Kapitulli 1

Hyrje në matematikën financiare

Në afarizmin e biznesit, ndërmjet kreditorit (dhënësit të kredisë) dhe debitorit (marrësit të kredisë), ekzistojnë raporte kreditore. Interesi (kamata) është shuma të cilën debitori ia paguan kreditorit si kompenzim për shfrytëzimin e kredisë për një kohë të caktuar. Interesi kontraktohet ashtu që përcaktohet sa njësi monetare (për shembull, €) duhet paguar debitori kreditorit në çdo 100 nj.m. të shumës së huazuar gjatë kohës së shfrytëzimit të kredisë.

1.1 Njehsimi proporcional dhe përqindja

Përpjesë e dy numrave $a \neq 0$ dhe $b \neq 0$ quhet herësi i tyre $\frac{a}{b}$; p.sh., $\frac{10}{4}$, që është njësoj sikurse $\frac{5}{2}$.

Barazimi i dy përpjesave quhet *proporcion*:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Proporcioni $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ vlen atëherë dhe vetëm atëherë kur $ad = bc$.

Shembull 1. Zgjidhni ekuacionin

$$\frac{5}{x} = \frac{25}{12}.$$

Zgjidhje. Ky proporcion është ekuivalent me barazimin

$$25x = 5 \cdot 12$$

prej nga rrjedh

$$x = \frac{12}{5} = 2.4.$$

□

Në praktikë shpeshherë hasim në tregues siç janë: shtrenjtimi, rritja ose zvogëlimi i prodhimtarisë, rritja e të ardhurave personale, lartësia e marzhës tregtare etj., të cilat gadi çdo herë paraqiten në përqindje.

Madhësitë të cilat lidhen me njehsimin e përqindjes janë:

1. *Sasia kryesore* (*kapitali*) K është madhësia nga e cila duhet të llogaritet shuma e përqindjes.

2. *Përqindja* p e madhësisë së dhënë është e qindta pjesë e asaj madhësie.

3. *Shuma e përqindjes* (*interesi*) I është vlera e llogaritur e përqindjes nga sasia kryesore.

Simbolikisht, përqindjen p e shënojmë me $p\%$. Relacioni ndërmjet këtyre madhësive paraqitet me anë të proporcionit

$$\boxed{\frac{K}{I}=\frac{100}{p},}$$

d.m.th.,

$$I=\frac{K\cdot p}{100}. \tag{1}$$

Shembull 2. Çmimi i një prodhimi është 380 € dhe përqindja e zbritjes $p = 5\%$. Sa është interesi I dhe çmimi i ri?

Zgjidhje. Kemi

$$I=\frac{K\cdot p}{100}=\frac{380\cdot 5}{100}=19.$$

Pra, çmimi i ri do të jetë $380-19=361$ euro □

Shembull 3. Nga panxharsheqeri fitohet 18% sheqer. Sa kilogram panxharsheqer nevojiten për 13113 kg sheqer?

Zgjidhje. Këtu është $p = 18$, $I = 13113$, ndërsa kërkohet vlera e K. Nga formula (1) kemi

$$K=\frac{I\cdot 100}{p}=\frac{13113\cdot 100}{18}=72850.$$

□

Në qoftë se sasinë e caktuar duhet ndarë në më tepër përpjesë të caktuara, atëherë shfrytëzohet njehsimi i ndarjes.

Shënojmë me K sasinë e cila duhet të ndahet në n pjesë me përpjesë $r_1 : r_2 : \cdots : r_n$. Me k_1, k_2, ..., k_n shënojmë me rradhë pjesët e sasisë K të cilat u përgjigjen numrave r_1, r_2, ..., r_n. Ndërmjet këtyre pjesëve dhe numrave të përpjesës të dhënë ekziston *proporcion i drejtë*, d.m.th.:

$$k_1 = Ar_1, \quad k_2 = Ar_2, \quad ..., \quad k_n = Ar_n,$$

ku numri A është koeficient i proporcionalitetit.

Meqë $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = K$, atëherë $A(r_1 + r_2 + \cdots + r_n) = K$, prej nga fitohet vlera e koeficientit:

$$A = \frac{K}{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}.$$

Duke zëvendësuar vlerën e fituar të A në $k_1 = Ar_1$, $k_2 = Ar_2$, ..., $k_n = Ar_n$ fitohen vlerat e kërkuara k_1, k_2, ..., k_n.

Shembull 4. Me misër, lulediell dhe patate duhet mbjellur 189 hektar ashtu që pjesët e mbjellura me ato kultura të jenë në përpjesë sikurse 11 : 2 : 5. Sa hektarë do të mbillen me secilën nga kulturat?

Zgjidhje. Madhësinë $K = 189$ do ta ndajmë në $k_1 = A \cdot 11$ (misër), $k_2 = A \cdot 2$ (lulediell), $k_3 = A \cdot 5$ (patate). Kështu $k_1 + k_2 + k_3 = 11A + 2A + 5A$. Meqë $k_1 + k_2 + k_3 = K = 189$, kemi $189 = 18A$, d.m.th.,

$$A = \frac{189}{18} = 10.5.$$

Prandaj:

$$\begin{aligned} k_1 &= 10.5 \cdot 11 = 115.5, \\ k_2 &= 10.5 \cdot 2 = 21, \\ k_3 &= 10.5 \cdot 5 = 52.5. \end{aligned}$$

□

Detyra për ushtrime

1. Buka e thekrës përmban 42% ujë. Sa ka ujë në 2.5 kg bukë thekre?

2. Qarkullimi i planifikuar mujor i një shitoreje tregtare është 84000 €. Plani është plotësuar 12.5%. Sa euro janë realizuar?

3. Kasa-skonto 2.25% në një mall është 72 €. Nga cila shumë është llogaritur?

4. Eksporti i një malli është rritur nga 648000 t gjatë vitit të kaluar në 793800 t gjatë këtij viti. Sa është rritja në përqindje?

5. Të caktohet çmimi i një prodhimi i cili pas shtrenjtimit për 12% rritet për 27 €.

6. Sa kilometra rrugë do të kalojë automjeti i cili i cili ka në rezervoar 17.5 l benzinë në qoftë se shpenzon 6.6 l në 100 km.

7. Çmimi i një artikulli pas shtrenjtimit për 8% është 135 €. Sa ka qenë çmimi para shtrenjtimit dhe sa është interesi I?

8. Një mall pas lirimit për 10% shitet me çmim 234 €.

   (a) Për sa është zbritur çmimi?

   (b) Sa ishte çmimi i shitjes para lirimit?

   (c) Sa do të ishte çmimi i shitjes sikur lirimi të ishte 22%?

9. Një prodhim është shitur së bashku me 18% marzhë nga 10.03 €, ndërsa i njëjti prodhim tani shitet për 7.48 €. A fitohet apo humbet tani në të, dhe për sa përqind?

10. Në qoftë se një prodhim shitet për 2442 €, atëherë humbja do të jetë 7.5%. Sa do të shitej prodhimi sikur të fitohej 12.5%?

11. Çmimi i stofit për fustan është zbritur 8%, e pastaj edhe 12% nga çmimi i ri. Pas zbritjes së dytë, 1 m shitet për 20.24 €. Llogaritni çmimi para zbritjes së dytë dhe para zbritjes së parë.

1.2 Njehsimi i interesit të thjeshtë

Në qoftë se interesi llogaritet për çdo periudhë të caktuar (në vit, muaj ose ditë) në kapitalin fillestar të huazuar, atëherë quhet *interes i thjeshtë*.

Në praktikë, interesi zakonisht është i thjeshtë në qoftë se i paguhet kreditorit pas çdo periudhe të llogaritjes.

Në qoftë se llogaritet interesi I në kapitalin K me përqindje të interesit $p\%$, atëherë vlen proporcioni

$$\boxed{\frac{K}{I} = \frac{100}{p}.}$$

Shënojmë me n kohën e shfrytëzimit të kapitalit (e shprehur në vjet, muaj ose ditë).

Në qoftë se llogaritet interesi I në kapitalin K për n vite me përqindje vjetore të interesit $p\%$, atëherë vlen proporcioni

$$\boxed{\frac{K}{I} = \frac{100}{pn}.}$$

Në qoftë se llogaritet interesi I në kapitalin K për m muaj me përqindje vjetore të interesit $p\%$, atëherë vlen proporcioni

$$\frac{K}{I} = \frac{100}{p\frac{m}{12}},$$

d.m.th.,

$$\boxed{\frac{K}{I} = \frac{1200}{pm}.}$$

Në qoftë se llogaritet interesi I në kapitalin K për d ditë me përqindje vjetore të interesit $p\%$, atëherë vlen proporcioni

$$\frac{K}{I} = \frac{100}{p\frac{d}{360}},$$

d.m.th.,

$$\boxed{\frac{K}{I} = \frac{36000}{pd}.}$$

Shembull 1. Sa interes sjellin 750 € me $5\frac{1}{3}\%$ kamatë vjetore për 3 vjet?

Zgjidhje. Sipas proporcionit

$$\frac{K}{I} = \frac{100}{p \cdot n},$$

kemi

$$I = \frac{pK}{100} \cdot n.$$

Meqë $p = 5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$, kemi

$$I = \frac{\frac{16}{3} \cdot 750}{100} \cdot 3 = 120.$$

□

Shembull 2. Cili kapital do të sjellë për 9 muaj me kamatë vjetore 7% interes 15750 €?

Zgjidhje. Sipas proporcionit

$$\frac{K}{I} = \frac{100}{p\frac{m}{12}},$$

kemi

$$K = \frac{100I}{p}\frac{12}{m},$$

d.m.th.,

$$K = \frac{100 \cdot 15750}{7}\frac{12}{9} = 300000.$$

□

Shembull 3. Në qoftë se më 24 prill deponohen në bankë 6000 € me kamatë vjetore 7%, atëherë sa kamatë do të fitohet deri më 29 tetor të po këtij viti?

Zgjidhje. Duke llogaritur se çdo muaj i ka, mesatarisht, nga 30 ditë, atëherë numri i ditëve për këtë periudhë do të jetë $d = 185$. Sipas proporcionit

$$\frac{K}{I} = \frac{100}{p\frac{d}{360}},$$

kemi

$$I = \frac{pK}{100}\frac{d}{360},$$

ose

$$I = \frac{7 \cdot 6000}{100}\frac{185}{360} \approx 215.83.$$

□

Shembull 4. Me çfarë përqindje vjetore të interesit, 7125 € sjellin për 96 ditë interes 152 €?

Zgjidhje. Sipas proporcionit

$$\frac{K}{I} = \frac{100}{p\frac{d}{360}},$$

kemi

$$p = \frac{100I}{K}\frac{360}{d},$$

d.m.th.,

$$p = \frac{100 \cdot 152}{7125}\frac{360}{96} = 8.$$

Pra, përqindja vjetore e interesit duhet të jetë 8%. □

Detyra për ushtrime

1. Sa interes do të paguhet për 7 muaj me 5% kamatë vjetore për kredinë në vlerë 25000 €?
2. Për sa vjet kapitali prej 16800 € me 7% interes vjetor të thjeshtë do të sjellë 2352 €?
3. Cili kapital për 3 muaj e 15 ditë me 6% kamatë vjetore do të sjellë 200 € në emër interesi?
4. Personi ka marrë kredi më 12 maj 10000 € me kamatë vjetore 9%. Sa do të paguajë në qoftë se kredinë e kthen më
   (a) 18 korrik;
   (b) 20 shtator?
5. Më 27 gusht është marrë hua një shumë të hollash me 6% kamatë dhe është kthyer më 1 dhjetor, së bashku me interesin, gjithsej 5334 €. Sa është paguar në emër të interesit dhe cila shumë është huazuar?
6. Cili kapital sjell në vit me 6% kamatë të njëjtin interes sikurse 32000 € me 4%?
7. Cili kapital sjell për n vite me 9% kamatë të njëjtin interes (të thjeshtë) sikurse 18000 € për të njëjtën kohë me 6%?
8. Një person deponoi gjysmën e kapitalit të vetë me 3.5% kamatë, 10000 € me 5%, kurse mbetjen me 4%. Gjithsej për një vit merr 3100 € interes. Sa është kapitali?

1.3 Njehsimi dekursiv i interesit

Në qoftë se interesi llogaritet pas n periudhash përllogaritëse, atëherë zakonisht zbatohet llogritja e „interesit në interes“, ose, siç thuhet, *interesit dekursiv* (*të përbërë*).

Deponohet kapitali fillestar K me përqindje kamatore $p\%$. Në fund të vitit të parë (ose në fund të periudhës së parë përllogaritëse – në qoftë se periudha nuk është njëvjeçare)[1] kapitali i deponuar sjell interesin $\frac{Kp}{100}$, d.m.th. vlera e re e kapitalit (ose, siç thuhet, vlera e kapitalit pas *kapitalizimit* të parë) do të jetë

$$K_1 = K + \frac{Kp}{100} = K\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Kështu, gjatë vitit të dytë kapitali K_1 do të sjellë interesin $\frac{K_1 p}{100}$, d.m.th. në fund të vitit të dytë vlera e kapitalit do të jetë

$$K_2 = K_1 + \frac{K_1 p}{100} = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Në mënyrë analoge, në fund të vitit të tretë:

$$K_3 = K_2 + \frac{K_2 p}{100} = K_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3,$$

ndërsa në fund të vitit të n-të do të jetë

$$K_n = K_{n-1} + \frac{K_{n-1} p}{100} = K_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Në këtë mënyrë,

$$\boxed{K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,} \qquad (1)$$

që paraqet formulën për njehsimin e interesit dekursiv.

Faktori i interesit. Vlera

$$r = 1 + \frac{p}{100}.$$

quhet *faktor i interesit dekursiv.*

[1] Në qoftë se dëshirohet në mënyrë eksplicite të theksohet se fjala është për interes dekursiv me përqindje vjetore, përdoret shkurtesa $p\%$ (p.a.d).

Në qoftë se kapitalizimi kryhet m herë gjatë një viti, atëherë numri i periudhave përllogaritëse do të jetë mn, kurse përqindja kamatore për një periudhë $\frac{p}{m}$. Në këtë rast vlera e kapitali pas kapitalizimit të fundit do të jetë

$$\boxed{K_{mn} = K\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn}.} \tag{2}$$

Vëni re se në këtë rast faktori i interesit dekursiv është

$$\boxed{r = 1 + \frac{p}{100m}.}$$

Shembull 1. Në qoftë se në fillim të vitit 1994 janë deponuar në bankë 10000 € me përqindje 8% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, çfarë do të jetë vlera e kapitalit në fillim të vitit 2015?

Zgjidhje. Meqë $K = 10000$, $p = 8$, $n = 2015 - 1994 = 21$, kemi

$$K_{21} = 10000\left(1 + \frac{8}{100}\right)^{21} \approx 50338.34.$$

□

Shembull 2. Çfarë kapitali fillestar duhet deponuar në bankë me interes vjetor 5% (p.a.d) ashtu që pas 5 vjetësh të disponohet me 1000 €?

Zgjidhje. Meqë $p = 5$, $K_5 = 1000$ dhe $n = 5$, kurse nga formula (1) fitojmë

$$K = K_n\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n},$$

do të kemi

$$K = 1000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{-5} = \frac{1000}{1.05^5} \approx 783.53.$$

□

Shembull 3. Çfarë përqindje vjetore interesi dekursiv ka paguar banka në qoftë se pas 8 vjetësh nga deponimi i 1000 € është fituar interes prej 400 €?

Zgjidhje. Nga formula (1) kemi

$$p = 100\left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K}} - 1\right),$$

kurse

$$K_n = K + I = 1000 + 400 = 1400,$$

prandaj

$$p = 100\left(\sqrt[8]{\frac{1400}{1000}} - 1\right) = 100\left(\sqrt[8]{1.4} - 1\right) \approx 4.3.$$

□

Shembull 4. Për cilën kohë shuma prej 50000 € do të rritet për 25000 € në qoftë se kapitalizimi është semestral me 6% (p.a.d)?

Zgjidhje. Kemi $K = 50000$, $p = 6$, $m = 2$,

$$K_{2n} = K + I = 50000 + 25000 = 75000.$$

Nga formula (2) fitojmë

$$75000 = 50000\left(1 + \frac{6}{100 \cdot 2}\right)^{2n},$$

ose

$$75000 = 50000 \cdot 1.03^{2n},$$

prej nga

$$1.03^{2n} = 1.5.$$

Duke logaritmuar anë për anë barazimin e fundit gjejmë

$$2n \log 1.03 = \log 1.5,$$

d.m.th.

$$n = \frac{\log 1.5}{2 \log 1.03} \approx 6.86.$$

Pra, interesi i dhënë do të arrihet (dhe tejkalohet) në fund të vitit të shtatë.

□

Detyra për ushtrime

1. Në çfarë shume do të shtohen 12000 € pas 5 vjetësh me 8% (p.a.d) dhe kapitalizim
   (a) vjetor;
   (b) semestral (2 herë në vit);
   (c) tremujor;

(d) mujor?

2. Për sa do të rriten 3800 € për 3 vjet me 6% (p.a.d) dhe kapitalizim
   (a) vjetor;
   (b) semestral;
   (c) tremujor;
   (d) mujor?

3. Sa duhet depozituar në bankë sot ashtu që pas 4 vjetësh dë disponohet me 6800 € në qoftë se banka llogarit interes me 6% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor?

4. Cila shumë është deponuar para 4 vjetësh me 8% (p.a.d) dhe kapitalizim semestral në qoftë se është rritur në 1000 €?

5. Në bankë janë deponuar 5000 € me 6% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor. Pas 4 vjetësh deponuesi tërheq 2000 € kurse pas 3 vjetësh vijuese tërheq edhe 3000 €. Sa është shuma e mbetur në bankë pas 9 vjetësh nga dita e deponimit?

6. Për blerje të një objekti bleresi i parë ofron 45000 € të gatshme, kurse i dyti 20000 € të gatshme, 20000 € pas 4 vjetësh dhe 20000 € pas 10 vjetësh. Cila ofertë është më e volitshme për shitësin në qoftë se për pagesat e mëvonshme njehson interesin me 6% (p.a.d) dhe kapitalizim gjashtëmujor?

7. Debitori duhet të paguajë 17400 € pas 4 vjetësh dhe 23500 € pas 7 vjetësh, kurse tërë kredia mund të paguhet sot me me 6% (p.a.d) dhe kapitalizim semestral. Sa është shuma që do të paguhej sot?

8. Pas sa vitesh shuma e deponuar prej K eurosh do të dyfishohet në qoftë se përqindja kamatore është 10% (p.a.d), kurse kapitalizimi vjetor?

9. Një person deponon në bankë 2000 € me përqindje interesi 3% (p.a.d), kurse një person tjetër deponon 2500 € me 2% (p.a.d). Pas sa kohe dy personat do të disponojnë me shumë të njëjtë? Kapitalizimi është vjetor

1.4 Kapitalizimi i vazhdueshëm

Praktika e interesit të përbërë me kapitalizim të vazhdueshëm mund të shkaktojë huti. Konceptualisht, është e mundur të mendohet mbi kapitalizim ditor, d.m.th., çdo ditë, dhe më tej: çdo orë, çdo minut, çdo sekond, dhe kështu në mënyrë të vazhdueshme. Sidoqoftë me rritjen e numrit të kapitalizimeve, efekti i përgjithshëm i një kapitalizimi bëhet më i papërfillshëm. Për këtë arsye kapitalizimi i vazhdueshëm përdoret kryesisht në aplikime më të avansuara, ku ndryshime ndodhin me frekuencë të lartë. Disa nga këto aplikime mund të gjenden në fushën e makroekonomisë, kur diskutohet mbi inflacionin dhe financat.

Për të nxjerrur formulën për njehsimin e interesit të përbërë me kapitalizim të vazhdueshëm, rikujtojmë së pari formulën e njehsimit të interesit të përbërë me përqindje vjetore dhe disa kapitalizime brenda viti:

$$K_{mn} = K\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn},$$

ku K është vlera e kapitalit fillestar, p – përqindja vjetore e interesit, n – numri i viteve, m – numri i kapitalizimeve brenda një viti, K_{mn} – vlera pas n vitesh, d.m.th. pas mn kapitalizimesh.

Në qoftë se kapitalizimi kryhet në mënyrë të vazhdueshme (d.m.th. pandërprerë), atëherë $m \to \infty$, pra

$$\begin{aligned}
K_{\infty n} &= \lim_{m\to\infty} K\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn} = K \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn} \\
&= K \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{100m}{p}}\right)^{mn} = K \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{100m}{p}}\right)^{\frac{100m}{p}\cdot n\frac{p}{100}} \\
&= K\left(\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{100m}{p}}\right)^{\frac{100m}{p}}\right)^{n\frac{p}{100}}.
\end{aligned}$$

Vëjmë $\frac{100m}{p} = x$; atëherë

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{100m}{p}}\right)^{\frac{100m}{p}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Meqë $m \to \infty$, atëherë edhe $x \to \infty$. Gjithashtu, dihet se

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e,$$

ku e është baza e logaritmit natyror: $e \approx 2.71828$. Rrjedhimisht,

$$\boxed{K_{\infty n} = Ke^{n\frac{p}{100}},} \tag{1}$$

Shembull 1. Të llogaritet gjendja përfundimtare pas 3 vjetësh për kapitalin fillestar 100,000 € të deponuar me interes të përbërë me 6% (p.a.d) dhe kapitalizim të vazhdueshëm.

Zgjidhje. Janë dhënë $K = 100,000$, $p = 6$, $n = 3$. Sipas formulës (1) kemi

$$K_{\infty 3} = 100000e^{3\frac{6}{100}} = 100000e^{3 \cdot 0.06} = 100000e^{0.18} \approx 119721.74.$$

□

Shembull 2. Z.-sha Tringa është gadi për t'i regjistruar studimet e Administrimit të biznesit. Pasi që të diplomojë pas 4 vjetësh, ajo dëshiron të bëjë një udhëtim për në SHBA për të cilin vlerëson se do t'i kushtojë 5000 €. Sa duhet të investojë sot me 7% (p.a.d) për të pasur mjaft për udhëtimin në qoftë se kapitalizimi është i vazhdueshëm.

Zgjidhje. Sipas formulës (1) fitojmë

$$K = K_{\infty n}e^{-n\frac{p}{100}}.$$

Meqë në shembullin tonë është $n = 4$, $p = 7$, $K_{\infty 4} = 5000$, kemi

$$K = 5000e^{-4\frac{7}{100}} = 5000e^{-0.28} \approx 3778.92.$$

□

Shembull 3. Për sa kohë do të dyfishohet shuma e investuar me interes vjetor 8% (p.a.d) dhe kapitalizim të vazhdueshëm?

Zgjidhje. Kemi $p = 8$. Le të jetë K shuma fillestare e investuar; atëherë, sipas kushtit të detyrës:

$$K_{\infty n} = 2K.$$

Duke zbatuar formulën (1) fitojmë

$$Ke^{n\frac{p}{100}} = 2K,$$

d.m.th.,

$$e^{n\frac{p}{100}} = 2,$$

ose

$$e^{0.08n} = 2.$$

Logaritmojmë anë për anë ekuacionin e fundit, pastaj e zgjidhim sipas n:

$$0.08n = \ln 2$$
$$n = \frac{\ln 2}{0.08} \approx 8.66.$$

□

Detyra për ushtrime

1. Le të jenë investuar 1000 € me përqindje vjetore interesi 6% (p.a.d). Njehsoni balansin pas 10 vitesh në qoftë se kapitalizimi është
   (a) periodik (katërmujor);
   (b) mujor;
   (c) ditor (sypozoni se viti ka 365 ditë);
   (d) i vazhdueshëm.
2. Le të jenë investuar 5000 € me përqindje vjetore interesi 10% (p.a.d). Njehsoni balansin pas 10 vitesh në qoftë se kapitalizimi është
   (a) vjetor;
   (b) gjysmëvjetor;
   (c) ditor (sypozoni se viti ka 365 ditë);
   (d) i vazhdueshëm.
3. Çfarë shume të hollash duhet investuar sot me 7% (p.a.d). dhe kapitalizim të vazhdueshëm ashtu që pas 20 vjetësh vlera e saj të jetë 20000 €?
4. Sa është vlera sot e 10000 € pas një periudhe kohore 5 vjeçare në qoftë se interesi njehsohet në mënyrë të vazhdueshme me përqindje vjetore 7% (p.a.d)? Sa është vlera sot e 20000 € nën kushtet e njëjta?
5. Një shumë të hollash është investuar me një përqindje të caktuar interesi dhe kapitalizim të vazhdueshëm. Pas 10 vitesh shuma është dyfishuar. Si do të jetë balansi pas 20 vitesh krahasuar me investimin fillestar?
6. Më 1626 Peter Minuit i shiti imtësira në vlerë $24 një fisi amerikanësh autoktonë për tokë në ishullin Manhattan Island. Supozohet se në vitin 1990 e njëjta tokë kishte vlerën $25.2 miliard. Në qoftë se shitësit në

këtë transakcion do të kishin investuar \$24 e tyre me interes 7% (p.a.d) dhe kapitalizim të vazhdueshëm gjatë tërë periudhës 364 vjeçare, kush do të kishte përfituar më tepër nga kjo tregti? Për sa?

7. Kur një bankë ofron interes me një përqindje vjetore p dhe kapitalizim më tepër se një herë në vit, totali i interesit të fituar gjatë vitit është më i madh se $p\%$ i balansit në fillim të vitit. Përqindja aktuale për të cilën balansi rritet gjatë një viti quhet *përqindje efektive e interesit*, kurse përqindja e publikuar p quhet *përqindje nominale e interesit*. Me fjalë tjera përqindja efektive e interesit është përqindja **e thjeshtë** e cila është ekuivalente me përqindjen dekursive nominale të interesit.

   (a) Në qoftë se kapitalizimi llogaritet m herë për vit, vërtetoni se përqindja efektive e interesit është $100\left(\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m-1\right)$.

   (b) Në qoftë se kapitalizimi është i vazhdueshëm, vërtetoni se përqindja efektive e interesit është $100\left(e^{\frac{p}{100}}-1\right)$.

8. Në qoftë se një bankë ofron interes me përqindje nominale 6% (p.a.d), sa është më e madhe përqindja efektive në qoftë se kapitalizimi është i vazhdueshëm sesa në qoftë se kapitalizimi është periodik?

9. Cili investim ka përqindje më të madhe efektive: 8.2% (p.a.d) me kapitalizim katërmujor, ose 8.1% (p.a.d) me kapitalizim të vazhdueshëm,

10. Vërtetoni se për një përqindje nominale interesi të dhënë përqindja më e madhe aktuale e interesit arrihet në qoftë se kapitalizimi është i vazhdueshëm. Me fjalë tjera, nga të gjitha mënyrat e kapitalizimit, fitimi më i madh arrihet në qoftë se investimi është me kapitalizim të vazhdueshëm.

11. Për sa kohë do të dyfishohet shuma e investuar me përqindje interesi vjetor 6% (p.a.d) dhe kapitalizim të vazhdueshëm?

12. Shuma e deponuar në një bankë dyfishohet çdo 13 vjet. Banka llogarit interes të përbërë me kapitalizim të vazhdueshëm. Çfarë përqindje vjetore të interesit ofron banka?

1.5 Depozitat periodike

Në pikën e mësipërme është shqyrtuar rasti i deponimit të një kapitali të caktuar dhe i gjendjes së fundit të kapitalit në bazë të llogaritjes së interesit vjetor. Në këtë pikë do të shqyrtojmë një problem ca më kompleks: në fillim të çdo viti (ose çdo periudhe kapitalizimi në qoftë se e njëjta nuk është njëvjeçare) do të deponohen shuma të barabarta D, kurse banka kryen kamatizimin me përqindje $p\%$ (p.a.d). Depozitat e tilla quhen *depozita periodike.*

Caktojmë vlerën e fundit S_n pas n depozitash periodike.

Interesi dekursiv në depozitin e parë (të deponuar në fillim të vitit të parë) pas n vitesh, d.m.th., n kapitalizimesh, do të jetë

$$D\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Depoziti i dytë do të kapitalizohet $n-1$ herë, që sjell shumën

$$D\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}.$$

Duke vazhduar këtë procedurë, depoziti i fundit (i deponuar në fillim të vitit n) kapitalizohet vetëm njëherë, për të sjellur

$$D\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Kështu, në fund të vitit të n-të do të kemi shumën

$$\begin{aligned} S_n &= D\left(1+\frac{p}{100}\right)^n + D\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} + \cdots + D\left(1+\frac{p}{100}\right) \\ &= D\left(1+\frac{p}{100}\right)\left\{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} + \left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2} + \cdots + 1\right\}. \end{aligned}$$

Në kllapat gjarpërore paraqitet shuma e progresionit gjeometrik, prandaj në qoftë se vëjmë $r = 1+\frac{p}{100}$, kemi

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r-1}$$

për $n = 0, 1, 2, \ldots$

Në këtë mënyrë, kemi

$$\boxed{S_n = D\frac{r(r^n-1)}{r-1}.} \tag{1}$$

Shembull 1. Në qoftë se në fillim të çdo viti deponohen në bankë nga 1000 € me interes 7.5% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, sa do të jetë shuma që arrihet në fund të vitit të shtatë?

Zgjidhje. Janë dhënë $D = 1000$, $p = 7.5$ dhe $n = 7$. Kemi

$$S_n = D\frac{r(r^n - 1)}{r - 1}$$

dhe

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{7.5}{100} = 1.075.$$

Prandaj,

$$S_7 = 1000 \cdot \frac{1.075(1.075^n - 1)}{1.075 - 1} \approx 1000 \cdot 9.446371 \approx 9446.37$$

□

Shembull 2. Sa vjet duhet deponuar nga 10000 € për çdo vit ashtu që në fund të merren 100000 € në qoftë se llogaritet interes 6% (p.a.d) me kapitalizim vjetor?

Zgjidhje. Kemi $D = 10000$, $S_n = 100000$,

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{6}{100} = 1.06.$$

Duke zëvendësuar në formulën (1) marrim

$$100000 = 10000\frac{1.06(1.06^n - 1)}{1.06 - 1},$$

d.m.th.,

$$1.06^n = 10 \cdot \frac{0.06}{1.06} + 1,$$

ose

$$1.06^n \approx 1.56604.$$

Duke logaritmuar ekuacionin e fundit gjejmë

$$n \log 1.06 \approx \log 1.56604,$$

ose

$$n \approx \frac{\log 1.56604}{\log 1.06} \approx 7.70.$$

Pra, shuma e kërkuar do të arrihet (dhe tejkalohet) pas 8 vjetësh. □

Shembull 3. Një person deponon nga 500 € në fillim të çdo gjysmëviti për 30 vjet me interes 6% (p.a.d) dhe kapitalizim gjashtëmujor. Llogaritni shumën përfundimtare.

Zgjidhje. Janë dhënë $D = 500$, $n = 30$, $m = 2$, $p = 6$. Në bazë të formulës (2) nga pika 1.3 dhe asaj (1) fitojmë

$$\boxed{S_{mn} = D\frac{r(r^{mn}-1)}{r-1},}$$

ku tani

$$\boxed{r = 1 + \frac{p}{100m}.}$$

Duke zëvendësuar vlerat e dhëna marrim

$$r = 1 + \frac{6}{100 \cdot 2} = 1.03,$$

$$S_{2\cdot 30} = 500 \cdot \frac{1.03(1.03^{2\cdot 30} - 1)}{1.03 - 1},$$

ose

$$S_{60} \approx 500 \cdot 167.94504 \approx 83972.52.$$

□

Detyra për ushtrime

1. Në qoftë se në fillim të çdo viti deponohen në bankë nga 700 € me interes 8% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, sa do të jetë shuma që arrihet në fund të vitit të dhjetë?

2. Një person deponon nga 1000 € për 20 vjet me interes 6% (p.a.d) në fillim të

   (a) çdo viti me kapitalizim vjetor;

   (b) çdo gjysmëviti me kapitalizim gjysmëvjetor.

   Llogaritni shumën përfundimtare.

3. Sa herë duhet deponuar shumë të njëjtë në fillim të çdo viti ashtu që shuma e fundit të jetë 14 herë më e madhe sesa shuma e depozitit periodik? Përqindja e interesit është 5% (p.a.d) me kapitalizim vjetor.

4. Sa herë duhet deponuar shumë të njëjtë në fillim të çdo tremujori ashtu që shuma e fundit të jetë 20 herë më e madhe sesa shuma e depozitit periodik? Përqindja e interesit është 8% (p.a.d) me kapitalizim tremujor.

5. Një person deponon në fillim të çdo semestri shuma të njëjta me kamatë dekursive. Në fund të vitit të tretë kapitali arrin vlerën 8480 €, kurse në fund të vitit të gjashtë 23500 €. Të llogariten vlera e depozitit periodik dhe përqindja e interesit në qoftë se kapitalizimi është semestral.

6. Një person deponon në fillim të çdo tremujori shuma të njëjta me kamatë dekursive. Në fund të vitit të dytë kapitali arrin vlerën 6500 €, kurse në fund të vitit të katërtë 14200 €. Të llogariten vlera e depozitit periodik dhe përqindja e interesit në qoftë se kapitalizimi është tremujor.

1.6 Rentat periodike

Rentë periodike quhet shuma e cila merret gjatë ndonjë periudhe në intervale të barabarta kohore në emër të shumës së deponuar më parë me interes dekursiv.

Kapitali M i cili duhet deponuar në fillim të periudhës, ashtu që nga ai të merren renta periodike me vlerë R, quhet *mizë*.

Caktojmë vlerën e mizës M të deponuar me përqindje $p\%$ (p.a.d) dhe kapitalizim njëvjeçar ashtu që nga e njëjta të merren n renta periodike R në fund të çdo viti (gjatë periudhës vijuese n vjeçare).

Vlera M_1 në momentin e deponimit („vlera sot“), ose *vlera e diskontuar* e rentës së parë, mund të gjendet nga formula për shumën pas 1 kapitalizimi:

$$R = M_1 r,$$

ku me

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

është shënuar, si zakonisht, faktori i interesit dekursiv. Rrjedhimisht, vlera e diskontuar e rentës së parë është

$$M_1 = R \cdot \frac{1}{r}.$$

Vlera e diskontuar M_2 e rentës së dytë gjendet nga formula për shumën pas 2 kapitalizimesh dekursive:

$$R = M_2 r^2,$$

ose

$$M_2 = R \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Vlera e diskontuar M_3 e rentës së tretë gjendet nga formula për shumën pas 3 kapitalizimesh dekursive:

$$R = M_3 r^3,$$

ose

$$M_3 = R \cdot \frac{1}{r^3}.$$

Duke vazhduar këtë procedurë, vlera e diskontuar M_n e rentës së n-të gjendet nga formula për shumën pas n kapitalizimesh dekursive:

$$R = M_n r^n,$$

ose

$$M_n = R \cdot \frac{1}{r^n}.$$

Vlera M e mizës është e barabartë me shumën e të githa vlerave të diskontuara:

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n \\ &= R \cdot \frac{1}{r} + R \cdot \frac{1}{r^2} + R \cdot \frac{1}{r^3} + \cdots + R \cdot \frac{1}{r^n} \\ &= R \cdot \frac{1}{r^n}(r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \cdots + 1). \end{aligned}$$

Duke zbatuar, sikur në pikën paraprake, formulën për shumën e progresionit gjeometrik:

$$r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \cdots + 1 = \frac{r^n - 1}{r - 1},$$

fitojmë

$$\boxed{M = R\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)},} \tag{1}$$

që paraqet fomulën për llogaritjen e mizës.

Shembull 1. Sa duhet deponuar në bankë sot me interes 10% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor ashtu që 12 vjetët vijuese të merren renta periodike prej 5000 €?

Zgjidhje. Janë dhënë $R = 5000$, $p = 10$, $n = 12$. Kemi

$$r = 1 + \frac{10}{100} = 1.1$$

dhe

$$M = 5000 \cdot \frac{1.1^{12} - 1}{1.1^{12} \cdot (1.1 - 1)} \approx 5000 \cdot 6.813692 \approx 34068.46.$$

□

Shembull 2. Sa duhet deponuar në bankë sot me interes 8% (p.a.d) dhe kapitalizim semestral ashtu që 12 vjetët vijuese të merren nga 4000 € në fund të çdo semestri (gjashtëmujori)?

Zgjidhje. Janë dhënë $R = 4000$, $p = 8$, $n = 12$, $m = 2$. Në bazë të formulës (2) nga pika 1.3 dhe asaj (1) fitojmë

$$\boxed{M = R\frac{r^{mn} - 1}{r^{mn}(r-1)},}$$

ku tani

$$\boxed{r = 1 + \frac{p}{100m}.}$$

Pra,

$$r = 1 + \frac{8}{100 \cdot 2} = 1.04$$

dhe

$$M = 4000 \cdot \frac{1.04^{2\cdot 12} - 1}{1.04^{2\cdot 12} \cdot (1.04 - 1)} \approx 4000 \cdot 15.246963 \approx 60987.85.$$

□

Shembull 3. Në bankë janë deponuar 87700 € me 6% (p.a.d) dhe kapitalizim semestral. Të llogaritet sa herë mund të merren renta periodike gjashtëmujore prej 5000 €?

Zgjidhje. Janë dhënë $M = 87700$, $R = 5000$, $p = 6$, $m = 2$. Llogarisim vlerën e mn. Kemi

$$r = 1 + \frac{p}{100m},$$

d.m.th.

$$r = 1 + \frac{6}{100 \cdot 2} = 1.03.$$

Duke zëvendësuar vlerat në formulën

$$M = R\frac{r^{mn} - 1}{r^{mn}(r-1)},$$

fitojmë

$$87700 = 5000\frac{1.03^{2n} - 1}{1.03^{2n}(1.03 - 1)},$$

d.m.th.,

$$\frac{877}{50} \cdot 0.03 = \frac{1.03^{2n} - 1}{1.03^{2n}},$$

ose

$$0.5262 \cdot 1.03^{2n} = 1.03^{2n} - 1.$$

Prej këtej gjejmë

$$1.03^{2n}(1 - 0.5262) = 1,$$

ose

$$1.03^{2n} = \frac{1}{0.4738}.$$

Duke logaritmuar anë për anë barazimin e fundit marrim

$$2n \log 1.03 \approx \log 2.110595,$$

d.m.th.

$$2n \approx \frac{\log 2.110595}{\log 1.03} \approx 25.27.$$

Pra, $25 < 2n < 26$, që d.m.th. se merren 25 renta të plota nga 5000 €. □

Detyra për ushtrime

1. Sa duhet deponuar në bankë sot me interes 10% (p.a.d) dhe kapitalizim tremujor ashtu që 16 vjetët vijuese të merren nga 3000 € në fund të çdo tremujori?

2. Janë deponuar 200000 € me interes 10% (p.a.d) dhe kapitalizim tremujor. Sa do të jetë renta periodike në qoftë se merret 9 vjet në fund të çdo katërmujori?

3. Llogaritni në shembullin 3 sa është vlera e rentës së njëzetegjashtë (jo të plotë) e cila mbetet për t'u paguar?

4. Në bankë janë deponuar 100000 € me 7% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor. Të llogaritet sa herë mund të merren renta vjetore prej 8000 €?

5. Në bankë janë deponuar 14100 € me 8% (p.a.d) dhe kapitalizim tremujor. Të llogaritet sa herë mund të merren renta tremujore prej 6000 €?

6. Sa duhet deponuar në bankë sot me interes p% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor ashtu që $n-1$ vjetët e parë të merren renta periodike R, kurse vitin e fundit të merret renta jo e plotë R' ($R' < R$)?

7. Sa duhet deponuar me interes 6% (p.a.d) dhe kapitalizim tremujor, në fillim të çdo viti gjatë 12 vjetëve ashtu që nga fundi i vitit të dymbëdhjetë të merren, në fund të çdo viti, nga 4000 € për 15 vjetët vijuese?

8. Prindi deponon në fillim të çdo viti, nga dita e lindjes së fëmisë deri në moshën 25 vjeçare, nga 1000 € me 5% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor ashtu që i biri duke filluar nga mosha 30 vjeçare, në 25 vitet vijuese të marrë në fund të çdo viti renta periodike. Sa është vlera e rentave?

9. Një person dëshiron që rentat periodike prej 3330 € të cilat është dashur t'i merrë 30 vjet t'i zëvendësojë me më të mëdha, të cilat do t'i merrë 20 vjet. Sa do të jetë vlera e rentave të reja periodike në qoftë se përqindja e interesit është 5% (p.a.d) me kapitalizim vjetor?

1.7 Huatë

Në rast kontraktimi të një kredie afatgjatë (ose huaje), në kontratën e kredisë duhet të përpunohet plani i *amortizimit të huas*, d.m.th. i shlyerjes së borxhit të huamarrësit (*debitorit*) gjatë një numri të caktuar vitesh, me ç'rast debitori bën pagesa të caktuara periodike, në atë mënyrë që pas kalimit të numrit të caktuar të viteve të shlyejë tërë kredinë, përfshirë edhe interesat për shfrytëzimin e shumave me të cilat ka disponuar.

Shumat të cila paguhen në mënyrë periodike, të cilat përmbajnë borxhin kryesor dhe interesin në të, quhen *anuitete*.

1.7.1 Huatë me anuitete të barabarta

Le të jetë K vlera e kredisë (borxhi kryesor) së dhënë për n vite me përqindje interesi $p\%$ (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor. Le të jetë A vlera e anuitetit vjetor, të paguar në fund të çdo viti.

Anuiteti i parë paguhet pas kalimit të vitit të parë; rrjedhimisht, vlera e diskontuar (d.m.th. vlera sot, ose vlera e tanishme) e tij është $\frac{A}{r}$, ku, si zakonisht,

$$\boxed{r = 1 + \frac{p}{100}}$$

është faktori i interesit dekursiv.

Anuiteti i dytë paguhet pas 2 vitesh, prandaj vlera e diskontuar e tij është $\frac{A}{r^2}$, e kështu me rradhë; më në fund, anuiteti i n-të paguhet pas n vitesh, prandaj vlera e diskontuar e tij është $\frac{A}{r^n}$.

Kredia do të amortizohet në qoftë se shuma e vlera të diskontuara të të gjitha anuiteteve është e barabartë vlerën e kredisë, d.m.th. në qoftë se[2]

$$K = \frac{A}{r} + \frac{A}{r^2} + \cdots + \frac{A}{r^n} = \frac{A}{r^n}(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1) = A\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}.$$

Nga barazimi i fundit gjejmë

$$\boxed{A = K\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1},} \qquad (1)$$

që paraqet formulën për llogaritjen e vlerës së anuiteteve të barabarta për amortizimin e kredisë.

[2]Vëreni analogjinë me ecurinë, tanimë të njohur, të nxjerrjes së formulës për llogaritjen e mizës për rentën e dhënë periodike.

Shembull 1. Kredia prej 50,000 € amortizohet për 12 vjet me 5% (p.a.d) interes (dhe kapitalizim vjetor). Sa do të jetë anuiteti vjetor?

Zgjidhje. Kemi $K = 50,000$, $p = 5$, $n = 12$,

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1.05.$$

Sipas formulës (1) gjejmë

$$A = K\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 50,000\frac{1.05^{12}(1.05-1)}{1.05^{12}-1} \approx 5641.27.$$

□

Në qoftë se pagimi i anuiteteve dhe kapitalizimi bëhen m herë në vit, atëherë nga sa dijmë më parë, formula (1) merr formën

$$\boxed{A = K\frac{r^{mn}(r-1)}{r^{mn}-1},} \tag{2}$$

ku tani

$$\boxed{r = 1 + \frac{p}{100m}.}$$

Shembull 2. Cila hua mund të shlyhet për 10 vjet me anuitete mujore prej 200 € dhe interes 6% (p.a.d) me kapitalizim mujor?

Zgjidhje. Këtu kemi $A = 200$, $p = 6$, $n = 10$, $m = 12$,

$$r = 1 + \frac{p}{100m} = 1 + \frac{6}{100 \cdot 12} = 1.005.$$

Nga formula (2) fitojmë

$$K = A\frac{r^{mn}-1}{r^{mn}(r-1)} = 200\frac{1.005^{12\cdot 10}-1}{1.005^{12\cdot 10}(1.005-1)} \approx 18014.69.$$

□

Secili nga anuitetet është i barabartë me shumën e interesit në borxhin e mbetur dhe të pjesës së borxhit kryesor të cilin e kthen, e që quhet *këst.*

Është e qartë se vlerat e késteve ndryshojnë.

Për thjeshtim në llogaritje, sypozojmë sërish se kemi të bëjmë me anuitete dhe kapitalizim vjetorë (d.m.th. $m = 1$).

Atëherë, në fund të vitit të parë, meqë borxhi i mbetur është K (gjatë vitit të parë është shfrytëzuar e tërë pjesa kryesore), interesi në huanë për 1 vit është $\frac{Kp}{100}$. Kështu, në qoftë se këstin e parë e shënojmë me K_1, do të kemi

$$A = K_1 + \frac{Kp}{100},$$

d.m.th. për këstin e parë gjejmë

$$K_1 = A - \frac{Kp}{100}. \tag{3}$$

Pas pagesës së anuitetit të parë borxhi i mbetur zvogëlohet për K_1, d.m.th. ka vlerën $K - K_1$. Meqë për anuitetin e dytë poashtu vlen

$$A = K_2 + \frac{(K - K_1)p}{100},$$

për këstin e dytë fitojmë

$$K_2 = A - \frac{(K - K_1)p}{100}.$$

Rrjedhimisht, sipas (3),

$$K_2 = A - \frac{Kp}{100} + \frac{K_1 p}{100} = K_1 + \frac{K_1 p}{100} = K_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

pra,

$$K_2 = K_1 r.$$

Pas pagesës së anuitetit të dytë borxhi i mbetur do të zvogëlohet akoma për K_2, d.m.th. ka vlerën $K - K_1 - K_2$, e meqë për anuitetin e tretë kemi

$$A = K_3 + \frac{(K - K_1 - K2)p}{100},$$

fitojmë

$$K_3 = A - \frac{(K - K_1 - K2)p}{100},$$

ose

$$K_3 = A - \frac{(K - K_1)p}{100} + \frac{K_2 p}{100} = K_2 + \frac{K_2 p}{100} = K_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_2 r.$$

Duke zëvendësuar $K_2 = K_1 r$ në barazimin e fundit, fitojmë

$$K_3 = K_1 r^2.$$

Në qoftë se do të vazhdonim këtë, do të fitonim

$$
\begin{aligned}
K_4 &= K_1 r^3, \\
K_5 &= K_1 r^4, \\
&\dots \\
\Aboxed{K_n &= K_1 r^{n-1},}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Shembull 3. Huaja prej 300, 000 € amortizohet për 15 vjet me anuitete të barabarta vjetore dhe interes 10% (p.a.d) me kapitalizim vjetor. Të caktohet kësti i fundit.

Zgjidhje. Kemi $K = 300,000$, $n = 15$, $p = 10$,

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{10}{100} = 1.1.$$

Gjejmë së pari vlerën e anuiteteve të barabarta:

$$A = 300,000 \frac{1.1^{15}(1.1 - 1)}{1.1^{15} - 1} \approx 39442.13,$$

dhe pastaj këstin e parë:

$$K_1 = A - \frac{Kp}{100} \approx 39442.13 - \frac{300,000 \cdot 10}{100} \approx 9442.13.$$

Tani, duke zbatuar formulën (4) gjejmë

$$K_{15} = K_1 r^{14} \approx 9442.13 \cdot 1.1^{14} \approx 35856.48.$$

□

Detyra për ushtrime

1. Kredia prej 50, 000 € amortizohet për 12 vjet me 5% (p.a.d). Sa do të jetë vlera e anuitetit në qoftë se periudha e kapitalizimit dhe anuiteteve është

   (a) gjashtëmujore;

   (b) katërmujore;

   (c) tremujore;

   (d) mujore?

2. Është marrë hua për shtëpi prej $150,000$ € me interes 9% (p.a.d) dhe kapitalizim mujor për 30 vjet. Sa është anuiteti mujor për këtë hua?

3. Përcaktoni pagesën mujore për veturë të re me çmim $15,675$ € në qoftë se në të paguhet deposit prej $4,000$ € dhe vetura financohet për periudhë 5 vjeçare me përqindje 6% (p.a.d) dhe kapitalizim mujor.

4. Vërtetoni se në qoftë se huaja prej K eurosh amortizohet për n vjet me përqindje interesi $p\%$ (p.a.d) dhe kapitalizim mujor, atëherë anuitetetet e barabarta mujore janë

$$A = \frac{Ki}{1-(1+i)^{-12n}},$$

ku $i = \frac{p}{100 \cdot 12}$ është norma mujore e interesit (e shprehur si numër decimal).

5. Cila hua mund të shlyhet për 10 vjet me anuitete prej $1,000$ € dhe interes 6% (p.a.d) në qoftë se periudha e kapitalizimit dhe anuiteteve është

   (a) vjetore;

   (b) gjashtëmujore;

   (c) katërmujore?

6. Sypozojmë se një familje mund t'ia dalë me pagesa mujore prej jo më tepër se $1,200$ € për hua për shtëpi. Cila është shuma më e madhe e të hollave të cilën ata mund ta huazojnë, nën sypozimin se huadhënësi është i disponuar ta amortizojë huanë për 30 vjet me interes 9% (p.a.d) dhe kapitalizim mujor?

7. Sa periudha zgjat pagesa e huas prej $14,877.47$ € me anuitet vjetor $1,000$ € e me interes 3% (p.a.d)?

8. Për sa vjet amortizohet huaja prej $85,000$ € me anuitet katërmujor prej $5,089.21$ € me 2.4% (p.a.d) dhe kapitalizim katërmujor?

9. Sa anuitete duhet paguar për amortizimin e huasë prej $72,000$ € me anuitet gjashtëmujor prej $8,015.51$ € me 4% (p.a.d) dhe kapitalizim gjashtëmujor?

10. Sa periudha zgjat pagesa e huas prej $14,877.47$ € me anuitet vjetor $1,000$ € e me interes 3% (p.a.d)?

11. Huaja prej $200,000$ € amortizohet për 5 vjet me anuitete të barabarta vjetore dhe interes 8% (p.a.d) me kapitalizim vjetor. Caktoni:

    (a) anuitetin;

    (b) këstin e parë;

    (c) këstin e katërtë;

12. Huaja prej $100,000$ € amortizohet për 15 vjet me anuitete të barabarta mujore dhe interes 8% (p.a.d) me kapitalizim mujor. Caktoni këstin e fundit.

13. Vërtetoni se në qoftë se huaja prej K eurosh amortizohet për n vjet me përqindje interesi $p\%$ (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, atëherë vlera e këstit të parë është
$$K_1 = K\frac{r-1}{r^n-1}.$$

14. Vërtetoni se në qoftë se një hua amortizohet për n vjet me anuitete vjetore prej A eurosh dhe përqindje interesi $p\%$ (p.a.d) e kapitalizim vjetor, atëherë:

    (a) vlera e këstit të parë është
$$K_1 = Ar^{-n},$$

    (b) vlera e këstit të i-të është
$$K_i = Ar^{i-n-1}.$$

1.7.2 Plani i amortizimit të huave me anuitete të barabarta

Siç pamë në pikën paraprake, në kthimin pjesë-pjesë të borxhit (*amortizimin e huas*) debitori paguan në mënyrë periodike interesat, si dhe pjesë të borxhit kryesor.

Shënojmë me I_i interesin për vitin (periodën) i, P_i borxhin e kthyer (pjesën e paguar) në fund të periodës i, R_i mbetjen e borxhit pas anuitetit të i-të.

Supozojmë se interesi llogaritet me kapitalizim vjetor dhe anuitetet janë vjetore (d.m.th. $m = 1$).

Nga sa u tha në pikën paraprake, do të kemi:

1. për interesin:
$$\boxed{I_i = \frac{R_{i-1}p}{100}}$$
(vëreni se në rast më tepër kapitalizimesh dhe anuitetesh brenda vitit, d.m.th. kur $m \neq 1$, këtu do të kemi $\boxed{I_i = \frac{R_{i-1}p}{100m}}$),

2. për këstin:
$$\boxed{K_i = A - I_i,}$$

3. për borxhin e paguar:
$$\boxed{P_i = P_{i-1} + K_i}$$
dhe
$$P_i = K_1 + K_2 + \cdots + K_i,$$

4. për mbetjen e borxhit:
$$\boxed{R_i = R_{i-1} - K_i}$$
dhe
$$R_i = K - (K_1 + K_2 + \cdots + K_i) = K - P_i.$$

Që borxhi të shlyhet pas n anuitetesh do të duhej që $P_n = K$, ose $R_n = 0$, pra
$$K_1 + K_2 + \cdots + K_n = K,$$
që paraqet *kushtin e shlyerjes së borxhit* (ose, *kushtin e mbylljes*).

Kështu, borxhi i mbetur mund të shprehet edhe në formën

$$R_i = K_{i+1} + K_{i+2} + \cdots + K_n.$$

Do të themi se është përpiluar *plani i amortizimit të borxhit* në qoftë se është ndërtuar një tabelë e cila ka për shtylla vlerat e i, K_i, I_i, A_i (anuiteti i i-të), R_i dhe, sipas dëshirës, P_i:

i	I_i	K_i	A_i	R_i	P_i
0				K	
1	$\frac{R_0 p}{100}$	$A - I_1$	A	$R_0 - K_1$	$P_0 + K_1$
2	$\frac{R_1 p}{100}$	$A - I_2$	A	$R_1 - K_2$	$P_1 + K_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{R_{n-1} p}{100}$	$A - I_n$	A	$R_{n-1} - K_n$	$P_{n-1} + K_n$

Shembull 4. Huaja prej $100,000$ € amortizohet me anuitete të barabarta vjetore për 5 vjet me interes 7% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor. Të përpilohet plani i amortizimit.

Zgjidhje. Janë dhënë $K = 100,000$, $n = 5$, $p = 7$. Gjejmë së pari vlerën e anuiteteve:

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{7}{100} = 1.07$$

$$A = K\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 100,000\frac{1.07^5(1.07-1)}{1.07^5 - 1} \approx 24389.07.$$

Tani përpilojmë planin e amortizimit:

i	I_i	K_i	A_i	R_i	P_i
0				100,000	
1	7,000	17,389.07	24,389.07	82,610.93	17,389.07
2	5,782.77	18,606.30	24,389.07	64,004.63	35,995.37
3	4,480.32	19,908.75	24,389.07	44,095.88	55,904.12
4	3,086.71	21,302.36	24,389.07	22,793.52	77,206.48
5	1,595.55	22,793.52	24,389.07	0	100,000

□

Nga plani i amortizimit të huasë mund të lexohen vlerat e borxhit të kthyer P_i në fund të periodës i dhe të mbetjes R_i të borxhit. Megjithatë, ndonjëherë është e nevojshme të llogariten drejtpërdrejt këto vlera, pa përpilim paraprak të planit të amortizimit.

Nxerrim më poshtë formulat për llogaritjen e këtyre vlerave.

Meqë, siç dihet, $K_i = K_1 r^{i-1}$, kemi

$$P_i = K_1 + K_2 + K_3 + \cdots + K_i$$
$$= K_1 + K_1 r + K_1 r^2 + \cdots + K_1 r^{i-1}$$
$$= K_1(1 + r + r^2 + \cdots + r^{i-1}).$$

D.m.th.,

$$\boxed{P_i = K_1 \frac{r^i - 1}{r - 1}.} \tag{5}$$

Nga ana tjetër,

$$R_i = K_{i+1} + K_{i+2} + K_{i+3} + \cdots + K_n$$
$$= K_1 r^i + K_1 r^{i+1} + K_1 r^{i+2} + \cdots + K_1 r^{n-1}$$
$$= K_1 r^i (1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-i-1}).$$

Meqë shprehja nën kllapa paraqet shumën e $n - i$ termash të një progresioni gjeometrik, kemi

$$R_i = K_1 r^i \frac{r^{n-i} - 1}{r - 1},$$

ose, përfundimisht,

$$\boxed{R_i = K_1 \frac{r^n - r^i}{r - 1}.} \tag{6}$$

Shembull 5. Huaja prej 400, 000 € amortizohet për 20 vjet me anuitete të barabarta semestrale dhe interes 8% (p.a.d) e kapitalizim semestral. Të gjendet:

(a) pjesa e shlyer e borxhit pas 30 anuiteteve të paguara,

(b) borxhi i mbetur pas 30 anuiteteve të paguara.

Zgjidhje. Janë dhënë $K = 400,000$, $n = 20$, $m = 2$, $p = 8$, $i = 30$. Gjejmë së pari vlerën e anuiteteve të barabarta. Meqë

$$r = 1 + \frac{p}{100m} = 1 + \frac{8}{100 \cdot 2} = 1.04,$$

kemi

$$A = K \frac{r^{mn}(r-1)}{r^{mn} - 1} = 400000 \frac{1.04^{2 \cdot 20}(1.04 - 1)}{1.04^{2 \cdot 20} - 1} \approx 20209.40.$$

Gjejmë tani këstin e parë:

$$K_1 = A - \frac{Kp}{100m} \approx 20209.40 - \frac{400000 \cdot 8}{100 \cdot 2} \approx 4209.40.$$

(a) Borxhi i shlyer do të jetë

$$P_{30} = K_1 \frac{r^{30} - 1}{r - 1} \approx 4209.40 \frac{1.04^{30} - 1}{1.04 - 1} \approx 236083.70.$$

(b) Borxhi i mbetur do të jetë

$$R_{30} = K_1 \frac{r^{mn} - r^{30}}{r - 1} \approx 4209.40 \frac{1.04^{2\dot{2}0} - 1}{1.04 - 1} \approx 163916.30.$$

Natyrisht, duke ditur rezultatin e llogaritur nën (a) për P_i, vlerën e R_i kemi mundur ta llogarisim më thjeshtë:

$$R_{30} = K - P_{30} \approx 400000 - 236083.70 \approx 163916.30.$$

$\square$

Detyra për ushtrime

1. Kredia prej $10,000$ € amortizohet me anuitete të barabarta mujore për 1 vjet me interes 12% (p.a.d) dhe kapitalizim mujor. Të përpilohet plani i amortizimit.

2. Kredia prej $50,000$ € amortizohet me anuitete të barabarta katërmujore për 3 vjet me interes 9% (p.a.d) dhe kapitalizim katërmujor. Të përpilohet plani i amortizimit.

3. Huaja prej $500,000$ € amortizohet për 10 vjet me anuitete të barabarta vjetore dhe interes 7% (p.a.d) e kapitalizim vjetor. Të gjendet:

   (a) pjesa e shlyer e borxhit pas 7 anuiteteve të paguara,

   (b) borxhi i mbetur pas 7 anuiteteve të paguara.

4. Huaja prej $1,000,000$ € amortizohet për 15 vjet me anuitete të barabarta mujore dhe interes 6% (p.a.d) e kapitalizim mujor. Të gjendet:

   (a) pjesa e shlyer e borxhit pas 120 anuiteteve të paguara,

   (b) borxhi i mbetur pas 120 anuiteteve të paguara.

5. Shprehni formulat e dhëna në këtë pikë për interesin I_i, borxhin e paguar P_i dhe për mbetjen e borxhit R_i në rast të disa kapitalizimesh dhe anuitetesh brenda vitit, d.m.th. kur $m \neq 1$.

6. Përpiloni një skemë tabelare të përgjithshme (sikur ajo e dhënë në këtë pikë) për planin e amortizimit të huasë në rast m kapitalizimesh dhe anuitetesh brenda vitit.

7. Vërtetoni se në qoftë se huaja prej K eurosh amortizohet për n vjet me përqindje interesi $p\%$ (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, atëherë mbetja R_i e borxhit pas anuitetit të i-të është

$$R_i = K\frac{r^n - r^i}{r^n - 1}.$$

8. Gjeni formulën për mbetjen R_i të borxhit pas anuitetit të i-të në qoftë se huaja prej K eurosh amortizohet për n vjet me përqindje interesi $p\%$ (p.a.d) dhe m kapitalizime (e po aq anuitete) brenda viti.

1.7.3 Mënyra të tjera amortizimi huash

Le të pranojmë shënimet nga pika e mësipërme dhe le të supozojmë se kemi një kapitalizim (dhe një anuitet) brenda vitit (d.m.th. $m = 1$).

Një mënyrë tjetër e amortizimit të huave, më e thjeshtë se ajo e studiuar në pikat paraprake, është metoda e amortizmit me këste të dhëna.

Supozojmë se janë të dhëna kuotat për këstet: $K_1, K_2, \ldots, K_n$, natyrisht, ashtu që të plotësojnë kushtin

$$K_1 + K_2 + \cdots + K_n = K.$$

Atëherë, pjesa e mbetur e borxhit R_i dhe interesi I_i përcaktohen sikurse më parë:

$$R_i = R_{i-1} - K_i,$$
$$I_i = \frac{R_{i-1}p}{100},$$

prej nga lehtë gjejmë vlerën e anuitetit A_i:

$$A_i = K_i + I_i.$$

Shembull 6. Huaja prej $1,000,000$ € amortizohet për 5 vjet me interes 4% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, me kuotat vijuese për këstet: $K_1 = 150,000$, $K_2 = 180,000$, $K_3 = 210,000$, $K_4 = 230,000$, $K_5 = 230,000$. Të përpilohet plani i amortizimit.

Zgjidhje. Plani i amortizimit është

i	I_i	K_i	A_i	R_i	P_i
0				1,000,000	
1	40,000	150,000	190,000	850,000	150,000
2	34,000	180,000	214,000	670,000	330,000
3	26,800	210,000	236,800	460,000	540,000
4	18,400	230,000	248,400	230,000	770,000
5	9,200	230,000	239,200	0	1,000,000

□

Vëreni se për këtë mënyrë amortizimi anuitet janë të ndryshueshme.

Të përmendim edhe një mënyrë tjetër amortizimi huash me anuitete të ndryshueshme – amortizimi me anuitete progresion gjeometrik.

Supozojmë se anuitetet zvogëlohen (ose rriten) sipas një progresioni gjeometrik. Atëherë, për ndonjë numër $q \neq 0$, do të jetë $A_2 = A_1 q$, $A_3 = A_2 q = A_1 q^2$, ..., $A_n = A_{n-1} q = A_1 q^{n-1}$.

Duke mbledhur vlerat e diskontuara të kësteve, sikur më parë, fitojmë

$$\begin{aligned} K &= \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \frac{A_3}{r^3} + \cdots + \frac{A_n}{r^n} \\ &= \frac{A_1}{r} + \frac{A_1 q}{r^2} + \frac{A_1 q^2}{r^3} + \cdots + \frac{A_1 q^{n-1}}{r^n} \\ &= \frac{A_1}{r}\left(1 + \frac{q}{r} + \left(\frac{q}{r}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{r}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{A_1}{r} \frac{\left(\frac{q}{r}\right)^n - 1}{\frac{q}{r} - 1} = A_1 \frac{r^n - q^n}{r^n (r-q)}. \end{aligned}$$

Prej këtej fitojmë

$$\boxed{A_1 = K \frac{r^n (r-q)}{r^n - q^n}.}$$

Shembull 7. Huaja prej $1,000,000$ € amortizohet për 5 vjet me interes 10% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, me anuitete vjetore të cilat vit pas viti zvogëlohen për 5%. Të përpilohet plani i amortizimit.

Zgjidhje. Kemi: $K = 1,000,000$, $p = 10$, $n = 5$. Meqë

$$A_2 = A_1 - A_1 \frac{5}{100} = A_1 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) = A_1 \cdot \frac{95}{100},$$

dhe, ngjashëm, $A_3 = A_2 \cdot \frac{95}{100}$, ..., $A_n = A_{n-1} \cdot \frac{95}{100}$, përfundojmë se

$$q = \frac{95}{100} = 0.95.$$

Llogarisim anuitetin e parë:

$$r = 1 + \frac{10}{100} = 1.1,$$

$$A_1 = K \frac{r^n (r-q)}{r^n - q^n} = 1,000,000 \cdot \frac{1.1^5 (1.1 - 0.95)}{1.1^5 - 0.95^5} \approx 288715.32.$$

Plani i amortizimit është

i	I_i	K_i	A_i	R_i	P_i
0				1,000,000	
1	100,000	188,715.32	288,715.32	811,284.68	188,715.32
2	81,128.47	193,151.09	274,279.56	618,133.59	381,866.41
3	61,813.36	198,752.22	260,565.58	419,381.37	580,618.63
4	41,938.14	205,599.16	247,537.30	213,782.21	786,217.79
5	21,378.22	213,782.21	235,160.43	0	1,000,000

□

Detyra për ushtrime

1. Kredia prej $100,000$ € amortizohet për 1 vjet me interes 12% (p.a.d) dhe kapitalizim mujor me:

   (a) anuitete mujore të cilat muaj pas muaji zvogëlohen për 10%;

   (b) anuitete mujore të cilat muaj pas muaji rriten për 10%;

   (c) kuotat vijuese për këstet: $K_1 = 12,000$, $K_2 = 11,000$, $K_3 = 10,000$, $K_4 = 10,000$, $K_5 = 9,000$, $K_6 = 9,000$, $K_7 = 8,000$, $K_8 = 8,000$, $K_9 = 7,000$, $K_{10} = 6,000$, $K_{11} = 5,000$, $K_{12} = 5,000$.

   Të përpilohet plani i amortizimit.

2. Kredia prej $50,000$ € amortizohet për 4 vjet me interes 9% (p.a.d) dhe kapitalizim katërmujor me:

   (a) anuitete katërmujore të cilat periodë pas periode zvogëlohen për 15%;

   (b) anuitete katërmujore të cilat periodë pas periode rriten për 15%.

   (c) kuotat vijuese për këstet: $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = K_6 = K_7 = 5,000$, $K_8 = K_9 = K_{10} = K_{11} = K_{12} = 3,000$.

   Të përpilohet plani i amortizimit.

3. Huaja prej $100,000$ € amortizohet për 10 vjet me interes 7% (p.a.d) e kapitalizim vjetor. Të llogariten anuitetet ashtu që vit pas viti këstet të rriten për $1,000$ €. Të përpilohet plani i amortizimit.

4. Huaja prej $1,000,000$ € amortizohet për 15 vjet me interes 6% (p.a.d) e kapitalizim mujor. Të llogariten anuitetet ashtu që muaj pas muaji këstet të zvogëlohen për 50 €.

5. Përpiloni një skemë tabelare të përgjithshme (sikur ajo e dhënë në pikën paraprake) për planin e amortizimit të huasë me këste të dhëna, në qoftë se bëhet 1 kapitalizim (dhe 1 pagesë anuiteti) në vit.

6. Përpiloni një skemë tabelare të përgjithshme (sikur ajo e dhënë në pikën paraprake) për planin e amortizimit të huasë me anuitete progresion gjeometrik, në qoftë se janë m kapitalizime (dhe anuitete) në vit.