Limitet e funksioneve

F. M. Berisha

UNIVERSITETI I EJL
ЈИЕ УНИВЕРЗИТЕТ
SEE UNIVERSITY

Universiteti i Evropës Juglindore, Tetovë

Qëllimet dhe objektivat

- Njohja me konceptin e limitit të një funksioni, përmes një qasjeje intuitive
- Zbatimi i rregullave algjebrike për njehsimin e limitit të një funksioni
- Nocioni i një funksioni të vazhdueshëm

Përmbajtja

1. Nocioni i limitit të një funksioni

2. Rregullat algjebrike për limitet e funksioneve
   - Vetitë algjebrike të limiteve
   - Limitet e dy funksioneve elementare lineare
   - Shembuj njehsimesh të limiteve të funksioneve

3. Vazhdueshmëria e një funksioni
   - Nocioni i vazhdueshmërisë
   - Shembull funksioni të vazhdueshëm

Kuptimi i limitit të një funksioni

- Në vija të trasha, procesi limit ka të bëjë me ekzaminimin e sjelljes së një funksioni $f(x)$ kur x i afrohet një numri c i cili mund të jetë ose të mos jetë në domenin e f.
- „Sjellja" e funksionit

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

kur x i afrohet 1:

	x i afrohet 1 nga e majta				$\rightarrow \leftarrow$	x i afrohet 1 nga e djathta			
x	0.9	0.95	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.05	1.1
$f(x)$	1.9	1.95	1.99	1.999		2.001	2.01	2.05	2.1

- Simbolikisht, vejmë

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

Nocioni i limitit të një funksioni

Limit i një funksioni

Në qoftë se $f(x)$ i afrohet gjithmonë më afër numrit L
kur x i afrohet gjithmonë më afër numrit c nga të dyja anët,
atëherë L është *limiti i $f(x)$ kur x tenton nga c.*
Sjellja e tillë shprehet duke shënuar

$$\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = L.$$

Interpretimi gjeometrik i limitit

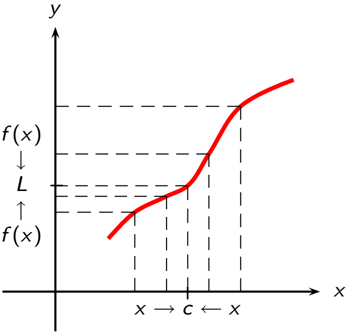


Figura: Në qoftë se $\lim_{x \to c} f(x) = L$, lartësia e grafikut të $y = f(x)$ i afrohet L kur x i afrohet c.

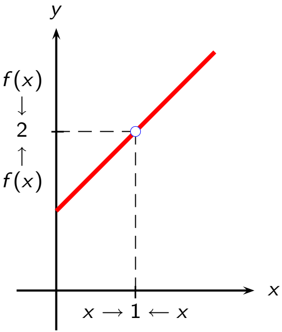
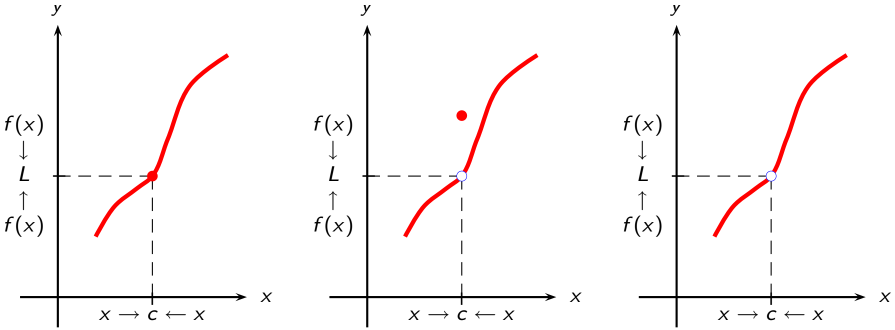


Figura: Interpretimi gjeometrik i shprehjes $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

Tri funksione me limit $\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = L$



Dy funksione pa limit $\lim_{x \longrightarrow c} f(x)$

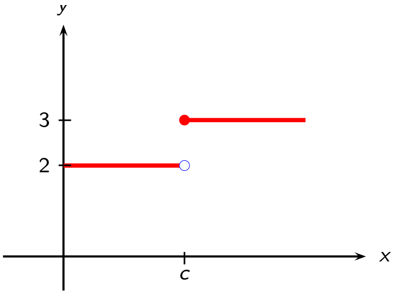


Figura: $f(x)$ nuk i afrohet të njëjtës vlerë kur x tenton në c nga dy anët.

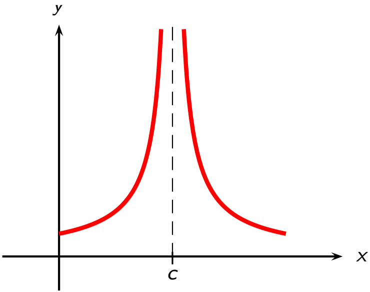


Figura: $f(x)$ rritet pafundësisht kur x tenton në c.

Vetitë algjebrike të limiteve të funksioneve

Vetitë algjebrike të limiteve

Në qoftë se ekzistojnë $\lim_{x\to c} f(x)$ dhe $\lim_{x\to c} g(x)$, atëherë

$$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x),$$

$$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x),$$

$$\lim_{x\to c}[kf(x)] = k\lim_{x\to c} f(x) \quad \text{për çdo konstantë } k,$$

$$\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = [\lim_{x\to c} f(x)][\lim_{x\to c} g(x)],$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \quad \text{në qoftë se } \lim_{x\to c} g(x) \neq 0,$$

$$\lim_{x\to c} f(x)^p = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^p \quad \text{në qoftë se ekziston } \lim_{x\to c} f(x).$$

Vetitë algjebrike të limiteve të funksioneve. (Vazhdim)

Mbani mend!

Pra, limiti i një shume, ndryshimi, prodhimi, herësi ose fuqie është shuma, ndryshimi, prodhimi, herësi ose fuqia e limiteve të veçanta, përderisa shprehjet janë të definuara.

Limitet e dy funkioneve lineare

Limitet e dy funksioneve elementare lineare

Për çdo konstantë k,

$$\lim_{x \to c} k = k$$

dhe

$$\lim_{x \to c} x = c.$$

D.m.th., limiti i një konstante është vetë konstanta, dhe limiti i $f(x) = x$ kur x tenton në c është c.

Interpretimet gjeometrike

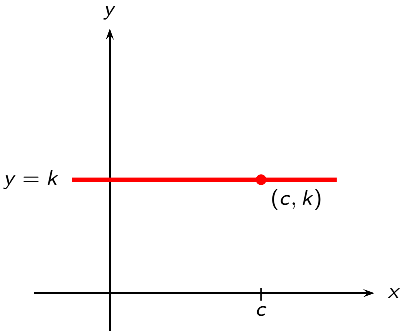


Figura: $\lim_{x \to c} k = k$

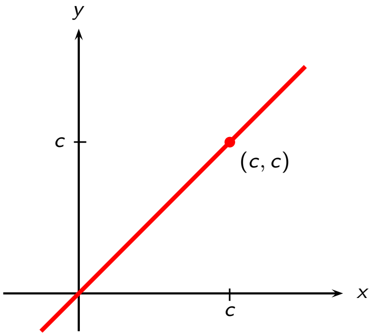


Figura: $\lim_{x \to c} x = c$

Shembuj njehsimesh të limiteve të funksioneve. (Vazhdim)

Shembull

Gjeni

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 1}{x - 2}.$$

Zgjidhje.

Zbatojmë rregullën e herësit:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 1}{x - 2} = \frac{\lim_{x \to 1}(3x^2 + 1)}{\lim_{x \to 1}(x - 2)} = \frac{3 \lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 1}{\lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 2} = \frac{3 + 1}{1 - 2} = -4.$$

$\square$

Shembuj njehsimesh të limiteve të funksioneve. (Vazhdim)

Shembull

Gjeni
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}.$$

Zgjidhje.

Për $x=1$ funksioni nuk është i përkufizuar,
kurse për të gjitha vlerat tjera të x thyesa mund të thjeshtohet:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

□

Vazhdueshmëria e një funksioni

- Funksion i vazhdueshëm është funksioni grafiku i të cilit mund të vizatohet pa e ngritur lapsin nga letra; d.m.th. nuk ka vrima ose këputje.

Vazhdueshmëria

Një funksion f është i vazhdueshëm në c në qoftë se

1. $f(c)$ është e përkufizuar;
2. ekziston $\lim_{x \longrightarrow c} f(x)$;
3. $\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = f(c)$.

Vazhdueshmëria e një funksioni në interval

Vazhdueshmëria në interval

Themi se një funksion f është i vazhdueshëm në një interval $a \leq x \leq b$ në qoftë se është i vazhdueshëm në secilën pikë x të intervalit.

Shembull funksioni të vazhdueshëm

Shembull

Tregoni se polinomi $p(x) = 2x^3 - 3x + 1$ është i vazhdueshëm në pikën $x = 1$.

Zgjidhje.

Vlera $p(1)$ështe e përkufizuar: $p(1) = 0$. Gjithashtu,

$$\lim_{x \to 1} p(x) = \lim_{x \to 1} (2x^3 - 3x + 1) = 0;$$

pra,

$$\lim_{x \to 1} p(x) = p(1),$$

që d.m.th. se p(x) është i vazhdueshëm në $x = 1$. □

Udhëzime për lexim të mëtejmë

- http://fberisha.netfirms.com
- Detyrë shtëpie: Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks,* fq. 143–152.
- L. D. Hofmann, G. L. Bradley, *Calculus – for business, economics and life sciences,* fq. 61–74.

Përfundim

- Kuptimi i konceptit të limitit të një funksioni.
- Rregullat algjebrike për veprime me limite funksionesh.
- Vazhdueshmëria e funksioneve