Integrimi

Funksioni primitiv: Integrali i pacaktuar

F. M. Berisha

UNIVERSITETI I EJL
ЈИЕ УНИВЕРЗИТЕТ
SEE UNIVERSITY

Universiteti i Evropës Juglindore, Tetovë

Qëllimet dhe objektivat

- Nocionet e një funksioni primitiv
  dhe integralit të pacaktuar
- Rregullat e integrimit për funksione të zakonshme
- Zbatimi i rregullave algjebrike për integrale të pacaktuara
- Zbatimi i integralit të pacaktuar në aplikacione praktike

Përmbajtja

Funksioni primitiv i një funksioni

Funksioni primitiv

Një funksion $F(x)$ për të cilin

$$F'(x) = f(x)$$

për çdo x nga domeni i f quhet *funksion primitiv* i $f(x)$.

Shembull funksioni primitiv

Shembull

Provoni se $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x + 2$ është një funksion primitiv i $f(x) = x^2 + 5$.

Zgjidhje.

Derivojmë F:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 5x + 2\right)'$$

$$= \frac{1}{3}(3x^2) + 5 = x^2 + 5 = f(x),$$

që duhej provuar. □

Funksioni i përgjithshëm primitiv i një funksioni

- Një funksion ka më tepër se një funksion primitiv:
  - Për $f(x) = 3x^2$
  - $F(x) = x^3$ është një funksion primitiv, meqë

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x),$$

  - por të tillë janë edhe $x^3 + 10$, $x^3 - 4$ dhe $x^3 + \pi$, meqë

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 10) = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}(x^3 - 4) = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}(x^3 + \pi) = 3x^2.$$

Funksioni i përgjithshëm primitiv i një funksioni. (Vazhdim)

Vetia fundamentale e funksioneve primitive

Në qoftë se $F(x)$ është një funksion primitiv
i një funksioni të vazhdueshëm $f(x)$,
atëherë çdo funksion primitiv tjetër i $f(x)$
ka formën $G(x) = F(x) + C$ për ndonjë konstantë C.

Interpretimi gjeometrik i vetisë fundamentale

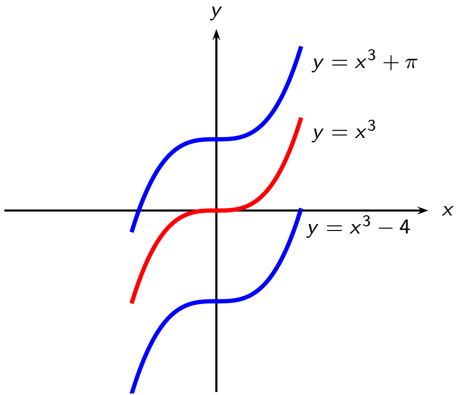

Figura: Disa funksione primitive të $f(x) = 3x^2$.

Integrali i pacaktuar

- Paraqesim familjen e të gjitha funksioneve primitive të $f(x)$ duke përdorur simbolin:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

  i cili quhet *integral i pacaktuar* i f.

- Për shmbull,

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

Rregullat e integrimit për funksione të zakonshme

Rregullat e integrimit për funksione të zakonshme

- *Rregulla e konstantës:* $\int k\,dx = kx + C$ për k konstantë.
- *Rregulla e fuqisë:*
  $$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad \text{për çdo } n \neq -1.$$
- *Rregulla logaritmike:* $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ për çdo $x \neq 0$.
- *Rregulla eksponenciale:*
  $$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C \quad \text{për } k \neq 0 \text{ konstantë.}$$

Rregullat e integrimit për funksione të zakonshme (...)

Shembull

Gjeni integrale vijuese:

1. $\int 5\, dx$
2. $\int x^{11}\, dx$
3. $\int \sqrt{x}\, dx$

Zgjidhje...

1. Zbatojmë rregullën e konstantës me $k = 5$:

$$\int 5\, dx = 5x + C.$$

$\square$

Rregullat e integrimit për funksione të zakonshme (...)

...Zgjidhje.

2. Zbatojmë rregullën e fuqisë me $n = 11$:

$$\int x^{11}\,dx = \frac{1}{12}x^{12} + C.$$

3. Zbatojmë rregullën e fuqisë me $n = \frac{1}{2}$:

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

□

Rregullat algjebrike për integrim të pacaktuar

Rregullat algjebrike për integrim të pacaktuar

- *Rregulla e shumëfishit konstant:*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad \text{për } k \text{ konstantë.}$$

- *Rregulla shumës:*

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

- *Rregulla e ndryshimit:*

$$\int [f(x)-g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Aplikacion: Kostoja totale

Shembull

Një prodhues ka gjetur se kostoja margjinale
është $3x^2 - 80x + 500$ euro për njësi kur prodhohen x njësi.
Kostoja totale e prodhimit të 2 njësive të para është 1,000 €.
Sa është kostoja totale e prodhimit të 5 njësive të para?

Zgjidhje. . .

Rikujtojmë se kostoja margjinale është derivati:

$$C'(x) = 3x^2 - 80x + 500,$$

$\square$

Aplikacion: Kostoja totale. (Vazhdim)

...Zgjidhje...

prandaj $C(x)$ duhet të jetë një funksion primitiv:

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int (3x^2 - 80x + 500)\,dx$$
$$= x^3 - 40x^2 + 500x + K$$

për ndonjë konstantë K.
Vlera e K përcaktohet nga fakti se

$$C(2) = 1000.$$

$\square$

Aplikacion: Kostoja totale. (Vazhdim)

. . . Zgjidhje.

Në veçanti,

$$2^3 - 40 \cdot 2^2 + 500 \cdot 2 + K = 1000,$$

ose

$$K = 152.$$

Prej këtu

$$C(x) = x^3 - 40x^2 + 500x + 152,$$

dhe kostoja e prodhimit të 5 njësive të para është

$$C(5) = 5^3 - 40 \cdot 5^2 + 500 \cdot 5 + 152 = 1777.$$

$\square$

Një aplikacion praktik

Shembull

Një shitës me pakicë pranon një kontigjent prej $12,000$ kg mjell, që do të shfrytëzohet me shpejtësi konstante prej 300 kg në javë. Në qoftë se kostot e depos janë 0.5 cent për kilogram për javë, sa do të paguajë shitësi për kosto ruajtjeje gjatë 40 javëve të ardhshme?

Zgjidhje...

Shënojmë me $S(t)$ kostot e ruajtjes (në euro) gjatë t javëve. Numri i kilogramëve të mjellit në depo pas t javëve:

$$q(t) = 12,000 - 300t.$$

$\square$

Një aplikacion praktik. (Vazhdim)

... Zgjidhje...

Shpejtësia e ndryshimit të kostove të ruajtjes sipas kohës:

$$\frac{dS}{dt} = q(t) \cdot 0.005 = 0.005(12,000 - 300t) = 60 - 1.5t.$$

Prandaj,

$$S(t) = \int \frac{dS}{dt}\, dt = \int (60 - 1.5t)\, dt = 60t - 0.75t^2 + C.$$

Për të përcaktuar C, shfrytëzojmë faktin se në momentin e transportit nuk ka kosto:

$$S(0) = 0;$$

Një aplikacion praktik. (Vazhdim)

... Zgjidhje.

d.m.th.,

$$60 \cdot 0 - 0.75 \cdot 0^2 + C = 0,$$

ose

$$C = 0.$$

Prej këtu,

$$S(t) = 60t - 0.75t^2,$$

dhe kostoja totale e ruajtjes gjatë 40 javëve të ardhshme:

$$S(40) = 60 \cdot 40 - 0.75 \cdot 40^2 = 1200.$$

$\square$

Udhëzime për lexim të mëtejmë

- http://fberisha.netfirms.com
- Detyrë shtëpie: Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks,* fq. 249–258.
- L. D. Hofmann, G. L. Bradley, *Calculus – for business, economics and life sciences,* fq. 372–386.

Përfundim

- Funksion primitiv; integrali i pacaktuar:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad \text{atëherë dhe vetëm atëherë kur} \quad F'(x) = f(x$$

- Rregullat për integrim të funksioneve të zakonshme
  - Rregulla e fuqisë: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
  - Rregulla logaritmike: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
  - Rregulla eksponenciale: $\displaystyle\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$
- Rregullat algjebrike për integrimin e pacaktuar:
  - Rregulla e shumëfishit konstant: $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
  - Rregulla e shumës: $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$