Statistikë e aplikuar

UNIVERSITETI I EJL
ЈИЕ УНИВЕРЗИТЕТ
SEE UNIVERSITY

Variablat e rastësishme diskrete

Faton Berisha

Kapitulli 4

Variablat e rastësishme diskrete

Variablat e rastësishme diskrete

4.1 Dy llojet e variablave të rastësishme

4.2 Shpërndarjet diskrete të gjasës

4.3 Shpërndarja binomiale

4.4 Shpërndarja e Poisson-it

Variablat e rastësishme

Variabël e rastësishme është një ndryshore e cila merr vlera numerike që përcaktohen nga rezultatet e një eksperimenti.

Variabël e rastësishme diskrete: vlerat e mundshme mund të numërohen ose të listohen

- P.sh., numri, x, i njësive defektive në një grumbull 20 sish; vlerësimi i një dëgjuesi (1 deri 5) në një sondazh të AccuRating; numri i shpërthimeve të zjarrit në Tetovë gjatë dy muajve të fundit
- Shembulli 4.2. Numri i përgjegjeve të sakta në tri pyetje kuizi

Variablat e rastësishme. (Vazhdim)

Variabël e rastësishme e vazhdueshme: mund të marrë çfarëdo vlere numerike nga një ose më tepër intervale

- P.sh., koha, x, e pritjes për autorizim kartele kreditore; përqindja e interesit të përllogaritur në një kredi biznesi
- Shembulli 4.1. Rasti i kilometrazhit të veturave

Shpërndajret diskrete të gjasës

Shpërndarje e gjasës e një variable të rastësishme diskrete është një tabelë, grafik ose formulë që jep probabilitetin e shoqëruar me secilën vlerë të mundshme që mund ta marrë variabla.

Shënim: Shënojmë me x vlerat e variablës së rastësishme dhe me $p(x)$ probabilitetin e shoqëruar vlerës x.

Vetitë e një shpërndarje diskrete të gjasës *p*(*x*):

1. Për çdo vlerë x të variablës së pavarur, $p(x) \geq 0$
2. Shuma e probabiliteve të të gjitha ngjarjeve nga hapësira mostër duhet të jetë 1:

$$\sum_{\text{Çdo } x} p(x) = 1$$

Shembull: Numri i përgjegjeve korrekte

Shembulli 4.2. Numri i përgjegjjeve korrekte të një studenti në një kuiz tri pyetjesh

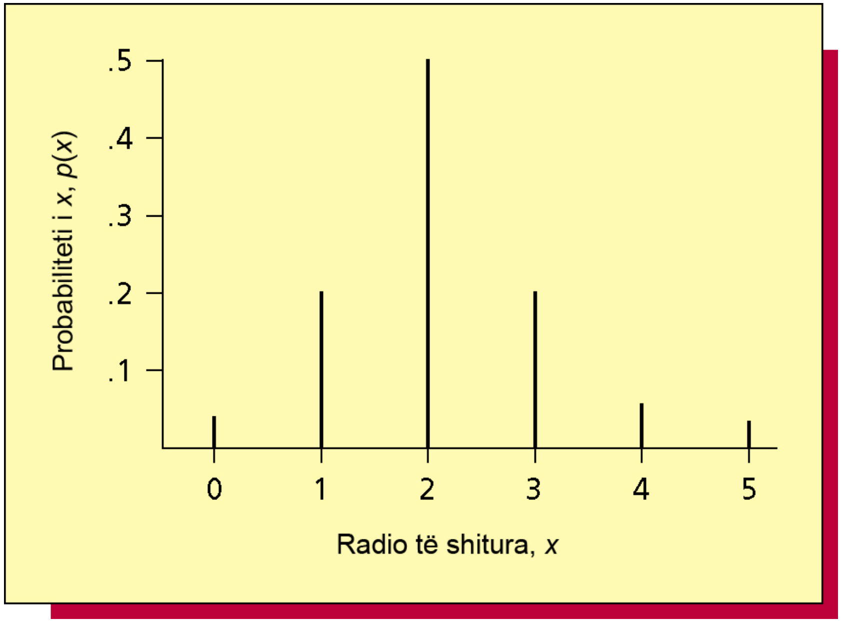
Supozojmë se studenti ka studiuar dhe ka 0.9 gjasë për t'iu përgjegjur saktë një pyetjeje.

x, Përgjegjjet korrekte	p(x), Probabiliteti
0	p(0) = 0.001
1	p(1) = 0.027
2	p(2) = 0.243
3	p(3) = 0.729

Shembull: Numri i radiove të shitura

Shembulli 4.3. Numri i radiove të shitura nga Sound City në javë

x, Radio	p(x), Probabiliteti
0	p(0) = 0.03
1	p(1) = 0.20
2	p(2) = 0.50
3	p(3) = 0.20
4	p(4) = 0.05
5	p(5) = 0.02



Vlera e pritur e një variable të rastësishme diskrete

Mesatarja ose *vlera e pritur* e një variable të rastësishme diskrete është:

$$\mu_x = \sum_{\text{Çdo } x} xp(x)$$

μ_x është vlera e pritur të ndodhë në afat të gjatë dhe në mesatare.

Shembull 4.4: Numri i pritur i radiove të shitura në javë

x, Radio	$p(x)$, Porbabiliteti	$x\,p(x)$
0	p(0) = 0.03	0(0.03) = 0.00
1	p(1) = 0.20	1(0.20) = 0.20
2	p(2) = 0.50	2(0.50) = 1.00
3	p(3) = 0.20	3(0.20) = 0.60
4	p(4) = 0.05	4(0.05) = 0.20
5	p(5) = 0.02	5(0.02) = 0.10
	1.00	2.10

Varianca dhe devijimi standard

Variancë një variable të rastësishme deskrete është:

$$\sigma_x^2 = \sum_{\text{Çdo } x} (x - \mu_X)^2 p(x)$$

❖ Varianca është mesatarja e katrorëve të devijimeve të vlerave të ndryshme të variablës së rastësishme nga vlera e pritur

Devijim standard është rrënja katrore e variancës.

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

❖ Varianca dhe devijimi standard masin përhapjen e vlerave të variablës së rastësishme nga vlera e tyre e pritur

Shembull: Varianca dhe devijimi standard

Shembull 4.7: Varianca dhe devijimi standard i numrit të radiove të shitura në javë

x, Radio	$p(x)$, Probabiliteti	$(x-\mu_x)^2\ p(x)$
0	$p(0) = 0.03$	$(0 - 2.1)^2\,(0.03) = 0.1323$
1	$p(1) = 0.20$	$(1 - 2.1)^2\,(0.20) = 0.2420$
2	$p(2) = 0.50$	$(2 - 2.1)^2\,(0.50) = 0.0050$
3	$p(3) = 0.20$	$(3 - 2.1)^2\,(0.20) = 0.1620$
4	$p(4) = 0.05$	$(4 - 2.1)^2\,(0.05) = 0.1805$
5	$p(5) = 0.02$	$(5 - 2.1)^2\,(0.02) = 0.1682$
	1.00	0.8900

Varianca

$$\sigma_X^2 = 0.89$$

Devijimi standard

$$\sigma_X = \sqrt{0.89} = 0.9434$$

Shpërndarja binomiale

Eksperimenti binomial (prova të përsëritura):

1. Eksperimenti konsiston nga n prova identike.
2. Secila provë rezulton ose me “sukses” ose me “mossukses”.
3. Probabiliteti i suksesit p, është konstant nga prova në provë.
4. Provat janë të pavarura

Shënim: Probabiliteti i mossuksesit, q, është $1 - p$ dhe është konstant nga prova në provë

Në qoftë se x është numri i sukseseve në n prova të përsëritura, atëherë x është një *variabël e rastësishme binomiale.*

Shpërndarja binomiale. (Vazhdim)

Për një variabël të rastësishme binomiale x, probabiliteti i x suksesesh në n prova jepet me *shpërndarjen binomiale*:

$$p(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

- **Shënim:** $n!$ lexohet "n faktorial" dhe $n! = n\,(n-1)\,(n-2) \cdots 1$
  - P.sh., $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- Poashtu, $0! = 1$
- Faktorialët nuk përkufizohen për numra negativë dhe thyesorë.

Shembull: Efekti anësor i ilaçit

Shembulli 4.10. Nausea si efekt anësor i pacientëve të trajtuar me Phe-Mycin

- x = Numri i pacientëve që do të përjetojnë marramendje pas trajtimit me Phe-Mycin.
- Probabiliteti që 2 nga 4 pacientë të trajtuar të përjetojnë marramendje

$$n = 4,\ p = 0.1,\ q = 1 - p = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$p(2) = \mathrm{P}(x = 2) = \frac{4!}{2!(4-2)!}(0.1)^2(0.9)^{4-2} = 6(0.1)^2(0.9)^{4-2} = 0.0486$$

Shembull: Shpërndarja binomiale, n = 4, p = 0.1

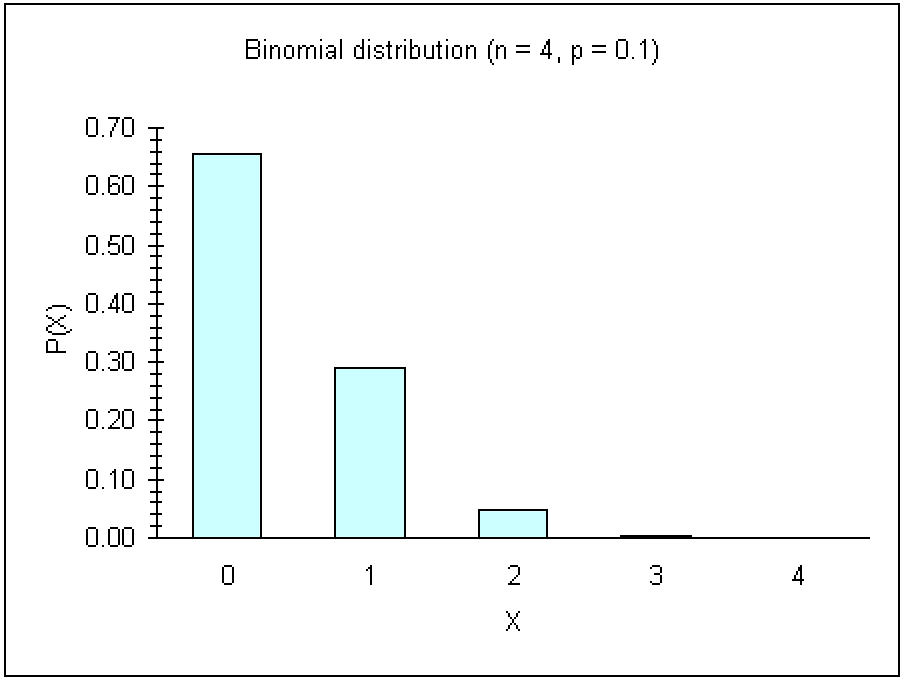
(a) Rezultati i MegaStat mbi shpërndarjen binomiale

Binomial distribution

4	n
0.1	p

X	*P(X)*	*cumulative probability*
0	0.65610	0.65610
1	0.29160	0.94770
2	0.04860	0.99630
3	0.00360	0.99990
4	0.00010	1.00000
	1.00000	

0.400	expected value
0.360	variance
0.600	standard deviation



Shembull: Efekti anësor i ilaçit. (Vazhdim)

- Shembull 4.11. Hulumtimi i deklaratës se $p = 0.10$.
  - Supozojmë se në mostrën prej $n = 4$, 3 pacientë kanë përjetuar nause.
  - $P(x \geq 3) = P(x = 3) + P(x = 4)$
    $= 0.0036 + 0.0001 = 0.0037$
  - Në qoftë se $p = 0.1$, atëherë në vetëm 0.37% të të gjitha mostrave të mundshme prej 4 pacientësh së paku 3 nga pacientët do të përjetonin nause.

Shembull: Rasti i kontrollit të kualitetit

Shembulli 4.12. Hulumtimi i deklarimit se $p = 0.95$

- Një prodhues TV-sh deklaron se $p = 0.95$ është probabiliteti se prodhimi i tij ka kohëzgjatje së paku 5-vjeçare
- Supozojmë se nga një mostër e madhësisë n = 8, 5 TV kanë zgjatur pa riparim së paku 5 vjet.
- $P(x \leq 5) = \ldots = 0.0058$

Tabela e probabilitetit binomial

Tabela 4.7(a) për n = 4, me x = 2 dhe p = 0.1

p = 0.1

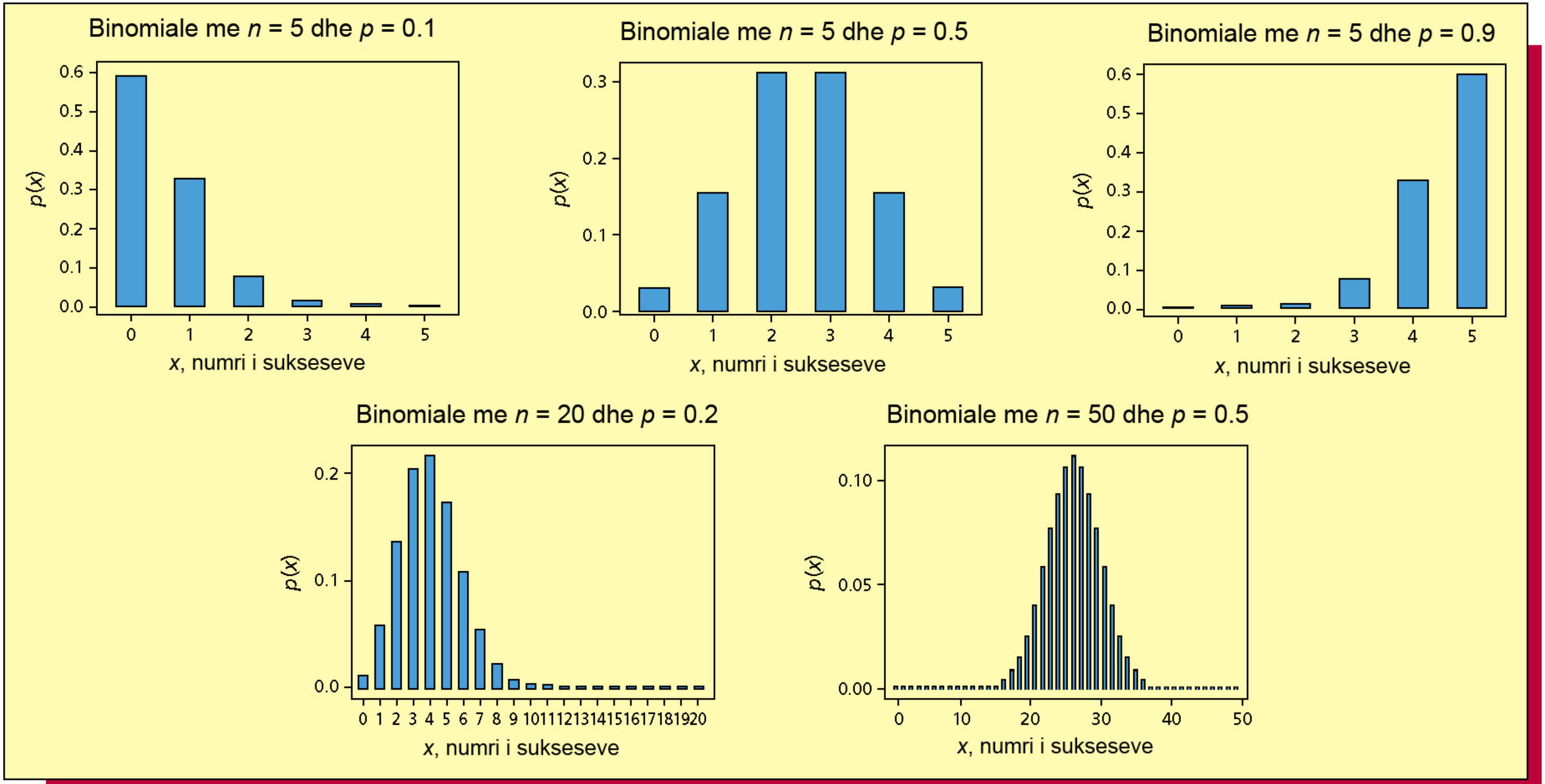
Vlerat e p (.05 deri .50)

x	0.05	0.1	0.15	…	0.50	
0	0.8145	0.6561	0.5220	…	0.0625	4
1	0.1715	0.2916	0.3685	…	0.2500	3
2	0.0135	0.0486	0.0975	…	0.3750	2
3	0.0005	0.0036	0.0115	…	0.2500	1
4	0.0000	0.0001	0.0005	…	0.0625	0
	0.95	0.9	0.85	…	0.50	x

Vlerat e p (.50 deri .95)

$P(x = 2) = 0.0486$

Disa shpërndarje binomiale



Mesatarja dhe varianca e një shpërndarjeje binomiale

Në qoftë se x është një variabël e rastësishme binomiale me parametra n dhe p (pra, $q = 1 - p$),
atëherë

Mesatarja $\mu_X = np$

Varianca $\sigma_x^2 = npq\,,\quad q = 1 - p$

Devijimi standard $\sigma_x = \sqrt{npq}$

Shpërndarja e Poisson-it

Shqyrtojmë numrin e ndodhjeve së një ngjarjeje gjatë një intervali kohor ose hapsinor, dhe supozojmë se

1. Probabiliteti i ndodhjes është i njëjtë për çdo intervale të së njëjtës gjatësi.
2. Ndodhja në çdo interval është e pavarur nga ndodhja në çfarëdo intervali disjunkt me të.

Në qoftë se x është numri i ndodhjeve në intervalin e dhënë, atëherë x është një *variabël e rastësishme e Poisson-it*.

Shpërndarja e Poisson-it. (Vazhdim)

Supozojmë s μ është mesatarja ose numri i pritur i ndodhjeve brenda një intervali të caktuar.

Probabiliteti i x ndodhjeve në intervalin kur priten μ përshkruhet me *shpërndarjen e Poisson-it*:

$$p(x) = \frac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!}$$

ku x mund të marrë çfarëdo vlere x = 0, 1, 2, 3, …

dhe e = 2.71828… (e është baza e logaritmit natyror)

Tabela e probabilitetit të Poisson-it

Shembull 4.13

x = numri i gabimeve në kontrollin e trafikut ajror në një aeroport gjatë një jave

$\mu = 0.4$ (numri i pritur i gabimeve në javë)

Gjeni probabilitetin që 3 gabime ndodhin në një javë.

$$p(3) = P(x=3) = \frac{e^{-0.4}(0.4)^3}{3!} = 0.0072$$

Tabela e probabilitetit të Poisson-it

$\mu = 0.4$

Tabela 4.9

μ, numri mesatar i ndodhjeve

x	0.1	0.2	…	0.4	…	1.00
0	0.9048	0.8187	…	0.6703	…	0.3679
1	0.0905	0.1637	…	0.2681	…	0.3679
2	0.0045	0.0164	…	0.0536	…	0.1839
3	0.0002	0.0011	…	0.0072	…	0.0613
4	0.0000	0.0001	…	0.0007	…	0.0153
5	0.0000	0.0000	…	0.0001	…	0.0031

$$p(x=3) = \frac{e^{-0.4}(0.4)^3}{3!} = 0.0072$$

Llogaritje të probabilitetit të Poisson-it

***x*, numri i gabimeve në javë**	$p(x) = \dfrac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$
0	$p(0) = \dfrac{e^{-.4}(.4)^0}{0!} = .6703$
1	$p(1) = \dfrac{e^{-.4}(.4)^1}{1!} = .2681$
2	$p(2) = \dfrac{e^{-.4}(.4)^2}{2!} = .0536$
3	$p(3) = \dfrac{e^{-.4}(.4)^3}{3!} = .0072$
4	$p(4) = \dfrac{e^{-.4}(.4)^4}{4!} = .0007$
5	$p(5) = \dfrac{e^{-.4}(.4)^5}{5!} = .0001$
6	$p(6) = \dfrac{e^{-.4}(.4)^6}{6!} = .0000$

Mesatarje dhe varianca e një variable të rastësishme të Poisson-it

Në qoftë se x është një variabël e rastësishme e Poisson-it me parametër μ, atëherë

Mesatarja $\mu_X = \mu$

Varianca $\sigma_x^2 = \mu$

Devijimi standard $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\mu}$

Shembull: Shpërndarja e Poisson-it, $\mu = 0.4$

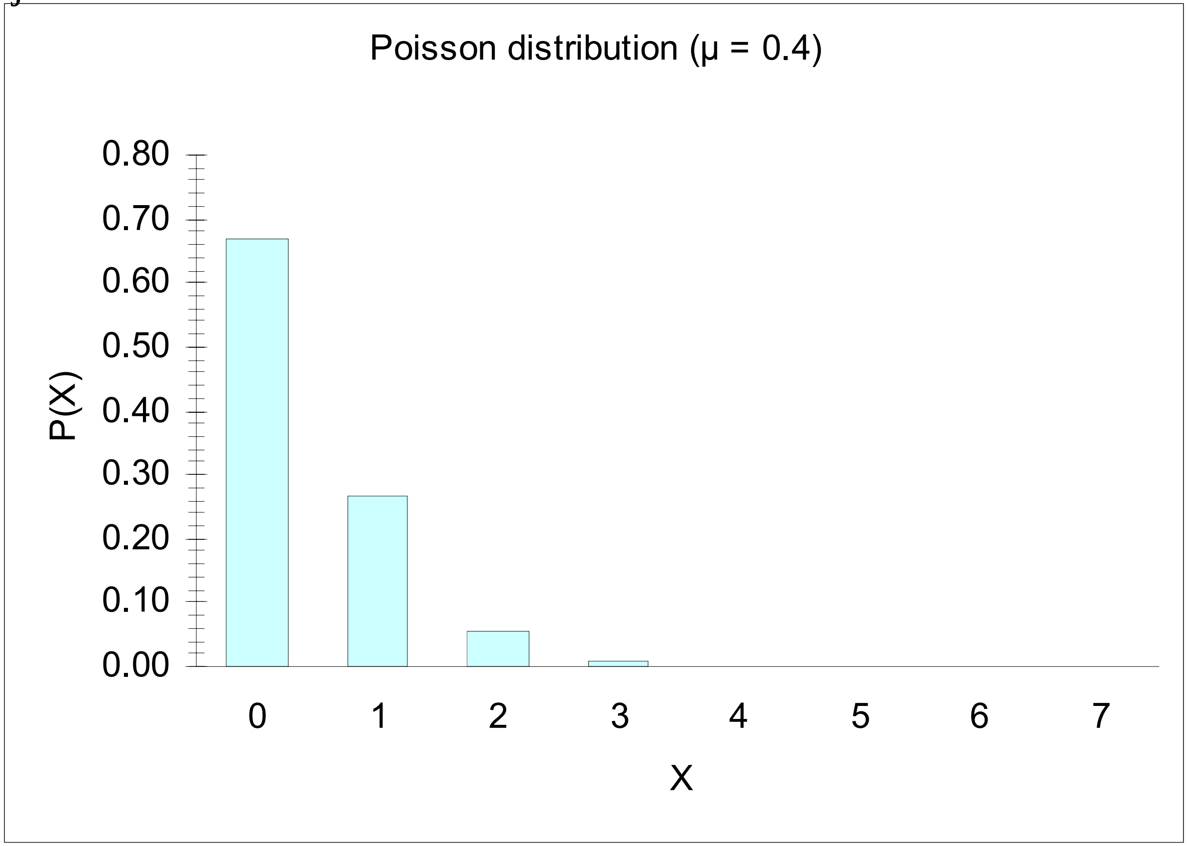
(a) Rezultati i MegaStat mbi shpërndarjen binomiale

Poisson distribution

0.4 mean rate o

X	P(X)	cumulative probability
0	0.67032	0.67032
1	0.26813	0.93845
2	0.05363	0.99207
3	0.00715	0.99922
4	0.00072	0.99994
5	0.00006	1.00000
6	0.00000	1.00000
7	0.00000	1.00000
8	0.00000	1.00000
	1.00000	

0.400 expected va
0.400 variance
0.632 standard de



Disa shpërndarje të Poisson-it