = 1.0$ deri te shtylla me ballinën ".00"
  - Sipërfaqja në qelizën e cila është prerja e rreshtit me shtyllën
  - Siç është listuar në tabelën, syprina është 0.3413, prandaj

$$P(0 \leq z \leq 1) = 0.3413$$

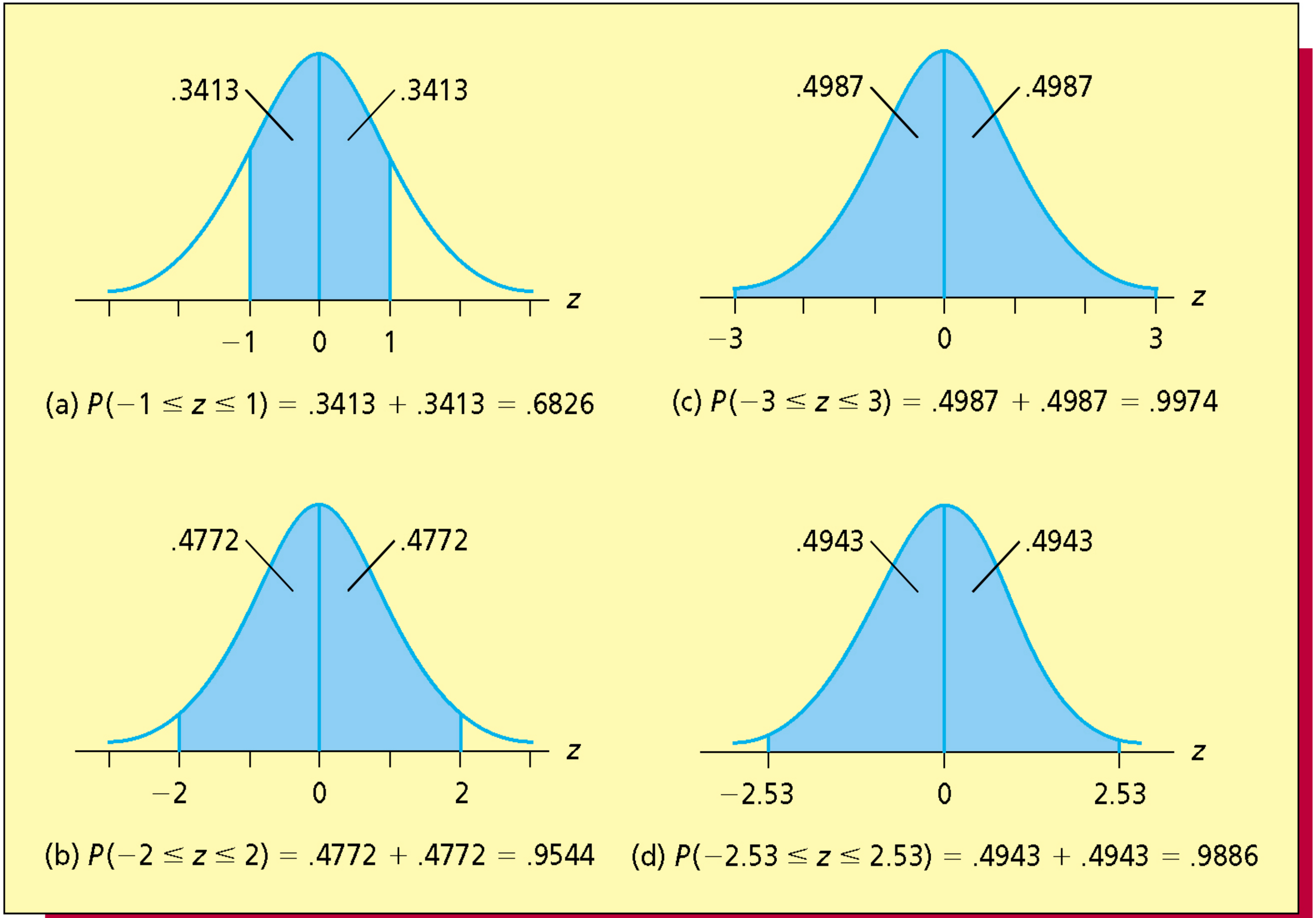
Llogaritja e $P(-2.53 \leq z \leq 2.53)$

- Gjejmë $P(0 \leq z \leq 2.53)$
  - Në tabelën normale standarde shkojmë tatëpjetë nëpër shtyllën e majtë deri te $z = 2.5$.
  - Shkojmë përgjat rreshtit 2.5 deri te shtylla me ballinën .03.
  - Syprina në të djathtë të mesatares deri te vlera $z = 2.53$ është vlera e qelizës prerëse të rreshtit 2.5 me shtyllën .03.
  - Vlera tabelare e syprinës është 0.4943

Llogaritja e $P(-2.53 \le z \le 2.53)$. (Vazhdim)

- Pra, $P(0 \le z \le 2.53) = 0.4943$
- Mbështetur në simetrinë e lakores normale, kjo poashtu është edhe syprina në të majtë të mesatarës tatëpjetë deri te vlera $z = -2.53$.
  - Atëherë
    $P(-2.53 \le z \le 2.53) = 0.4943 + 0.4943$
    $= 0.9886$

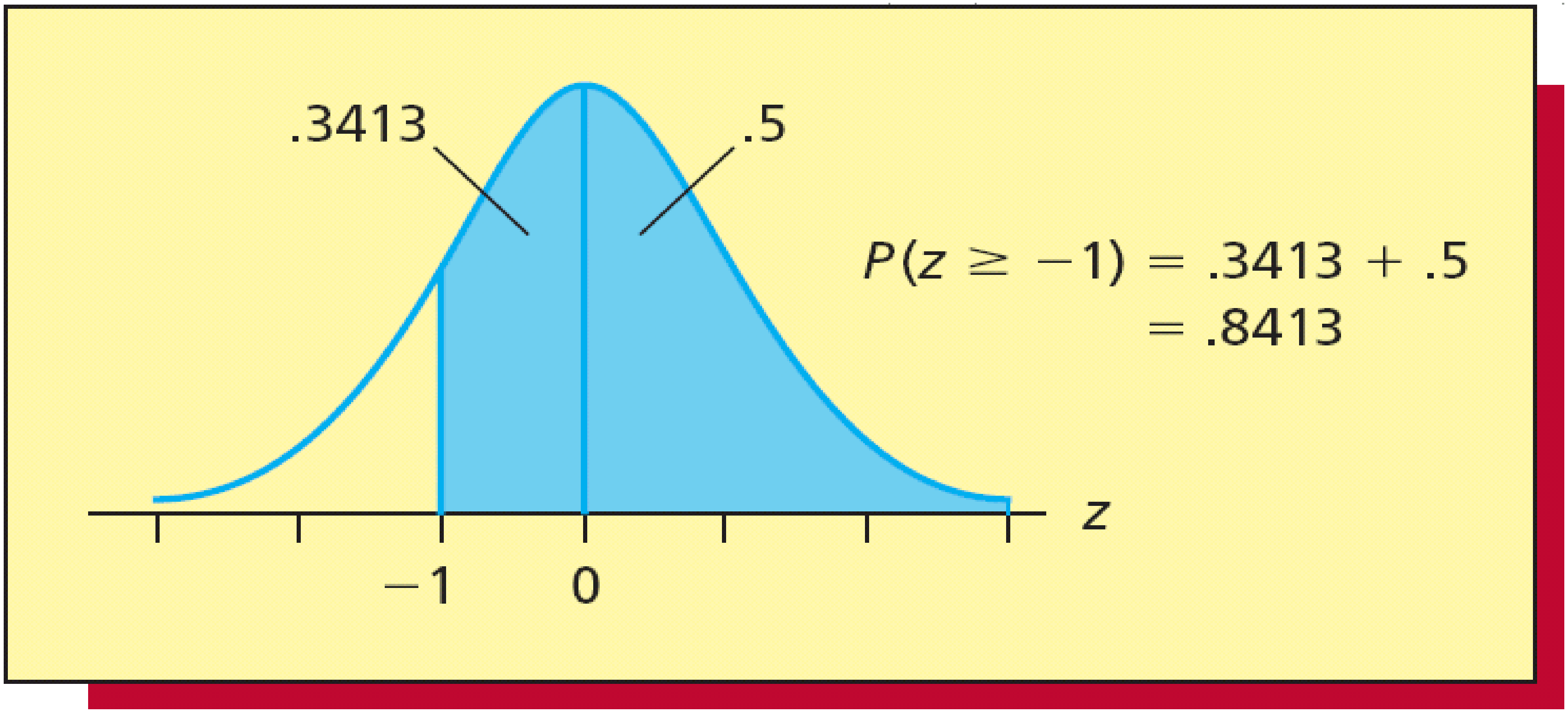
Disa syprina nën lakoren normale standarde



Llogaritja e $P(z \geq -1)$

Shembull i gjetjes së një syprine nën lakoren normale standarde nga e djathta e një vlere negative

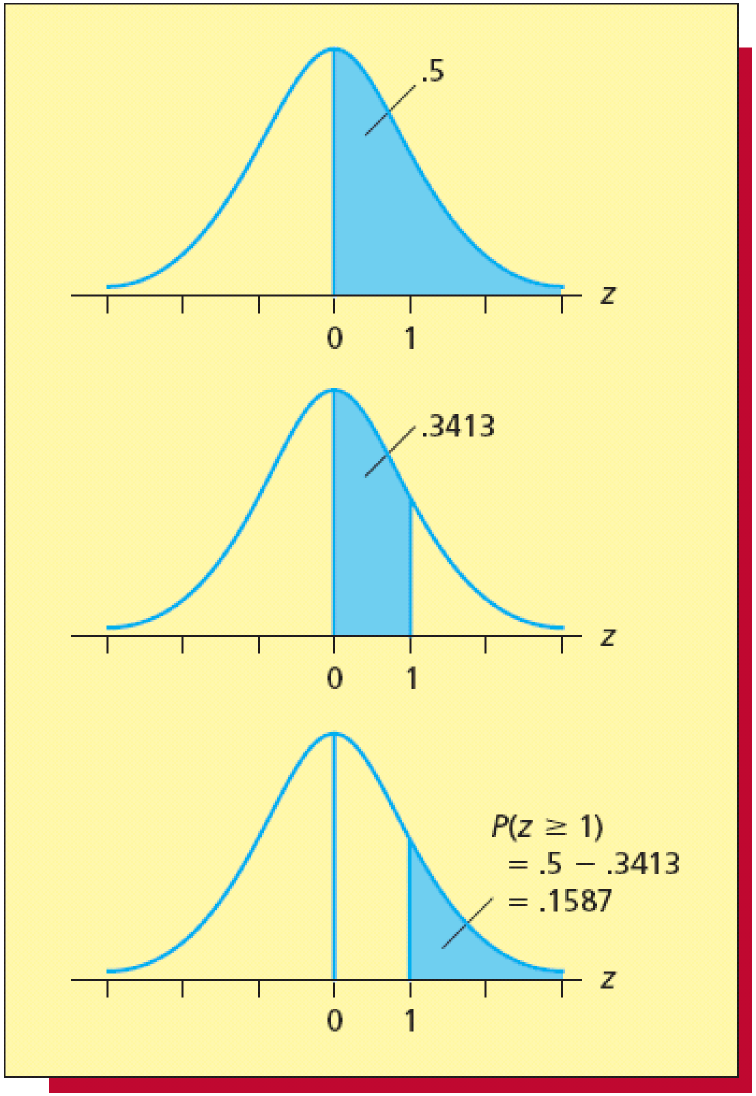
- Është treguar llogaritja e syprinës nën lakoren për $z \geq -1$



Llogaritja e $P(z \geq 1)$

Shembull llogaritjeje syprine bishti

- Është treguar llogaritja e syprinës nën lakoren për $z \geq 1.00$
  - Ekuivalente me syprinën e bishtit të majtë për $z \leq -1.00$



Gjetja e probabiliteteve normale

Procedura e përgjithshme:

1. Formulo problemin sipas *x* vlerave

2. Llogarit *z* vlerat përkatëse dhe
   riformulo problemin sipas këtyre *z* vlerave

3. Gjej syprinat e kërkuara nën lakoren
   normale standarde duke shfrytëzuar tabelën

Vërejtje: Është gjithmonë e dobishme
të vizatohet një figurë që tregon syprinat
e kërkuara para përdorimit të tabelës.

Gjetja e probabiliteteve normale. (Vazhdim)

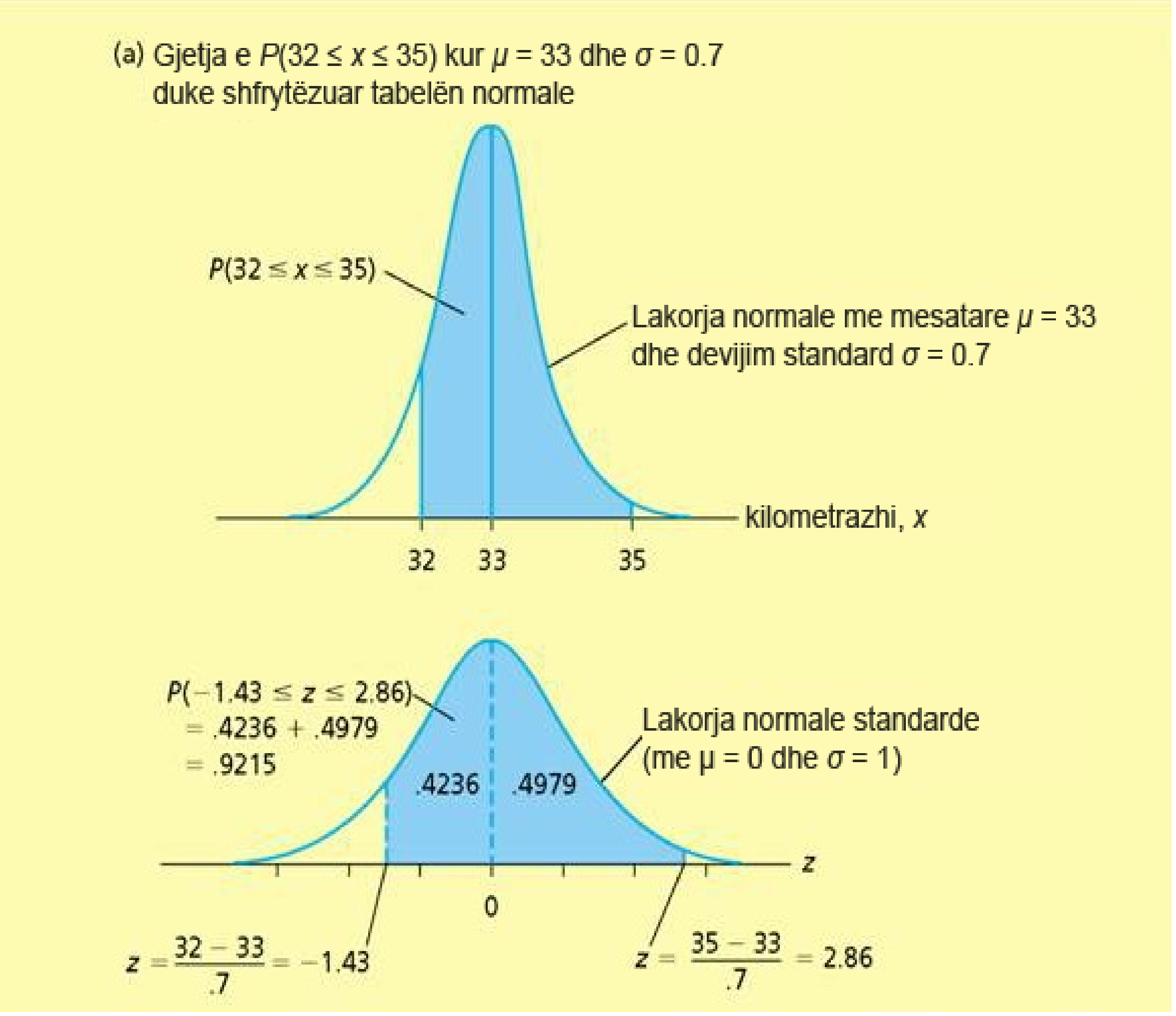
Shembull 5.2. Rasti i kilometrazhit të vetureve

Procedura

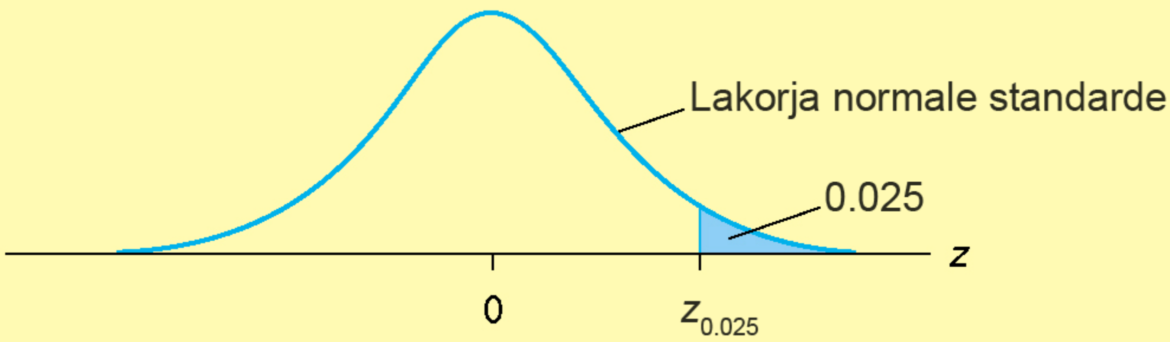
1. Formulo sipas x.
2. Riformulo sipas vlerave përkatëse të z.
3. Gjej syprinën e fituar nën lakoren normale standarde.

Shembull 5.3. Rasti i kilometrazhit të vetureve (Vlerësimi i fuqisë së argumentit)

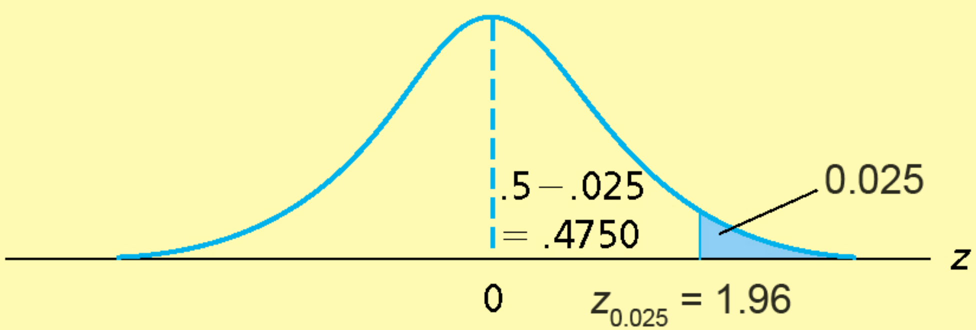
Shembull 5.4. Rasti i temperaturës së kafeve



Gjetja e z-pikave në lakoren normale standarde



(a) $z_{0.025}$ është pika në boshtin horizontal nën lakoren normale standarde e cila jep syprinën e bishtit të djathtë të barabartë më 0.025



(b) Gjetja e $z_{0.025}$

Gjetja e *x*-pikave në një lakore normale

Shembull 5.5 Kërkesa për video-shirit

- Kërkesa javore me shpërndarje normale me $\mu = 100$ shirita dhe $\sigma = 10$ shirita.

- Gjeni numrin *st* të shiritave të deponuar ashtu që të ketë vetëm 5% gjasë që shitorja të ketë mungesë shiritash gjatë javës

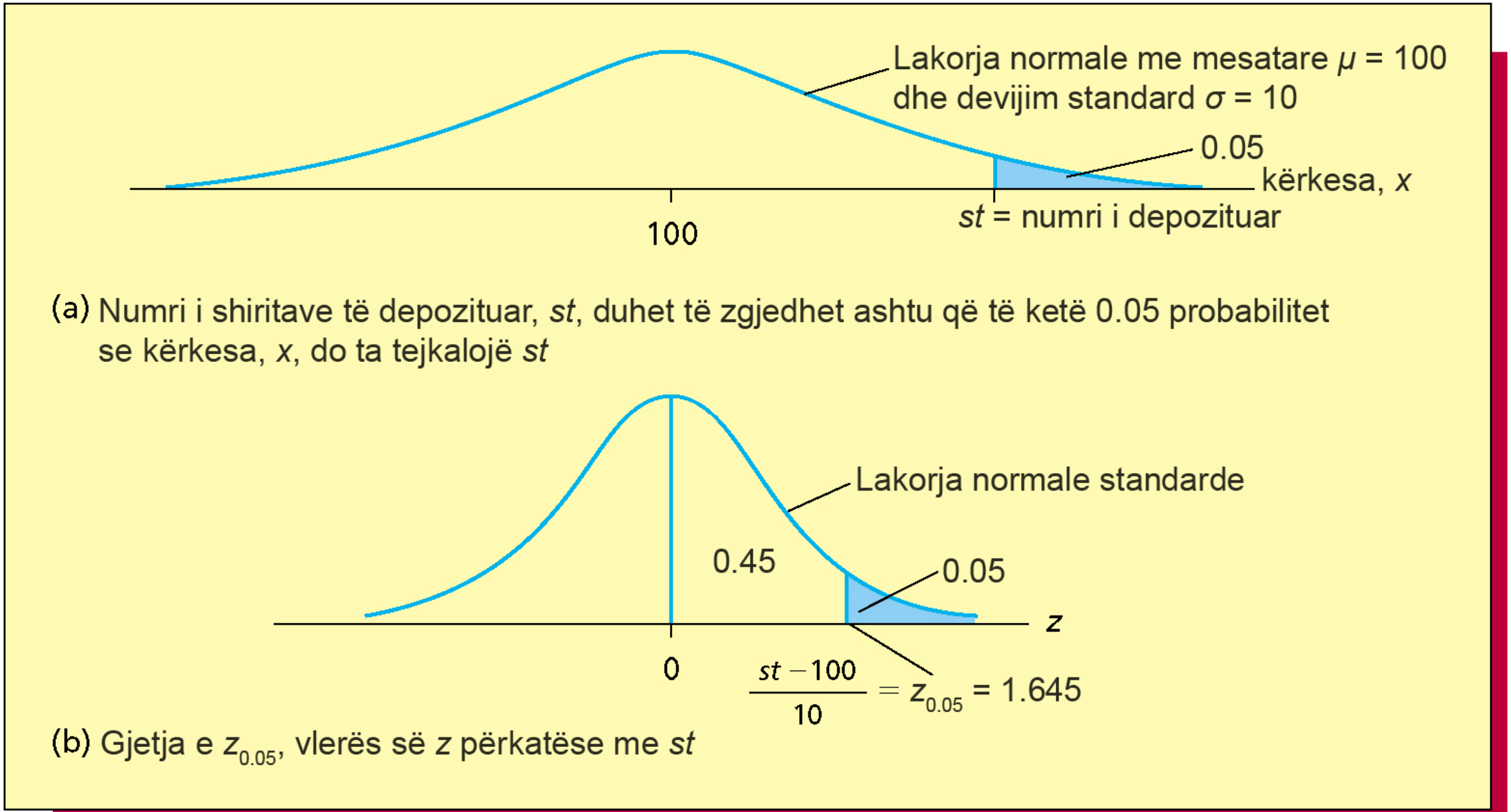
- $P(x > st) = 0.05$

$$P(x > st) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{st-\mu}{\sigma}\right) = P\left(z > \frac{st-100}{10}\right) = 0.05$$

$$\frac{st-100}{10} = z_{0.05} = 1.645$$

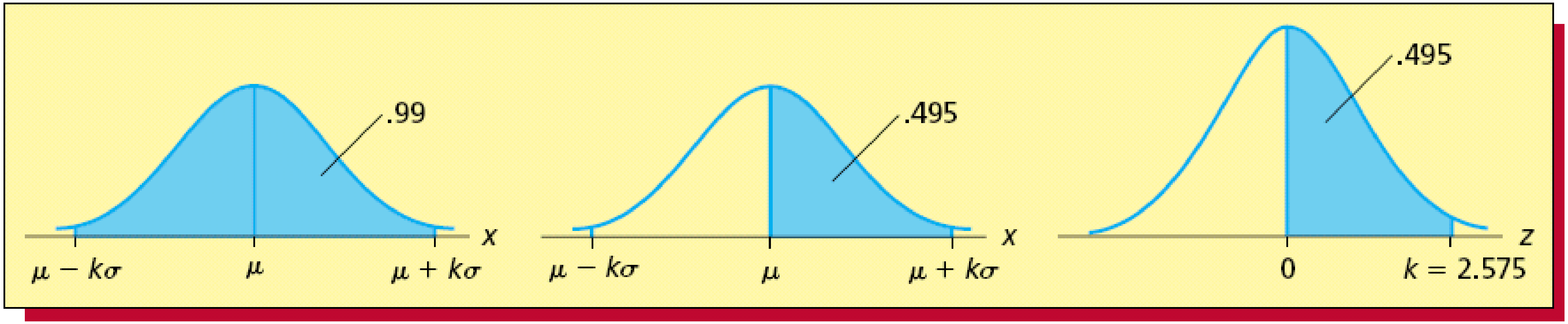
$$st = 10 \cdot 1.64 + 100 = 116.45$$

Gjetja e x-pikave. (Vazhdim)



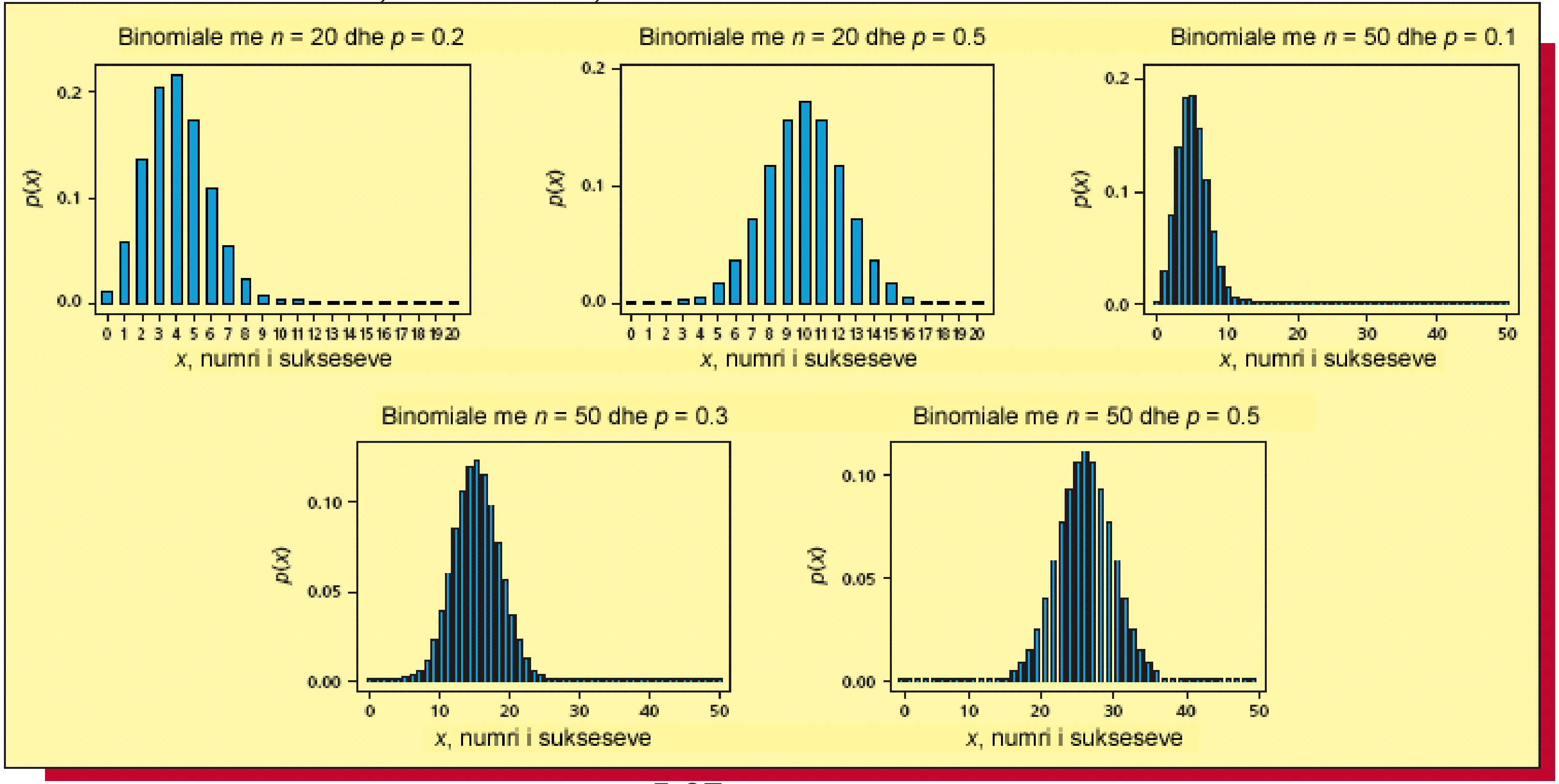
Gjetja e intervalit të tolerancës

Gjetja e intervalit të tolerancës $[\mu \pm k\sigma]$
i cili përmban 99% të masës së një popullimi normal.



Përafrimi i shëpërndarjes binomiale me anë të shpërndarjes normale

- Figura tregon disa shpërndarje binomiale.
- Shohim se duke u rritur *n* dhe duke u afruar *p* nga 0.5, grafiku i shpërndarjes binomiale tenton të ketë
  formë simetrike, këmbane, të lakores normale



Përafrimi i shëpërndarjes binomiale me atë normale. (Vazhdim)

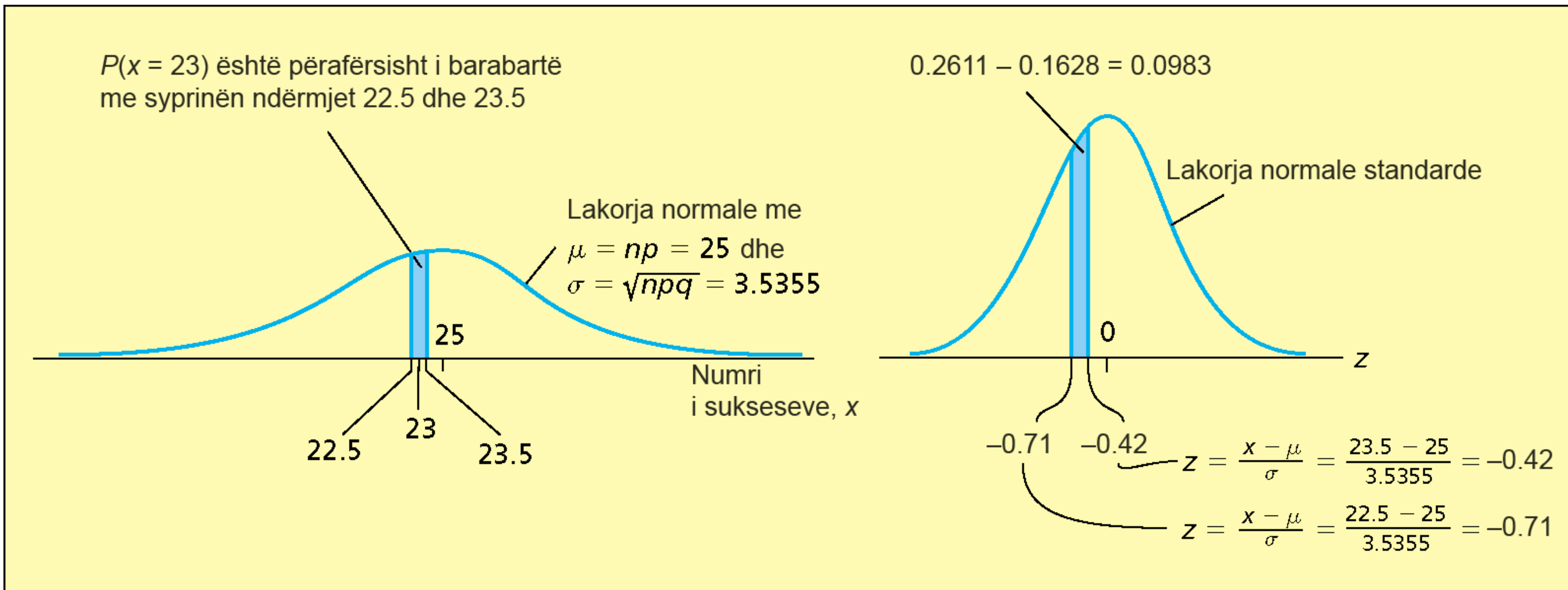
- Përgjithsojmë observimet nga slajdi paraprak për p të madhe
- Supozojmë se x është variabël e rastësishme binomiale, ku n është numri i provave, secila me probabilitet suksesi p
  - Atëherë, probabiliteti i dështimit është $1 - p$
- Në qoftë se n dhe p janë të tilla që $np \geq 5$ dhe $n(1 - p) \geq 5$, atëherë x është përafërsisht normale me

$$\mu = np \text{ dhe } \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Shembull: Përafrimi i shpërndarjes binomiale me atë normale

Shembull 5.8: Përafrimi i probabilitetit binomial $P(x = 23)$ duke shfrytëzuar lakoren normale kur

$$\mu = np = 25 \text{ dhe } \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3.5355$$



Korrigjimi i vazhdueshmërisë: ..z.

Shpërndarja eksponenciale

- Supozojmë se ndonjë ngjarje ndodh si proces Poisson-i.
  - D.m.th., numri i ndodhjeve të ngjarjes është variabël e rastësishme e Poisson-it.
- Le të jetë x variabla e rastësishme e intervalit ndërmjet ndodhjeve të njëpasnjëshme të ngjarjes.
  - Intervali mund të jetë ndonjë njësi kohe ose hapësire.
- Atëherë, x përshkruhet me ***shpërndarje eksponenciale.***
  - Me parametër λ, i cili është numri mesatar i ngjarjeve që ndodhin për intervalin e dhënë.

Shpërndarja eksponenciale. (Vazhdim)

Në qoftë se λ është pozitiv, atëherë shpërndarja eksponenciale përshkruhet me funksionin vijues të densitetit të probabilitetit

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{për } x \geq 0 \\ 0 & \text{përndryshe} \end{cases}$$

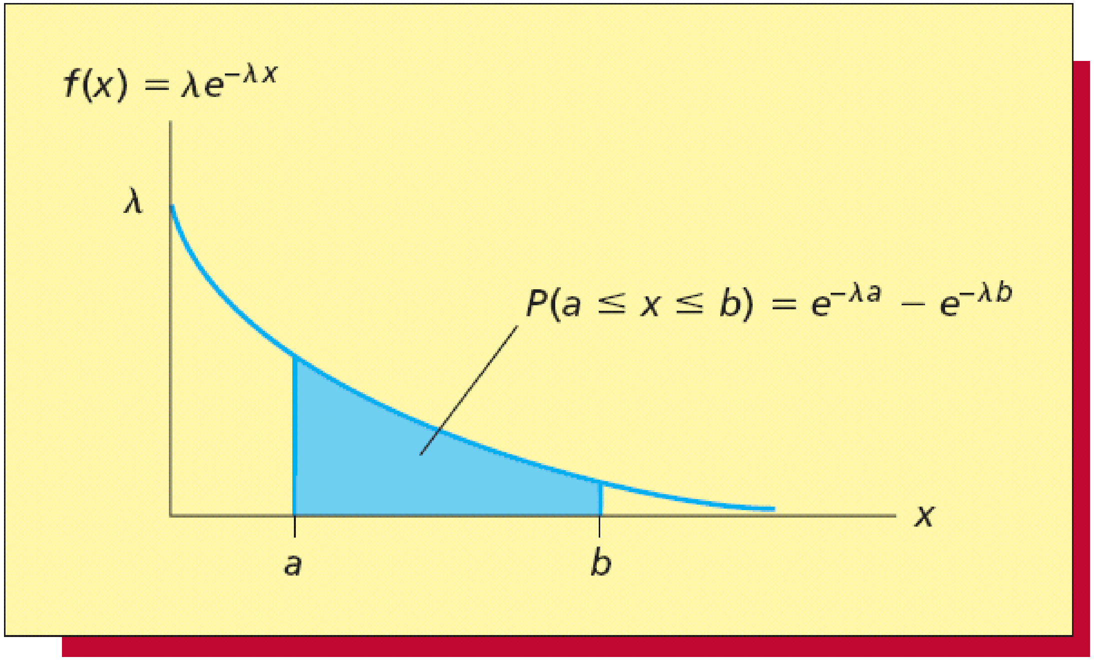
Probabiliteti se x është ndonjë vlerë ndërmjet vlerave të dhëna a dhe b ($a < b$) është

$$P(a \leq x \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

dhe

$$P(x \leq c) = 1 - e^{-\lambda c} \text{ dhe } P(x \geq c) = e^{-\lambda c}$$

Shpërndarja eksponenciale. (Vazhdim)



Mesatarja μ_x dhe devijimi standard σ_x të një variableje të rastësishme eksponenciale x janë

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda} \text{ and } \sigma_X = \frac{1}{\lambda}$$

Shembull: Llogaritja e probabiliteteve eksponenciale

Le të jenë μ_x=3.0 ose λ=1/3=0.333,

$$P(5 \le x \le 9) = e^{-(0.333)5} - e^{-(0.333)9} = 0.13925$$

$\lambda = 0.333$

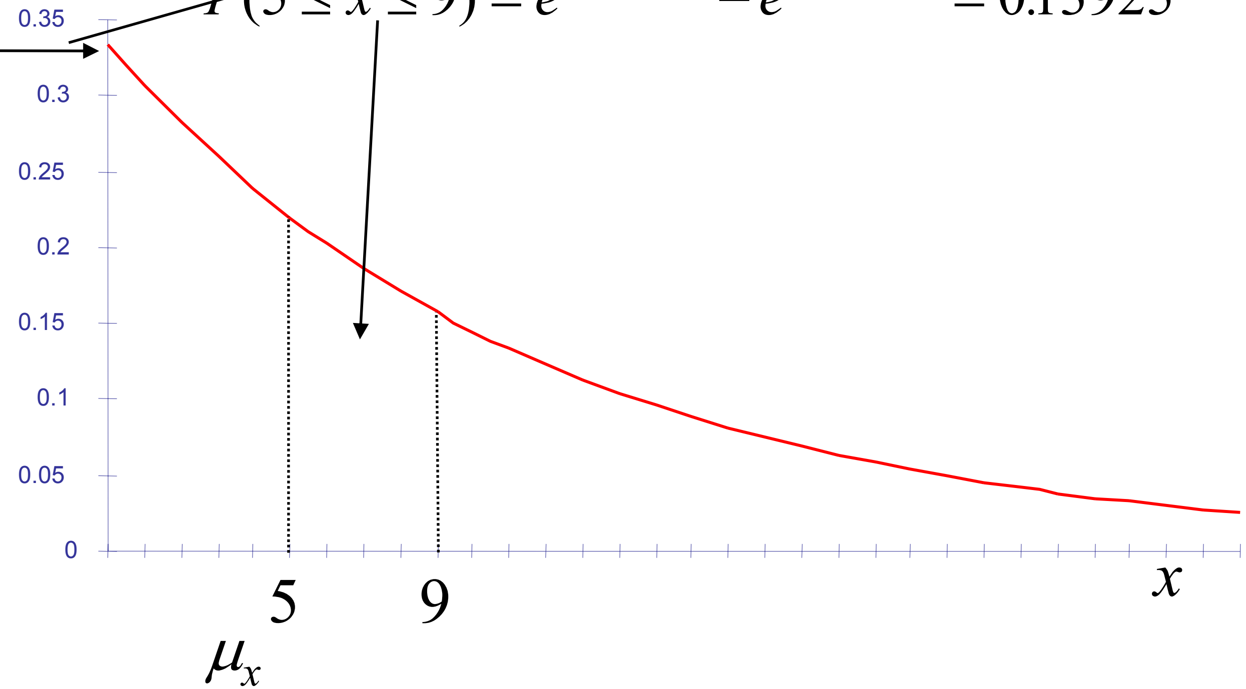


Tabela normale kumulative

Tabela normale kumulative jep, për vlera të ndyshme të z_0, sipërfaqen nën lakoren normale standarde në të majtë të z_0.

- Përfshirë vlerat negative të z
- Tabela normale kumulative jep probabilitetin $P(z \leq z_0)$
- Tabela 5.3 dhe Tabela A.19 në shtojcën A

Tabela normale kumulative jep syprinën e hijezuar

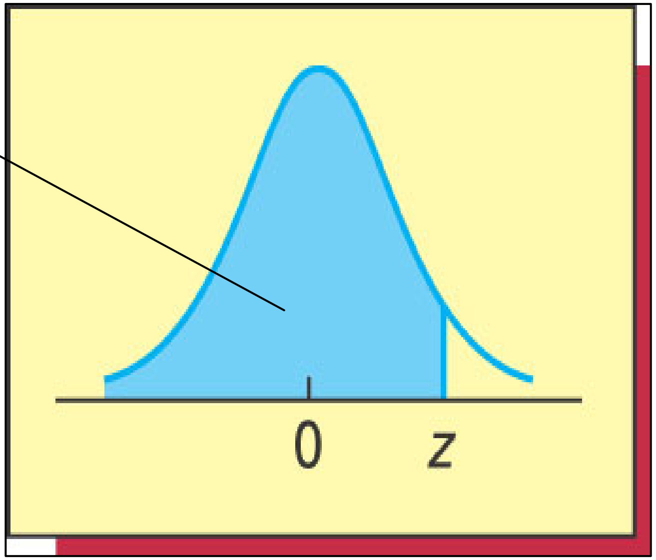


Tabela normale kumulative. (Vazhdim)

- Përdoret për të gjetur probabilitete si $P(z \leq a)$ ose $P(z \geq b)$
  - Gjejmë $P(z \leq 1)$
    - Drejtpërdrejt nga tabela normale kumulative

$$P(z \leq 1) = 0.8413$$

  - Gjejmë $P(z \geq 1)$
    - Drejtpërdrejt nga tabela normale kumulative

$$P(z \leq 1) = 0.8413$$

    - Meqë shuma e syprinave nën lakoren normale është 1:

$$P(z \geq 1) = 1 – P(z \leq 1)$$

prandaj

$$P(z \geq 1) = 1 – 0.8413 = 0.1587$$