Elemente të analizës margjinale: Përafrimi me shtesa

F. M. Berisha

UNIVERSITETI I EJL
ЈИЕ УНИВЕРЗИТЕТ
SEE UNIVERSITY

Universiteti i Evropës Juglindore, Tetovë

Qëllimet dhe objektivat

- Nocionet e kostos margjinale, të ardhurave margjinale dhe profitit margjinal
- Zbatimi i analizës margjinale për të përafruar vlerën shtesë të një funksioni biznesi për një njësi shtesë të prodhimit
- Nocionet e kostos mesatare për njësi prodhimi dhe kostos mesatare margjinale
- Zbatimi i përafrimit me shtesa në aplikacione biznesi.

Përmbajtja

Elemente të analizës margjinale

- Kostoja e prodhimit të njësisë së $(x_0 + 1)$-të të një malli:

$$C(x_0 + 1) - C(x_0)$$

- *Kostoja margjinale $MC(x)$:* derivati i kostos $C(x)$:

$$\mathrm{MC}(x) = C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$$

- Për vlera „të vogla" të h:

$$\mathrm{MC}(x_0) \approx \frac{C(x_0 + h) - C(x_0)}{h}$$

- Për $h = 1$ mund të bëhet përafrimi:

$$\boxed{\mathrm{MC}(x_0) \approx C(x_0 + 1) - C(x_0)}$$

Përafrimi i $C(x_0+1) - C(x_0)$ me anë të $\mathrm{MC}(x_0)$

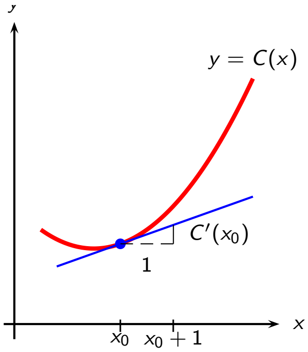

Figura: Kostoja margjinale $\mathrm{MC}(x_0)$ për $x = x_0$ është $C'(x_0)$

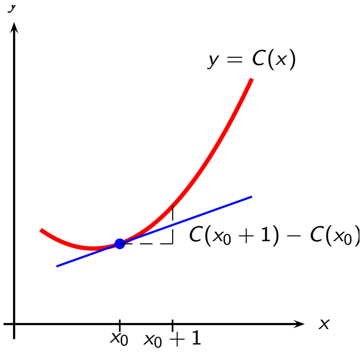

Figura: Kostoja e prodhimit të njësisë së (x_0+1)-të është $C(x_0+1) - C(x_0)$

Funksionet margjinale

Kostoja margjinale, të ardhurat margjinale dhe profiti margjinal

Në qoftë se $C(x)$ është kostoja totale e prodhimit të x njësish të një malli, $R(x) = px$ janë të ardhurat totale nga shitja e sasisë me çmim p, $P(x) = R(x) - C(x)$ është profiti nga prodhimi dhe shitja e sasisë,

- *funksioni i kostos margjinale* është

$$\mathrm{MC}(x) = C'(x)$$

- *funksioni i të ardhurave margjinale* është

$$\mathrm{MR}(x) = R'(x)$$

- *funksioni i profitit margjinal* është

$$\mathrm{MP}(x) = P'(x).$$

Shembull zbatimi të analizës margjinale

Shembull

Një prodhues vlerëson se kur prodhohen x njësi të një malli kostoja totale do të jetë $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x + 27$ euro dhe se e tërë sasia do të shitet kur çmimi është $p(x) = 22 - \frac{1}{4}x$ euro.

1. Shfrytëzoni funksionin e kostos margjinale për të vlerësuar koston e prodhimit të njësisë së katërtë. Sa është kostoja e saktë e prodhimit të njësisë së katërtë?
2. Shfrytëzoni funksionin margjinal të të ardhurave për të vlerësuar të ardhurat nga shitja e njësisë së katërtë.
3. Paraqitni grafikisht funksionin e profitit dhe përcaktoni nivelin e prodhimit për të cilin profiti është maksimal. Sa është profiti margjinal në këtë nivel optimal prodhimi?

Shembull zbatimi të analizës margjinale. (Vazhdim)

Zgjidhje...

1. Funksioni i kostos margjinale:

$$MC(x) = C'(x) = \frac{2}{5}x + 4$$

Kostoja shtesë për njësinë e katërtë, përafërsisht:

$$C(4) - C(3) \approx MC(3) = \frac{2}{5} \cdot 3 + 4 = \frac{26}{5} = 5.2 \quad \text{euro}$$

Kostoja e saktë e njësisë së katërtë:

$$C(4) - C(3) = \left(\frac{1}{5} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 27\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 27\right) = \frac{27}{5} = 5.4$$

□

Shembull zbatimi të analizës margjinale. (Vazhdim)

... Zgjidhje...

2. Funksioni i të ardhurave totale:

$$R(x) = p(x)x = \left(22 - \frac{1}{4}x\right)x = -\frac{1}{4}x^2 + 22x$$

Funksioni i të ardhurave margjinale:

$$\mathrm{MR}(x) = R'(x) = -\frac{1}{2}x + 22$$

Të ardhurat nga shitja e njësisë së katërtë, përafërsisht:

$$R(4) - R(3) \approx \mathrm{MR}(3) = -\frac{1}{2}\cdot 3 + 22 = \frac{41}{2} = 20.5.$$

□

Shembull zbatimi të analizës margjinale. (Vazhdim)

...Zgjidhje...

3. Funksioni i profitit:

$$P(x) = R(x) - C(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + 22x\right) - \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x + 27\right)$$
$$= -\frac{9}{20}x^2 + 18x - 27.$$

Grafiku është parabolë e hapur nga poshtë me pikën më të lartë (kulmim) nga sipër:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{2(-\frac{9}{20})} = 20$$

□

Shembull zbatimi të analizës margjinale. (Vazhdim)

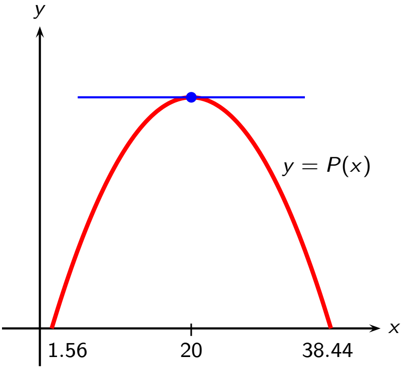

Figura: Grafiku i funksionit të profitit $P(x) = -\frac{9}{20}x^2 + 18x - 27$.

Shembull zbatimi të analizës margjinale. (Vazhdim)

. . . Zgjidhje.

Funksioni i profitit margjinal:

$$\mathrm{MP}(x) = P'(x) = -\frac{9}{10}x + 18$$

Në nivelin optimal të prodhimit $x = 20$ profiti margjinal është

$$\mathrm{MP}(20) = -\frac{9}{10} \cdot 20 + 18 = 0.$$

□

Kostoja mesatare për njësi dhe funksioni i saj margjinal

Kostoja mesatare dhe kostoja mesatare margjinale

Në qoftë se $C(x)$ është kostoja totale e prodhimit të x njësish të një malli të caktuar,

- *funksion i kostos mesatare* është

$$\mathrm{AC}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

- *funksion i kostos mesatare margjinale* është

$$\mathrm{MAC}(x) = (\mathrm{AC})'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{C(x)}{x}\right].$$

Një aplikacion biznesi

Shembull

Le të jetë $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x + 27$ funksioni i kostos totale për mallin në shembullin i mëparmë.

1. Gjeni koston mesatare dhe koston mesatare margjinale për mallin.
2. Për çfarë niveli të prodhimit kostoja mesatare margjinale është e barabartë me 0?
3. Për çfarë niveli të prodhimit kostoja margjinale është e barabartë me koston mesatare?

Një aplikacion biznesi. (Vazhdim)

Zgjidhje. . .

1. Kostoja mesatare:

$$\mathrm{AC}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{1}{5}x^2 + 4x + 27}{x} = \frac{1}{5}x + 4 + \frac{27}{x}$$

Kostoja mesatare margjinale:

$$\mathrm{MAC}(x) = (\mathrm{AC})'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x + 4 + \frac{27}{x}\right) = \frac{1}{5} - \frac{27}{x^2}.$$

□

Një aplikacion biznesi. (Vazhdim)

. . . Zgjidhje. . .

2. Kostoja mesatare margjinale është 0 kur

$$\begin{aligned} \mathrm{MAC}(x) &= 0 \\ \frac{1}{5} - \frac{27}{x^2} &= 0 \\ x^2 &= 27 \cdot 5 \\ x^2 &= 135 \\ x &= \pm\sqrt{135}. \end{aligned}$$

Meqë sasia e prodhimit x nuk mund të jetë negative,

$$x = \sqrt{135} \approx 11.62.$$

□

Një aplikacion biznesi. (Vazhdim)

. . . Zgjidhje.

3. Kostoja margjinale $MC(x) = \frac{2}{5}x + 4$,
është e barabartë me koston mesatare kur

$$\begin{aligned} MC(x) &= AC(x) \\ \frac{2}{5}x + 4 &= \frac{1}{5}x + 4 + \frac{27}{x} \\ \frac{1}{5}x &= \frac{27}{x} \\ x^2 &= 27 \cdot 5 \\ x &= \sqrt{135} \\ x &\approx 11.62. \end{aligned}$$

□

Përafrimi i shtesës së një funksioni

- Derivati i një funksioni f në x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Për vlera të vogla të h:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Vlera e përafërt e shtesës („ngritjes“) së funksionit:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h$$

- Vlera e përafërt e funksionit:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$$

Përafrimi me shtesa

Përafrimi me shtesa

Në qoftë se $y = f(x)$ është i derivueshëm në $x = x_0$
dhe $h = \Delta x$ është një ndryshim i vogël në x,
atëherë

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

ose, duke vënë $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Zbatimi i përafrimit me shtesa në një aplikacion

Shembull

Supozojmë se kostoja totale e prodhimit të q njësish të një malli është $C(q) = \frac{7}{2}q^2 + 16q + 37$ euro.
Në qoftë se niveli i tanishëm i prodhimit është 30 njësi, vlerësoni se si do të ndryshojë kostoja totale në qoftë se prodhohen 30.5 njësi.

Zbatimi i përafrimit me shtesa. (Vazhdim)

Zgjidhje...

Niveli i tanishëm i prodhimit është $q_0 = 30$,
ndryshimi në prodhim është $\Delta q = 0.5$.
Sipas formulës përafruese, ndryshimi përkatës në kosto:

$$\Delta C = C(30.5) - C(30) \approx C'(30)\Delta q = C'(30) \cdot 0.5.$$

Meqë

$$C'(q) = 7q + 16,$$

kemi

$$\Delta C \approx C'(30) \cdot 0.5 = (7 \cdot 30 + 16) \cdot 0.5 = 113.$$

□

Udhëzime për lexim të mëtejmë

- `http://fberisha.netfirms.com`
- Detyrë shtëpie: Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks,* fq. 178–188.
- L. D. Hofmann, G. L. Bradley, *Calculus – for business, economics and life sciences,* fq. 133–148.

Përfundim

- Funksionet margjinale
  - Kostoja margjinale: $MC(x) = C'(x)$
  - Të ardhurat margjinale: $MR(x) = R'(x)$
  - Profiti margjinal: $MP(x) = P'(x)$
- Zbatime të analizës margjinale; p.sh.,

$$C(x_0 + 1) - C(x_0) \approx MC(x_0)$$

- Kostoja mesatare për njësi dhe kostoja mesatare margjinale
  - Kostoja mesatare: $AC(x) = \frac{C(x)}{x}$
  - Kostoja mesatare margjinale:
    $MAC(x) = (AC)'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{C(x)}{x}\right]$
- Zbatimi në aplikacione biznesi i përafrimit me shtesa:

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$