Statistikë e aplikuar

Probabiliteti

Faton Berisha

Kapitulli 3

Probabiliteti

McGraw-Hill/Irwin

Probabiliteti

Koncepte probabiliteti

- *Eksperiment* është çfarëdo procesi observimi me një rezultat të pasigurtë (*të rastësishëm*).
- Rezultatet e mundshme për një eksperiment quhen *rezultate eksperimentale*.
- *Probabiliteti* është masë e gjasës se një rezultat eksperimental do të ndodhë kur kryhet një eksperiment.

Probabiliteti

- Në qoftë se E është një rezultat eksperimental, atëherë me $P(E)$ shënohet probabiliteti se E do të ndodhë.

Kushtet

1. $0 \leq P(E) \leq 1$

   ashtu që:

   - Në qoftë se E kurrë nuk mund të ndodhë, atëherë $P(E) = 0$.
   - Në qoftë se E sigurisht ndodh, atëherë $P(E) = 1$.

2. Shuma e probabiliteteve të të gjitha rezultateve eksperimentale duhet të jetë 1.

Shoqërimi i probabiliteteve për rezultate eksperimentale

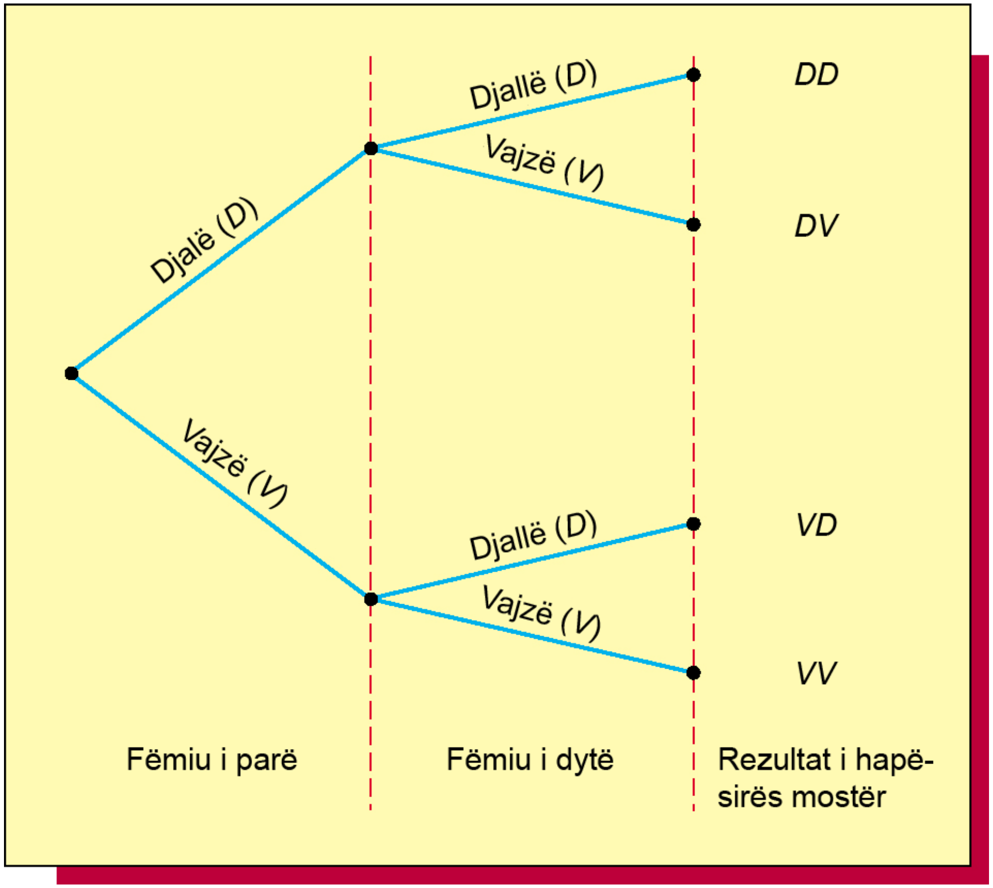
- ❖Metoda klasike
  - ❖Për rezultate njësoj të mundshme
- ❖Frekuenca relative
  - ❖Në afat të gjatë
- ❖Subjektive
  - ❖Vlerësimi mbështetet në përvojë, ekspertizë ose intuitë.

Hapësirat mostër dhe ngjarjet

- *Hapësira mostër* e një eksperimenti është bashkësia e të gjitha rezultateve eksperimentale të mundshme (*rezultate të hapësirës mostër, ngjarje elementare*).
  - Shembulli 3.1. Zgjedhja e CEO në kompani
  - Shembulli 3.2. Gjinitë e dy fëmijëve
  - Shembulli 3.3. Përgjegjjet në kuiz

Shembull: Gjinitë e fëmijëve

Shembulli 3.2: Gjinitë e dy fëmijëve

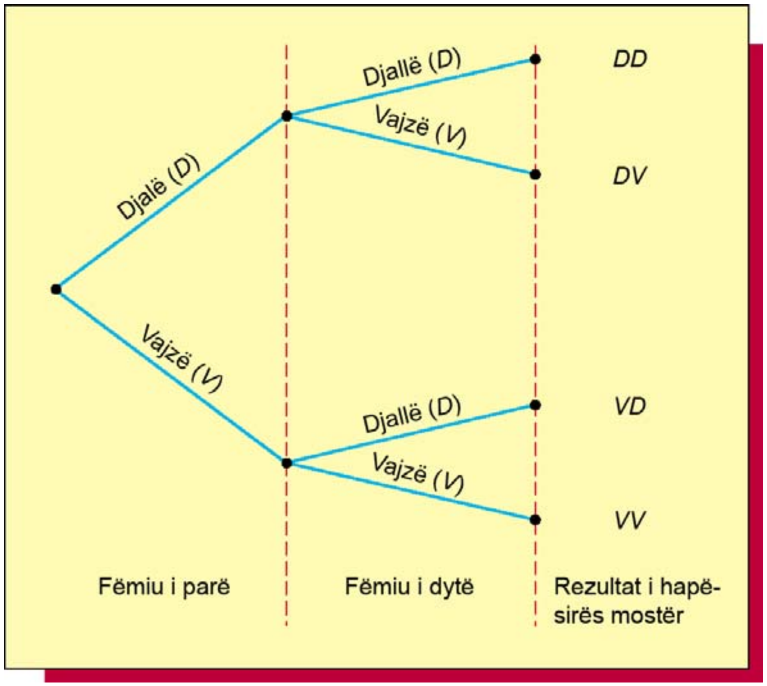


Ngjarja dhe probabiliteti i ngjarjes

- *Ngjarje* është një bashkësi (koleksion) rezultatesh të hapësirës së mostrës.
- *Probabiliteti* i një ngjarjeje është shuma e probabiliteteve të rezultateve të hapësirës mostër.
- Në qoftë se A është një ngjarje, atëherë $0 \leq P(A) \leq 1$.
  - Në qoftë se A kurrë nuk mund të ndodhë, atëherë $P(A) = 0$ (*ngjarje e pamundur*).
  - Në qoftë se A sigurisht ndodh, atëherë $P(A) = 1$ (*ngjarje e sigurtë*).

Shembull ngjarjesh: Gjinitë e fëmijëve

Shembulli 3.4. Gjinitë e dy fëmijëve



Ngjarje:

P(Dy djem) = $P(DD)$ = ¼

P(Një djalë dhe një vajzë)

= $P(DV) + P(VD)$ = ¼ + ¼ = ½

P(Dy vajza) = $P(VV)$ = ¼

P(Së paku një vajzë)

= $P(DV)$ + P(VD) + P(VV)

= ¼ + ¼ + ¼ = ¾

Vërejtje. Të gjitha rezultatet njësoj të mundshme: $P(DD) = \ldots = P(VV)$ = ¼

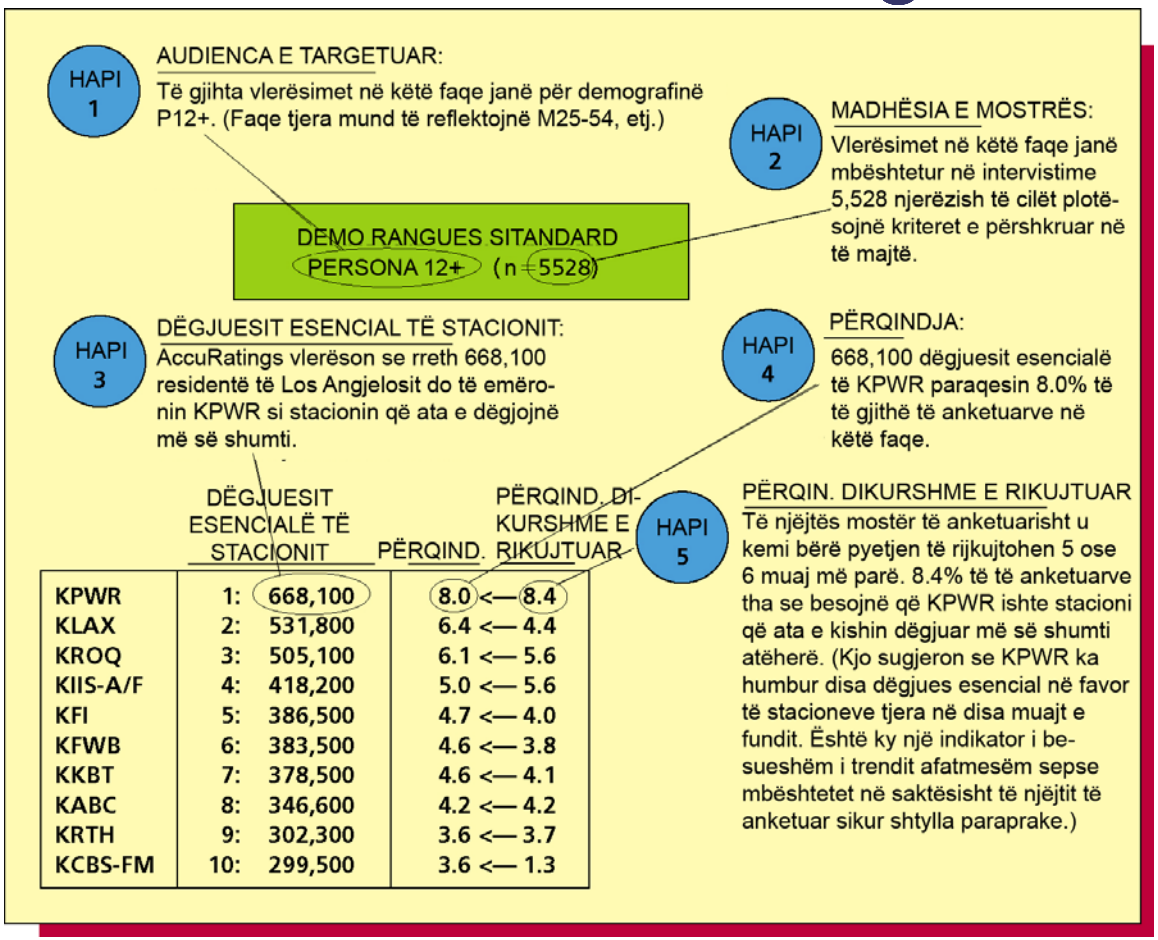
Probabilitete

- Në qoftë se rezultatet e hapësirës mostër janë të gjitha njësoj të mundshme, atëherë probabiliteti i ndodhjes së një ngjarjeje është i barabartë me thyesën

$$\frac{\text{Numri i rezultateve të hapësirës mostër që i përkasin ngjarjes}}{\text{Numri total i rezultateve të hapësirës mostër}}$$

Shembull: Rasti AccuRatings

Shembulli 3.7. Rasti i rangimeve të mediave


AUDIENCA E TARGETUAR:

Të gjihta vlerësimet në këtë faqe janë për demografinë P12+. (Faqe tjera mund të reflektojnë M25-54, etj.)

HAPI 1

MADHËSIA E MOSTRËS:

Vlerësimet në këtë faqe janë mbështetur në intervistime 5,528 njerëzish të cilët plotësojnë kriteret e përshkruar në të majtë.

HAPI 2

DEMO RANGUES SITANDARD

PERSONA 12+ (n = 5528)

DËGJUESIT ESENCIAL TË STACIONIT:

AccuRatings vlerëson se rreth 668,100 residentë të Los Angjelosit do të emëronin KPWR si stacionin që ata e dëgjojnë më së shumti.

HAPI 3

PËRQINDJA:

668,100 dëgjuesit esencialë të KPWR paraqesin 8.0% të të gjithë të anketuarve në këtë faqe.

HAPI 4

PËRQIN. DIKURSHME E RIKUJTUAR

Të njëjtës mostër të anketuarisht u kemi bërë pyetjen të rijkujtohen 5 ose 6 muaj më parë. 8.4% të të anketuarve tha se besojnë që KPWR ishte stacioni që ata e kishin dëgjuar më së shumti atëherë. (Kjo sugjeron se KPWR ka humbur disa dëgjues esencial në favor të stacioneve tjera në disa muajt e fundit. Është ky një indikator i besueshëm i trendit afatmesëm sepse mbështetet në saktësisht të njëjtit të anketuar sikur shtylla paraprake.)

HAPI 5

		DËGJUESIT ESENCIALË TË STACIONIT	PËRQIND.	PËRQIND. DIKURSHME E RIKUJTUAR
KPWR	1:	668,100	8.0	<— 8.4
KLAX	2:	531,800	6.4	<— 4.4
KROQ	3:	505,100	6.1	<— 5.6
KIIS-A/F	4:	418,200	5.0	<— 5.6
KFI	5:	386,500	4.7	<— 4.0
KFWB	6:	383,500	4.6	<— 3.8
KKBT	7:	378,500	4.6	<— 4.1
KABC	8:	346,600	4.2	<— 4.2
KRTH	9:	302,300	3.6	<— 3.7
KCBS-FM	10:	299,500	3.6	<— 1.3

Vlerësimi i probabilitetit (përqindjes):

$$P(KPWR) = 445/5528$$

$$= 0.8050$$

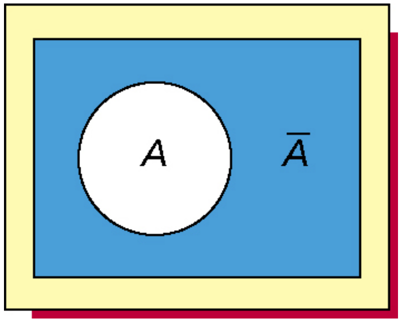
Nën supozimin se 8,300,000 banorë në LA të moshës 12+

Vlerësimi i dëgjuesve:

$$\text{Dëgjues} = N \cdot P(KPWR)$$

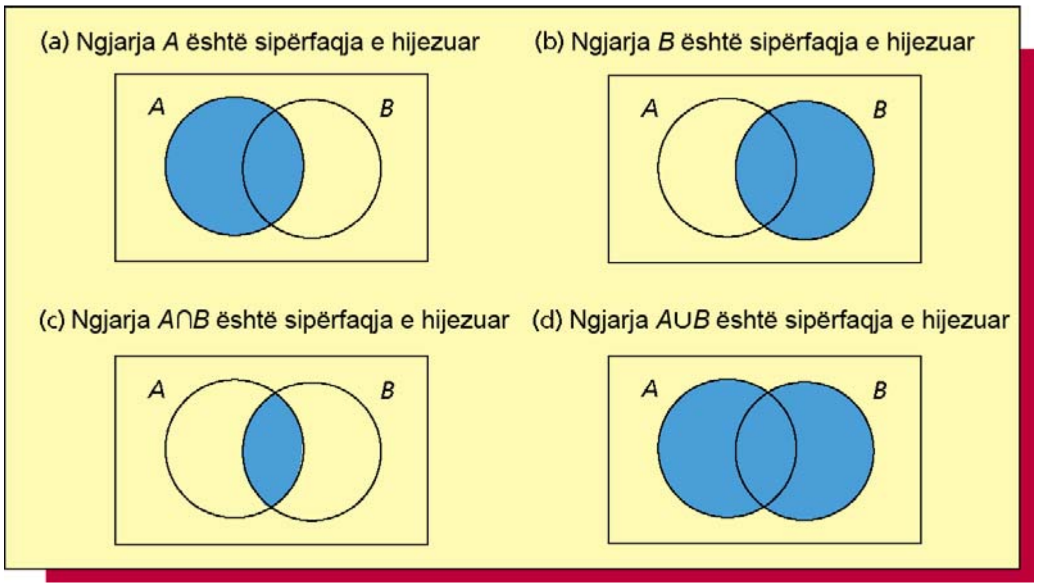
$$= 8{,}300{,}000 \cdot 0.08 = 668{,}100$$

Disa rregulla elementare të probabilitetit



Komplementi $\bar{A}$ i një ngjarjeje A është bashkësia e të gjithë rezultateve të hapësirës mostër të cilët nuk i takojnë ngjarjes A.

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$



Figurat njihen si “Diagram i Venn-it”

Shembujt 3.6, 3.8

Unioni i ngjarjeve A dhe B, $A \cup B$
Bashkësia e ngjarjeve elementare që i takojnë A **ose** B

Prerja e ngjarjeve A dhe B, $A \cap B$
Bashkësia e ngjarjeve elementare që i takojnë A **ose** B

Shembulli 3.9.

Rregulla e mbledhjes

Probabiliteti se do të ndodhë *A* ose *B* (unioni $A \cup B$)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ku $P(A \cap B)$ është probabiliteti që të dyja A dhe B të ndodhin së bashku.

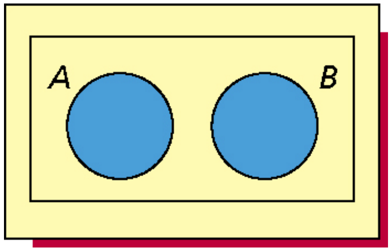
A dhe *B* janë *reciprokisht të papajtueshme* në qoftë se nuk kanë rezultate të hapësirës mostër të përbashkëta, d.m.th.

$$P(A \cap B) = 0$$

Në qoftë se A dhe B janë reciprokisht të papajtueshme,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Shembulli 3.12. Rasti AccuRating



Probabiliteti i kushtëzuar

Probabiliteti i një ngjarjeje A, me kusht që të ketë ndodhur ngjarja B, quhet *probabilitet i kushtëzuar* i A me kusht B, dhe shënohet $P(A \mid B)$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Vërejtje: $P(B) \neq 0$

- Në qoftë se ka ndodhur A, atëherë sa është probabiliteti që të ndodhë B?

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Pavarësia e ngjarjeve

Dy ngjarje A dhe B quhen të *pavarura* në qoftë se

$$P(A \mid B) = P(A)$$

ose, në mënyrë ekuivalente,

$$P(B \mid A) = P(B)$$

Rregulla e shumëzimit

Probabiliteti se ndodhin së bashku *A* dhe *B* (prerja A ∩ B):

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$
$$= P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Në qoftë se A dhe B janë *ngjarje të pavarura,* atëherë probabiliteti se ndodhin *A* dhe *B* (prerja A ∩ B) është

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A)$$

Shembujt 3.13, 3.14