Modele funksionale

F. M. Berisha

UNIVERSITETI I EJL
ЈИЕ УНИВЕРЗИТЕТ
SEE UNIVERSITY

Universiteti i Evropës Juglindore, Tetovë

Qëllimet dhe objektivat

- Paraqitja e një situate praktike përmes një modeli funksional.
- Zbatimi i modeleve matematike
  për zgjidhje problemesh praktike mbi funksione biznesi.

Përmbajtja

Shembull funksioni të të ardhurave totale

- *Model matematik* është një paraqitje matematike e një situate praktike.

Shembull

Një prodhues ka ardhur në përfundim se çmimi p, i shprehur në cent, i një njësie të një malli të caktuar kur prodhohen x njësi të mallit plotëson relacionin

$$\frac{5}{6}p - 35x = 15.$$

Në qoftë se shiten që të gjitha x njësitë me këtë çmim, shprehni të ardhurat e nxjerra nga shitja si funksion të x.

Shembull funksioni të të ardhurave totale. (Vazhdim)

Zgjidhje...

Të ardhurat totale R nga shitja e x njësish të mallit me çmim p janë

$$R = px.$$

Për të shprehur R si funksion vetëm i x, duhet shprehur p sipas x:

$$\begin{aligned} \frac{5}{6}p - 35x &= 15 \\ \frac{5}{6}p &= 35x + 15 \\ p &= \frac{6}{5}(35x + 15) \\ p &= 42x + 18 \end{aligned}$$

□

Shembull funksioni të të ardhurave totale. (Vazhdim)

. . . Zgjidhje.

Rezultatin e fituar për p e zëvendëjmë në formulën për R:

$$R(x) = (42x + 18)x = 42x^2 + 18x.$$

$\square$

Përpjesëtimi

Përpjesëtimi (proporcionaliteti)

Themi se një sasi Q është:

- *në përpjesëtim të drejtë* me x në qoftë se
$$Q = kx$$
për ndonjë konstantë k;
- *në përpjesëtim të zhdrejtë* me x në qoftë se
$$Q = \frac{k}{x}$$
për ndonjë konstantë k.

Shembull funksioni të kostos totale

Shembull

Në një fabrikë kostoja fikse e prodhimit është
në përpjesëtim të drejtë me numrin e makinave të shfrytëzuara
dhe kostoja variabile është në përpjesëtim të zhdrejtë
me numrin e makinave të shfrytëzuara.
Shprehni koston totale si funksion të numrit të makinave
të shfrytëzuara.

Shembull funksioni të kostos totale. (Vazhdim)

Zgjidhje.

Shënojmë me x numrin e makinave të shfrytëzuara, me $C(x)$ koston totale të prodhimit.

$$[\text{Kostoja fikse}] = k_1 x, \qquad [\text{Kostoja variabile}] = \frac{k_2}{x},$$

ku k_1 e k_2 janë konstanta.
Prandaj,

$$C(x) = k_1 x + \frac{k_2}{x}.$$

Një grafik funksioni të tillë është skicuar në figurën vijuese. $\square$

Grafiku i funksionit të kostos totale

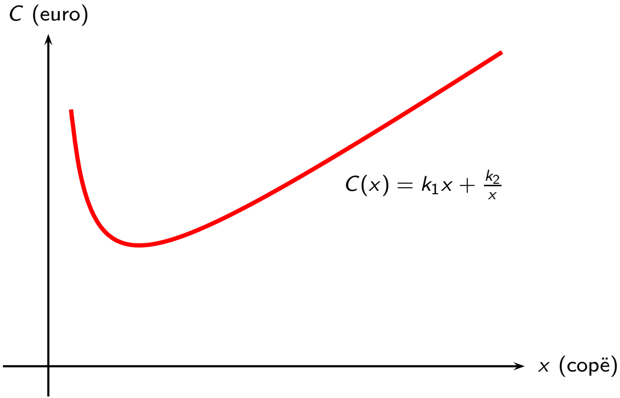

Figura: Kostoja totale sipas numrit të makinave të shfrytëzuara.

Shembull funksioni të profitit

Shembull

Një prodhues mund të prodhojë video shirit të painçizuar
me kosto 2 € për kasetë.
Kasetat shiten me çmim 3 € copa,
dhe me këtë çmim konsumatorët blejnë $4,000$ kaseta në muaj.
Prodhuesi planifikon të rrisë çmimin e kasetave
dhe vlerëson se për çdo 1 € rritje në çmim
do të shiten 400 kaseta më pak çdo muaj.

1. Shprehni profitin mujor të prodhuesit
   si funksion të çmimit me të cilin shiten kasetat.
2. Skiconi grafikun e funksionit të prodhimit.
   Cili çmim i përgjigjet profitit maksimal?

Optimizimi i funksionit të profitit. (Vazhdim)

Zgjidhje...

1. Shprehim me fjalë relacionin e kërkuar

$$[\text{Profiti}] = [\text{Të ardhurat totale}] - [\text{Kostoja totale}].$$

Shënojmë me p çmimin me të cilin do të shitet secila kasetë dhe me $P(p)$ profitin përkatës mujor.
Shprehim numrin e kasetave të shitura me anë të p.

$$\begin{aligned}&[\text{Numri i kasetave të shitura}]\\ &\qquad = 4,000 - 400 \cdot [\text{Numri i rritjeve për 1 €}]\\ &\qquad = 4,000 - 400(p-3) = 5,200 - 400p.\end{aligned}$$

□

Shembull funksioni të profitit. (Vazhdim)

. . . Zgjidhje. . .

$$
\begin{aligned}
[\text{Të ardhurat totale}] &= R(p) \\
&= p \cdot [\text{Numri i kasetave të shitura}] = p(5,200 - 400p).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\text{Kostoja totale}] &= C(p) \\
&= 2 \cdot [\text{Numri i kasetave të shitura}] = 2(5,200 - 400p).
\end{aligned}
$$

Kështu, profiti total është

$$
\begin{aligned}
P(p) = R(p) - C(p) &= p(5,200 - 400p) - 2(5,200 - 400p) \\
&= (5,200 - 400p)(p - 2) = -400(p - 13)(p - 2) \\
&= -400p^2 + 6,000p - 10,400.
\end{aligned}
$$

□

Grafiku i funksionit të profitit

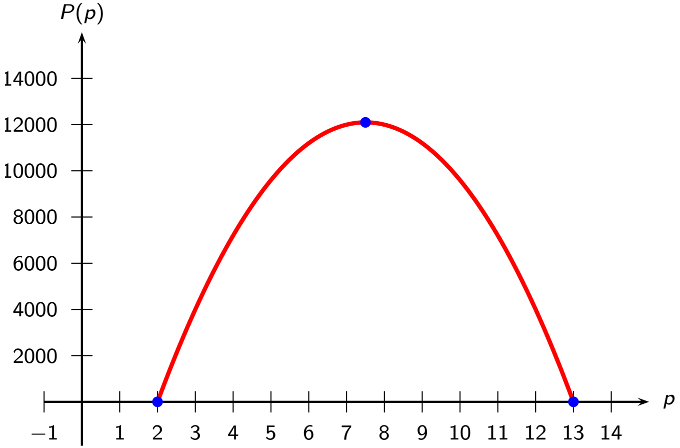

Figura: Funksioni i profitit $P(p) = -400(p - 13)(p - 2)$.

Optimizimi i funksionit të profitit

. . . Zgjidhje.

2. Profiti maksimal do të arrihet te vlera e p e cila i përgjigjet kulmit të parabolës:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-6,000}{2 \cdot (-400)} = 7.5$$

euro.

Ligji i ofertës dhe kërkesës

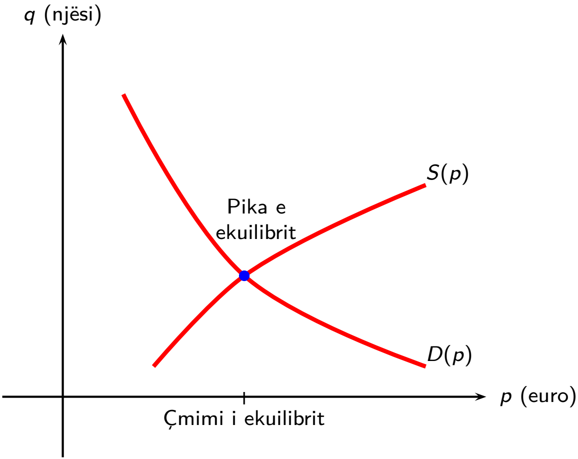

Figura: Ekuilibiri i tregut: pikëprerja e ofertës dhe kërkesës.

Shembull ekuilibri tregu

Shembull

Gjeni çmimin e ekuilibrit të tregut në qoftë se funksioni i ofertës për një artikull është $S(p) = p^2 + 3p - 70$ dhe funksioni i kërkesës është $D(p) = 410 - p$.

Shembull ekuilibri tregu. (Vazhdim)

Zgjidhje.

Barazojmë $S(p)$ me $D(p)$ dhe zgjidhim ekuacionin sipas p:

$$\begin{aligned} S(p) &= D(p) \\ p^2 + 3p - 70 &= 410 - p \\ p^2 + 4p - 480 &= 0 \\ p_{1/2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-480)}}{2 \cdot 1}, \end{aligned}$$

prej nga fitojmë

$$p_1 = 20, \quad p_2 = -24.$$

Në aplikacionin kanë kuptim vetëm vlerat pozitive të p, prandaj çmimi i ekuilibrit të tregut është 20 €. □

Udhëzime për lexim të mëtejmë

- `http://fberisha.netfirms.com`
- Detyrë shtëpie: Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks,* fq. 133–143.
- L. D. Hofmann, G. L. Bradley, *Calculus – for business, economics and life sciences,* fq. 46–61.

Përfundim

- Modelet matematike
- Modele funksionesh të biznesit
- Zbatime modelesh funksionale për zgjidhje problemesh praktike
  - optimizim funksionesh të biznesit
  - ligji i ofertës dhe kërkesës.