Konkaviteti

F. M. Berisha

UNIVERSITETI I EJL
ЈИЕ УНИВЕРЗИТЕТ
SEE UNIVERSITY

Universiteti i Evropës Juglindore, Tetovë

Qëllimet dhe objektivat

- Përshkrimi i rritjes dhe zvogëlimit të pjerrtësisë së një lakoreje me anë të nocioneve të konkavitetit
- Studimi, me anë të derivatit të dytë, i rritjes dhe zvogëlimit të pjerrtësisë së tangjentës të grafikut të një funksioni.
- Gjetja me anë të derivatit të dytë të një maksimumi relativ ose minimumi relativ të një funksioni

Përmbajtja

Rritja dhe zvogëlimi i pjerrtësisë së një lakoreje

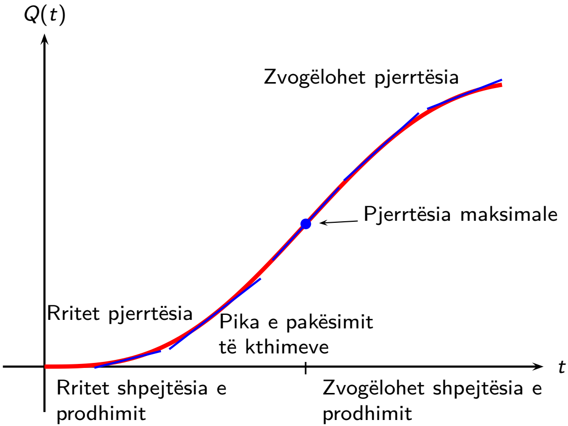

Figura: Rezultatet e punës të një punëtori uzine.

Konkaviteti

Konkaviteti

Në qoftë se një funksion $f(x)$ është i derivueshëm në një interval $a < x < b$, atëherë grafiku i funksionit është

- *konkav nga sipër* në këtë interval në qoftë se $f'(x)$ është rritës në intervalin;
- *konkav nga poshtë* në këtë interval në qoftë se $f'(x)$ është zvogëlues në intervalin.

Testi për konkavitet

Testi për konkavitet

- Në qoftë se $f''(x) > 0$ në një interval $a < x < b$, atëherë f është konkav nga sipër në këtë interval.
- Në qoftë se $f''(x) < 0$ në një interval $a < x < b$, atëherë f është konkav nga poshtë në këtë interval.

Rritja, zvogëlimi dhe konkaviteti

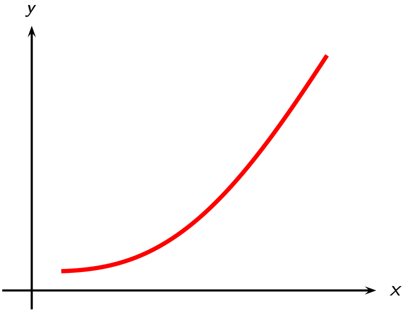

Figura: Ritës, konkav nga sipër: $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$.

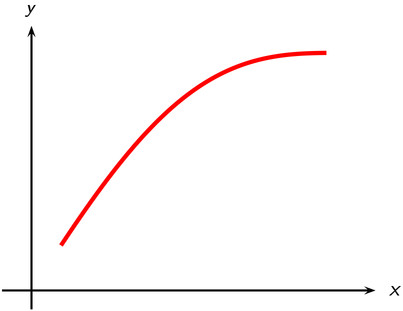

Figura: Ritës, konkav nga poshtë: $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$.

Rritja, zvogëlimi dhe konkaviteti. (Vazhdim)

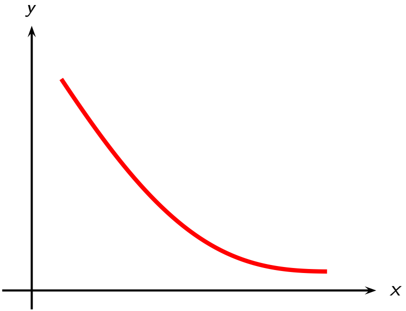

Figura: Zvogëlues, konkav nga sipër: $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$.

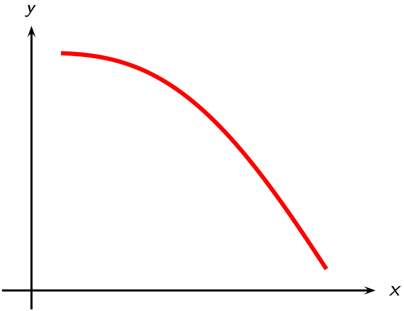

Figura: Zvogëlues, konkav nga poshtë: $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$.

Pikat e infleksionit

Pikë infleksioni

Një pikë në grafikun e një funksioni $f(x)$ ku ndryshon konkaviteti quhet *pikë infleksioni*.

Grafiku i prodhimit

- Në një pikë infleksioni $P(c, f(c))$ grafiku i $f(x)$ nuk mund të jetë as konkav nga sipër as konkav nga poshtë.
- Prandaj, $f''(c)$ nuk mund të jetë pozitiv ose negativ.
- Kështu, në qoftë se ekziston derivati i dytë $f''(c)$ në atë pikë, duhet të jetë $f''(c) = 0$.
- Mirëpo, vetëm nga fakti se $f''(c) = 0$ nuk mund të konkludojmë automatikisht se $(c, f(c))$ është pikë infleksioni.
- Për shembull, për $f(x) = x^4$ kemi $f''(x) = 12x^2$, kurse grafiku i f është gjithmonë konkav nga sipër edhepse $f''(0) = 0$.

Pikat e infleksionit. (Vazhdim)

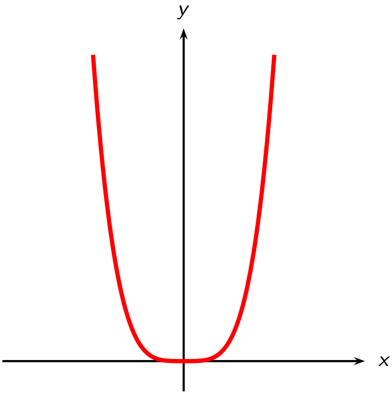

Figura: Grafiku i $f(x) = x^4$.

Testi me anë të derivatit të dytë

Testi i ekstremumeve relative me anë të derivatit të dytë

Supozojmë se $f'(c) = 0$.

- Në qoftë se $f''(c) < 0$, atëherë f ka maksimum relativ në $x = c$.
- Në qoftë se $f''(c) > 0$, atëherë f ka minimum relativ në $x = c$.
- Mirëpo, në rast se $f''(c) = 0$ (ose $f''(c)$ nuk ekziston), testi nuk mjafton dhe f mund të ketë maksimum relativ, minimum relativ ose të mos ketë fare ekstremume relative në $x = c$.

Testi me anë të derivatit të dytë. (Vazhdim)

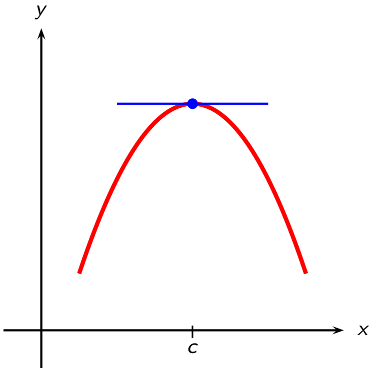

Figura: Maksimum relativ: $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0$.

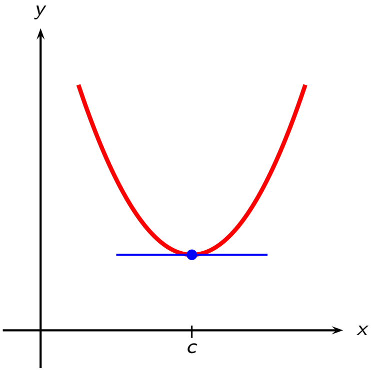

Figura: Minimum relativ: $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$.

Testi me anë të derivatit të dytë. (Vazhdim)

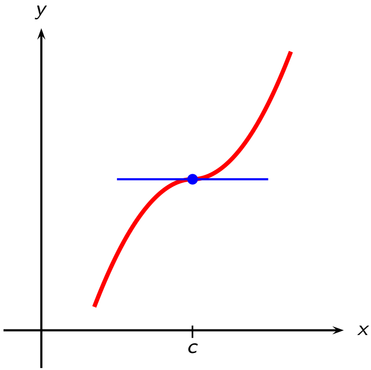

Figura: Nuk është ekstremum relativ: $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$.

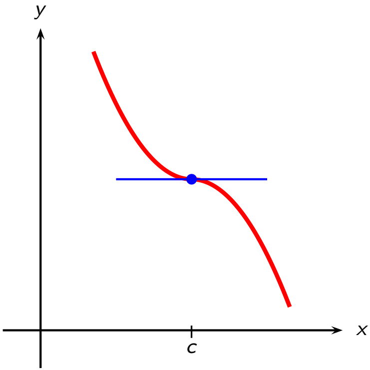

Figura: Nuk është ekstremum relativ: $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$.

Aplikacion: Efikasiteti i prodhimit

Shembull

Një studim efikasiteti të punëtorëve të ndërrimit të mëngjesit
në një uzinë tregon se një punëtor mesatar
i cili arrin në punë në orën 8:00 do të ketë montuar

$$Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$$

njësi t orë më pas.
Në ç'kohë arrin punëtori performansën më efikase
gjatë ndërrimit të mëngjesit?
(Supozoni se ndërrimi i mëngjesit zgjat nga 8:00 deri në 12:00.)

Aplikacion: Efikasiteti i prodhimit. (Vazhdim)

Zgjidhje...

Shpejtësia e prodhimit të punëtorit është derivati

$$Q'(t) = -3t^2 + 18t + 12.$$

Gjejmë shpejtësinë më të madhe $Q'(t)$ për $0 \leq t \leq 4$.

$$Q''(t) = -6t + 18$$

$Q''(t) = 0$ kur $t = 3$ $\square$

Aplikacion: Efikasiteti i prodhimit. (Vazhdim)

. . . Zgjidhje.

Pra, shpejtësia e prodhimit $Q'(t)$ rritet për $0 < t < 3$, zvogëlohet për $3 < t < 4$ dhe arrin vlerën maksimale kur $t = 3$; d.m.th., në orën 11:00. $\square$

- Gjeni maksimumin relativ të shpejtësisë së prodhimit $Q'(t)$ duket zbatuar testin me anë të derivatit të dytë.

Udhëzime për lexim të mëtejmë

- http://fberisha.netfirms.com
- Detyrë shtëpie: Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks,* fq. 213–224.
- L. D. Hofmann, G. L. Bradley, *Calculus – for business, economics and life sciences,* fq. 211–226.

Përfundim

- Nocionet e konkavitetit të grafikut të një funksioni
  - Konkav nga sipër
  - Konkav nga poshtë
- Testi për konkavitet të grafikut të një funksioni
  me anë të parashenjës së derivatit të dytë të funksionit
- Testi i ekstremumeve relative me anë të derivatit të dytë.