Kapitulli 1

Elemente të algjebrës lineare

1.1 Sistemet e dy ekuacioneve

Shpesh, në aplikime të ndryshme në biznes dhe ekonomi, hasim në probleme të cilat janë, në dukje, të pamundur për t'u zgjidhur sepse në to figurojnë dy ose më tepër ndryshore. Mirëpo, një zgjidhje mund të gjendet në qoftë se shkruajmë dy ose më tepër ekuacione lineare[1] të pavarura nga njëri tjetri, me poaq ndryshore, dhe i zgjidhim njërin pas tjetrit. Para se ta diskutojmë këtë problem në trajtë të përgjithshme, le të marrim në shqyrtim një zbatim praktik.

Një ndërmarrës planifikon të fillojë një biznes të prodhimit dhe shitjes së biçikletave. Ndërmarrësi dëshiron ta llogarisë pikën e *rentabilitetit*; kjo përkufizohet si pika ku të hyrat janë të barabarta me kostot. Me fjalë tjera, është kjo pika ku ndërmarrësi as nuk fiton as nuk humb të holla.

Ndërmarrësi vlerëson se kostoja fikse e tij (qeraja, rryma, uji, telefoni, sigurimi, etj.) do të jetë rreth 1,000 € në muaj. Kostot tjera si materiali, prodhimi dhe pagat njihen si *kosto variabile* dhe do të rriten linearisht (në trajtë drejtëze). Llogaritjet paraprake tregojnë se kostoja variabile për prodhimin e 500 biçikletash do të jetë 9,000 € në muaj. Atëherë,

$$\begin{aligned}\text{kostoja totale} &= \text{kostoja fikse} + \text{kostoja variabile}\\ &= 1{,}000 + 9{,}000 = 10{,}000.\end{aligned}$$

Paraqesim grafikisht koston (boshti C), në varësi nga numri i biçikletave të prodhuara (boshti x) sikur në figurën 1.1.

[1] Ekuacione lineare janë ato ekuacione te të cilat të panjohurat, siç janë x dhe y, kanë eksponentin 1. Kështu, ekuacioni $3x - 5y = 7$ është linear meqë eksponentet e x dhe y janë që të dyja 1. Mirëpo, ekuacioni $3x^2 - 5y = 7$ nuk është linear sepse eksponenti i x është 2.

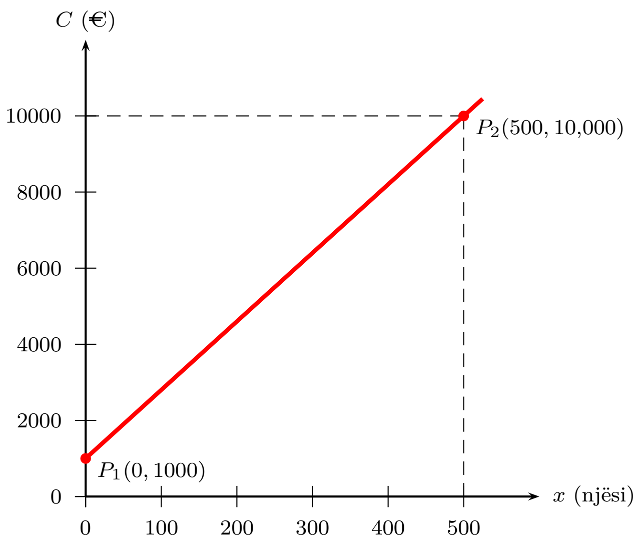


Figura 1.1. Kostoja totale sipas numrit të biçikletave.

Në figurën 1.1 boshti x është *abshisa* dhe boshti C është *ordinata*. Së bashku, këto boshte përbëjnë një *sistem koordinativ kartezian*. Drejtëza e tërhequr nëpër pikat P_1 dhe P_2 është paraqitje grafike e kostos totale të prodhimit të biçikletave. Fillon në pikën P_1 me ordinatë 1,000 € sepse kjo paraqet koston fikse; ajo figuron ndonëse nuk është prodhuar asnjë biçikletë. Këtë pikë e shënojmë me $P_1(0, 1000)$, ku numri i parë 0, brenda kllapave, shënon vlerën e boshtit x në këtë pikë, kurse numri i dytë 1000 shënon vlerën e boshtit C në këtë pikë. Për të thjeshtësuar shënimin, është menjanuar simboli euro. Kështu, themi se koordinatat e pikës P_1 janë $(0, 1000)$. Ngjashëm, koordinatat e pikës P_2 shënohen me $P_2(500, 10000)$ meqë kostoja totale e prodhimit të 500 biçikletave është 10,000 €.

Tani do të nxjerrim ekuacionin i cili përshkruan këtë drejtëz.

Në rastin e përgjithshëm, në qoftë se kemi shënuar me x boshtin e abshisës dhe me y boshtin e ordinatës (figura 1.2), një drejtëz përshkruhet me ekuacionin

$$\boxed{y = mx + b,} \tag{1}$$

ku m është *pjerrtësia*, x abshisa, y ordinata dhe b është *y-prerja* e drejtëzës, d.m.th., pika ku drejtëza e pret boshtin y.

Pjerrtësia m është herësi i *ngritjes* në drejtimin vertikal (boshti y) dhe *ecjes* në drejtimin horizontal (boshti x), d.m.th. (shihni figurën 1.2),

$$m = \frac{\text{ngritja}}{\text{ecja}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

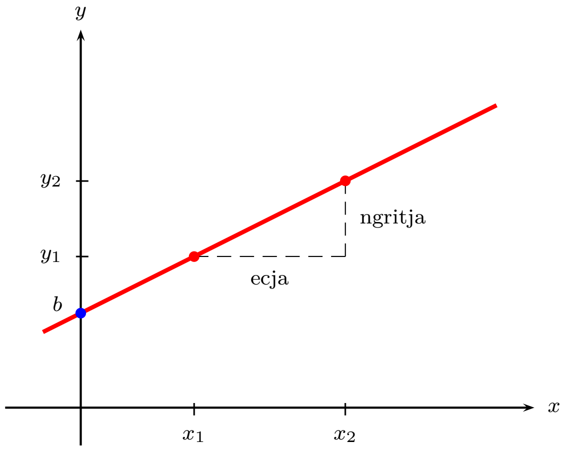


Figura 1.2. Drejtëza $y = mx + b$.

T'i kthehemi sërish shembullit tonë nga figura 1.1. Aty kemi $C_1 = 1000$, $C_2 = 10000$, $x_1 = 0$, $x_2 = 500$. Prandaj, pjerrtësia është

$$m = \frac{\text{ngritja}}{\text{ecja}} = \frac{C_2 - C_1}{x_2 - x_1} = \frac{10000 - 1000}{500 - 0} = \frac{9000}{500} = 18,$$

kurse mund të shohim se y-prerja është 1000. Prandaj, mbështetur në barazimin (1), ekuacioni i drejtëzës që paraqet koston totale është

$$C = 18x + 1000.$$

Shpesh është e përshtatshme që të panjohurat në një barazim të figurojnë nga ana e majtë e barazimit kurse vlerat e njohura nga ana e djathtë e tij. Atëherë, barazimi i mësipërm shkruhet në formën[2]

$$C - 18x = 1000.$$

Ky barazim ka dy të panjohura x dhe C, prandaj nuk ekziston një zgjidhje e vetme; më saktësisht, mund të gjejmë pafundësisht shumë kombinime të x dhe C të cilat do ta plotësojnë barazimin. Edhe më saktësisht, këto kombinime jane abshisat dhe ordinatat e pikave të drejtëzës nga figura 1.1.

Për ta caktuar pikën e rentabilitetit na duhet një ekuacion i dytë, dhe atë do ta gjejmë duke shfrytëzuar fakte shtesë, të cilat janë fomuluar në vazhdim.

Ndërmarrësi ka përcaktuar se në qoftë se shet 500 biçikleta me çmim 25 € për copë, ai do të gjenerojë të hyra prej $500 \cdot 25 = 12{,}500$ euro. Ky fakt mund

[2]Do të supozojmë se lexuesi tanimë ka zotëruar vetitë elementare të manipulimit me veprimet themelore me shprehje në një barazim. Prandaj, detajet e thjeshtësimit dhe rishkruarjes së një barazimi po i lëmë menjanë.

të paraqitet me një tjetër drejtëz e cila i është shtuar figurës 1.1. Rezultati është paraqitur në figurën 1.3.

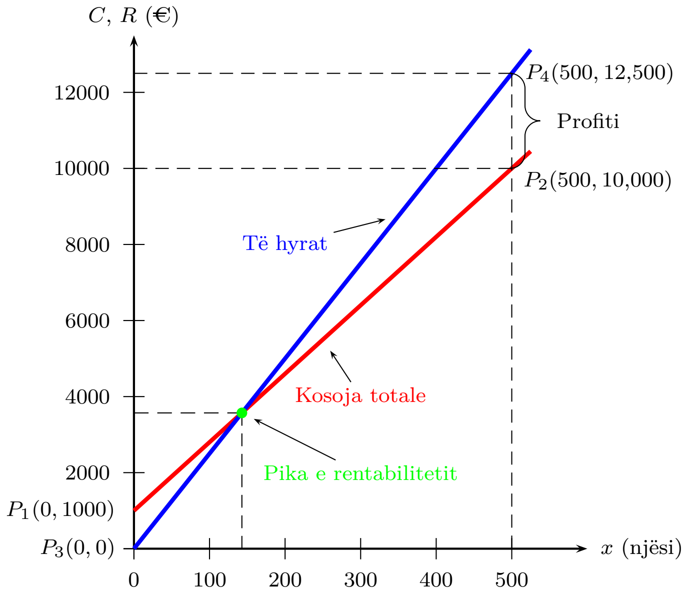


Figura 1.3. Prerja e grafikëve (drejtëzave) të kostos totale dhe të hyrave.

Drejtëza e re fillon në pikën $P_3(0, 0)$ sepse nuk do të ketë fare të hyra në qoftë se nuk shitet asnjë biçikletë. Ajo kalon nëpër pikën $P_4(500, 12500)$, e cila paraqet kushtin se ndërmarrësi do të gjenerojë 12,500 € kur të shiten 500 biçikleta.

Pikëprerja e dy drejtëzave paraqet pikën e *rentabilitetit*, dhe është pikërisht kjo ajo që kërkon ndërmarrësi. Projeksioni i pikës së rentabilitetit në boshtin x, i paraqitur si vijë e ndërprerë, tregon se duhet të shiten përafërsisht 140 biçikleta për të pasur profit zero. Poashtu, projeksioni në boshtin y tregon se në këtë pikë të rentabilitetit të hyrat e gjeneruara janë afërsisht 3,500 €.

Procedura e tillë njihet si *zgjidhje grafike.* Zgjidhja grafike jep vlera *të përafërta.*

Tani do të vazhdojmë për ta gjetur të ashtuquajturën *zgjidhje analitike.* Kjo procedurë do të prodhojë vlera *të sakta.*

Siç u tha më sipër, na duhet një ekuacion i dytë. Ky fitohet nga drejtëza në figurën 1.3 e cila paraqet të hyrat. Për të fituar ekuacionin e kësaj drejtëze nisemi prej ekuacionit (1), i cili për rastin e grafikut të të hyrave totale ka formën

$$R = mx + b.$$

Pjerrtësia m e të hyrave është

$$m = \frac{\text{ngritja}}{\text{ecja}} = \frac{R_2 - R_1}{x_2 - x_1} = \frac{12{,}500 - 0}{500 - 0} = \frac{125}{5} = 25,$$

kurse shohim se vlera e b, d.m.th., y-prerjes, është 0. Prandaj, ekuacioni i cili përshkruan të hyrat është

$$R = 25x.$$

Për t'i grupuar ekuacionet e kostos totale dhe të hyrave së bashku, duhet që abshisat dhe ordinatat për të dyja drjetëzat t'i shënojmë me simbole të njëjta.

Edhe deri më tani abshisat për të dyja drejtëzat i kemi shënuar me x. Mirëpo kemi supozuar se në rastin e drejtëzës së kostos totale fjala shkon për njësi të prodhuara, kurse në rastin e drejtëzës së të hyrave, për njësi të shitura. Identifikojmë këto dy madhësi, d.m.th. supozojmë se ndërmarësi mund të shesë tërë sasinë e prodhuar të biçikletave[3]. Kështu në vazhdim flasim për njësi biçikletash (të prodhuara dhe të shitura).

Ngjashëm veprojmë edhe ordinatat e dy grafikëve. Koston totale deri më tashti e kemi shënuar me C, kurse të hyrat me R (në të dyja rastet njësia matëse është euro). Meqë ndërmarrësit i intereson sasia e prodhimit për të cilën këto dy madhësi do të jenë të barabarta, do t'i shënojmë të dyja me të njëjtin simbol, për shembull, y.

Duke i gupuar së bashku tani ekuacionet e kostos totale dhe të hyrave, fitojmë *sistemin e ekuacioneve*

$$\begin{aligned} y - 18x &= 1000 \\ y &= 25x. \end{aligned}$$

Këto ekuacione duhet zgjidhur njëherësh të dyja. Kjo do të thotë se duhet gjetur vlera të vetme për x dhe y ashtu që të plotësohen të dyja barazimet.

Një mënyrë e lehtë për t'i zgjidhur këto ekuacione është duke zëvendësuar të dytën në të parën. Kështu elimonohet ndryshorja y nga ekuacioni i parë, i cili tani merr formën

$$25x - 18x = 1000,$$

ose

$$7x = 1000;$$

[3]Në ekonomiks, kushtet nën të cilat e tërë sasia e ofruar e mallit shitet njihen si *treg i balansuar*.

d.m.th.,

$$x = \frac{1000}{7}.$$

Tani[4], për të gjetur të panjohurën y, zëvendësojmë vlerën e gjetur të x qoftë në ekuacionin e parë, qoftë në të dytin. Kështu, duke zëvendësuar, për shembull, në të dytin, fitojmë

$$y = 25 \cdot \frac{1000}{7} = \frac{25000}{7}.$$

Prandaj, zgjidhjet e sakta për x dhe y janë

$$x = \frac{1000}{7},$$
$$y = \frac{25000}{7}.$$

Meqë nuk nevojiten zëvendësime të mëtejme, thjeshtësojmë vlerat e x dhe y duke kryer pjesëtimin, për të fituar $x = \frac{1000}{7} \approx 142.86$ dhe $x = \frac{25000}{7} \approx 3571.40$. Natyrisht, biçikletat duhet të shprehen si numra të plotë, prandaj pika e rentabilitetit të biznesit të ndërmarrësit tonë është 143 biçikleta, të cilat, pas shitjes, do të sjellin të hyra prej

$$y = 143 \cdot 25 = 3575$$

euro.

Të rikujtojmë se për pikën e rentabilitetit, metoda grafike na dha vlerën e përafërt prej 140 biçikletash, të cilat do të gjeneronin të hyra prej $y = 140 \cdot 25 = 3500$ eurosh. Edhepse metoda grafike nuk është poaq e saktë sa metoda analitike, ajo megjithatë na ofron ca informata paraprake, të cilat mund të shfrytëzohen për kontrollimin e zgjidhjeve të gjetura duke zbatuar metodën analitike.

Vërejtje. Sistemi i dhënë i ekuacioneve lineare u zgjidh me anë të të ashtuquajturës *metodë të zëvendësimit,* të njohur poashtu edhe si *metodë e elminimit e Gauss-it.* Në njërën nga pikat vijuese do ta diskutojmë këtë metodë në më tepër detaje, si dhe dy metoda tjera: *zgjidhjen me anë të matricës inverse* dhe *zgjidhjen me rregullën e Cramer-it.*

[4]Nuk është e këshillueshme të bëhet pjesëtimi i 1000 me 7 që tani. Ky pjesëtim do të prodhonte një numër me pafundësisht shumë decimale, i cili vetëm mund të përafrohet dhe, pasi të zëvendësohet për të gjetur y, do të prodhojë edhe një tjetër përafrim. Zakonisht pjesëtimin e kryejmë si hap të fundit.

Detyra për ushtrime

1. Të zgjidhen sistemet vijuese të ekuacioneve lineare:

   (a) $$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 3x - 2y &= 7 \end{aligned}$$

   (c) $$\begin{aligned} 12x - 7y &= 17 \\ 5x - 3y &= 7 \end{aligned}$$

   (d) $$\begin{aligned} 25x + 62y &= 27500 \\ 28x + 42y &= 26900 \end{aligned}$$

2. Janë dhënë funksioni i kërkesës dhe ai i kostos totale të një prodhimi:

   (a) $x = -2p + 4000, \quad C = 2000 + 5x;$

   (b) $x = -p + 90, \quad C = 500 + 7x.$

   Gjeni çmimin për të cilin arrihet pika e rentabilitetit. (Supozoni se kërkesa është e barabartë me ofertën.)

3. Funksioni i cili jep sasinë x të kërkuar në treg të një prodhimi në varësi nga çmimi p i një njësie quhet *funksion i kërkesës*, kurse funksioni i cili jep sasinë x të ofruar në treg të një prodhimi në varësi nga çmimi p i një njësie quhet *funksion i ofertës.*

   Një treg quhet *i balansuar* në qoftë se kërkesa është e barabartë me ofertën.

   Gjeni sasinë e prodhimit dhe çmimin ashtu që të arrihet balansi i tregur në qoftë se janë dhënë funksioni i kërkesës $x = -5p + 10$ dhe funksioni i ofertës $x = 2p - 7.5$.

4. Janë dhënë funksioni i kërkesës $x = -\frac{p^2}{5} + 10$ dhe funksioni i ofertës $x = \frac{p^2}{2} - 7.5$.

   (a) Përcaktoni çmimin e prodhimit ashtu që të kemi ekuilibër tregu.

   (b) Njehsoni sasinë e prodhimit për të cilën tregu është i ekuilibruar.

5. Një ndërmarrës vlerëson se kostoja fikse e biznesit të tij do të jetë 2,500 € në muaj dhe se kostoja variabile do të rritet linearisht. Në qoftë se kostoja variabile për prodhimin e 1500 njësish do të jetë 22,500 € në muaj, kurse çmimi i shitjes nën kushtet e tregut të ekuilibruar është 25 € për njësi, gjeni sasinë e prodhimit për të cilën biznesi i tij arrin pikën e rentabilitetit. Sa është kostoja totale në atë pikë?

1.2 Matricat dhe përcaktorët. Zgjidhja e sistemeve të tri ekuacioneve me metodën e Cramer-it

Në zbatime praktike paraqiten poashtu sisteme të tri apo më tepër ekuacionesh. Në vazhdim to të marrim në shqyrtim një shembull tjetër, i cili përbëhet nga tri ekuacione me tri të panjohura. Është tepër e rëndësishme të mbajmë në mend se, për të qenë e mundur që sistemi të ketë një zgjidhje të vetme, *numri i ekuacioneve duhet të jetë i njëjtë sikur numri i ndryshoreve.*

Shembull 1. Në një biznes makinash automobilistike, veturat më të popullarizuara janë të Tipit A, B dhe C. Meqë blerësit zakonisht bëjnë tregti për çmimin më të volitshëm, çmimi i shitjes për secilin tip nuk është i njëjtë. Tabela 1.1 tregon shitjet dhe të hyrat për një periudhë tremujore. Paraqitni ekuacionet për llogaritjen e çmimit mesatar të shitjes për secilin nga tipet e veturave.

Muaji	**Tipi A**	**Tipi B**	**Tipi C**	**Të hyrat**
1	25	62	54	2,756,000 €
2	28	42	58	2,695,000 €
3	45	53	56	3,124,000 €

Tabela 1.1. Shitjet dhe të ardhurat nga veturat.

Zgjidhje. Në këtë shembull, të panjohurat janë çmimet mesatare të shitjes për këto tipe makinash. I shënojmë këto me x për Tipin A, y për Tipin B dhe z për Tipin C. Atëherë shitjet për secilën nga periudhat mund të paraqiten me sistemin vijues të ekuacioneve

$$\begin{aligned} 25x + 62y + 54z &= 2756000 \\ 28x + 42y + 58z &= 2695000 \\ 45x + 53y + 56z &= 3124000. \end{aligned} \tag{1}$$

$\square$

Detyra jonë në vazhdim do të jetë të zgjidhen këto ekuacione njëkohësisht, d.m.th. të gjenden vlerat e të panjohurave x, y dhe z të cilat plotësojnë të tre ekuacionet njëkohësisht.

Në vazhdim të kësaj pike do të shqyrtojmë ca elemente të teorisë së matricave dhe një metodë për zgjidhjen e sistemeve të tilla të ekuacioneve lineare. Shembullit 1 do t'i kthehemi sërish nga fundi i pikës.

Matricë quhet një tabelë drejtkëndëshe numrash, sikur këto të mëposhtmet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ose} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -5 & 21 & -3 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Në formë të përgjithshme, një matricë A shënohet me

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Numrat a_{ij} janë *elementet* (ose *kufizat*) e matricës, ku indeksi i tregon rreshtin dhe j tregon shtyllën në të cilën është i vendosur elementi a_{ij}.

Për një matricë me m rreshta dhe n shtylla thuhet se është *matricë e rendit* $m \times n$.

Në qoftë se $m = n$, matrica quhet *matricë katrore* e rendit n (ose m).

Kështu, për shembull, a_{32} paraqet elementin e pozicionuar në rreshtin e tretë dhe shtyllën e dytë; dy matricat tona të para janë të rendeve 2×3, përkatësisht 3×3. Më tutje, për një matricë e cila ka 5 rreshta dhe 5 shtylla themi se është matricë katrore e rendit 5.

Shpesh, me qëllim evitimi të shënimit të stërzgjatur të matricës A nga ekuacioni (2), shënojmë shkurt $A = [a_{ij}]$.

Për dy matrica të të njëjtit rend, d.m.th. që kanë numër të barabartë rreshtash dhe numër të barabartë shtyllash me njëra tjetrën, përkufizojmë mbledhjen dhe zbritjen e tyre si vijon.

Shuma e dy matricave $A = [a_{ij}]$ dhe $B = [b_{ij}]$ të të njëjtit rend është matrica C e rendit të njëjtë sikur A dhe B, elementet e së cilës janë të barabartë me shumën e elementeve përkatës të A dhe B; pra $C = A + B = [c_{ij}]$, ku $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ për të gjitha vlerat e i dhe j.

Ndryshimi i dy matricave $A = [a_{ij}]$ dhe $B = [b_{ij}]$ të të njëjtit rend është matrica C e rendit të njëjtë sikur A dhe B, elementet e së cilës janë të barabartë me ndryshimin e elementeve përkatës të A dhe B; pra $C = A - B = [c_{ij}]$, ku $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ për çdo i e j.

Shembull 2. Llogaritni $A + B$ dhe $A - B$ në qoftë se janë dhënë

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{dhe} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zgjidhje.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2-1 & 6+0 \\ 2-2 & -3+3 & 5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

dhe

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-3 & 2+1 & 6-0 \\ 2+2 & -3-3 & 5-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Siç pamë, matrica është një tabelë numrash. Një matrice katrore do t'i shoqërojmë një numër të vetëm, si karakteristikë e cila „e përcakton“ matricën – *përcaktorin* e saj.

Në qoftë se A është një matricë katrore e rendit 2, d.m.th.,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

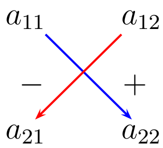
atëherë *përcaktori* (ose *determinanta*) i A, shënohet me $\det A$, është

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ndonjëherë, për përcaktorin e një matricës A përdorim edhe shënimin e drejtpërdrejt[5]

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

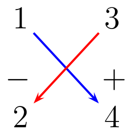
Skica vijuese na ndihmon për të mbajtur në mend më lehtë mënyrën e llogaritjes së përcaktorit të një matrice të rendit të dytë. Në të është treguar se prodhimi i formuar sipas diagonales prej sipër majtas nga poshtë djathtas zbritet me prodhimin e formuar sipas diagonales prej sipër djathtas nga poshtë majtas.



Shembull 3. Llogaritni $\det A$ dhe $\det B$ për matricat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{dhe} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zgjidhje. Sipas skemës



kemi

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Ngashëm

$$\det B = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-2) - 1 \cdot 0 = 6,$$

$\square$

Në pikën vijuese do të njihemi me një përkufizim më të përgjithësuar të përcaktorit të një matrice katrore të rendit n, kurse tani për tani do të mjaftohemi me përkufizimin e përcaktorit të një matrice të rendit 3.

[5] Vëreni përdorimin e vijave vertikale $|\cdot|$ për përcaktorë në vend të kllapave të mesme $[\cdot]$ për matrica.

Në qoftë se A është një matricë katrore e rendit 3, d.m.th.,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

atëherë *përcaktori* i A, është

$$\begin{aligned} \det A = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Një metodë e përshtatshme për të gjetur përcaktorin e një matrice të rendit të tretë është të përshkruhen dy shtyllat e para në të djathtë të matricës, dhe mbledhen prodhimet të formuara sipas diagonales prej sipër majtas nga poshtë djathtas, pastaj zbriten prodhimet të formuara sipas diagonales prej sipër djathtas nga poshtë majtas, siç është treguar në skicën vijuese.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \qquad + \qquad -$$

Shembull 4. Llogaritni $\det A$ dhe $\det B$ për matricat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{dhe} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zgjidhje. Rikujtojmë skemën nga mësipër:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -8 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 9 & 3 & -6 \end{array}$$

d.m.th.,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot (-8) \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot (-6)$$
$$- 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot (-8) \cdot (-6) - 4 \cdot 2 \cdot 9 = -360.$$

Ngjashëm,

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (-2) \cdot 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot (-4)$$
$$- 1 \cdot 0 \cdot 0 - (-2) \cdot (-2) \cdot (-4) - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 3.$$

□

I kthehemi tani sërish zgjidhjes së sistemeve të ekacioneve lineare. Marrim në shqyrtim sistemin e tri ekuacioneve

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3. \end{aligned}$$

Rregulla vijuese na mundëson gjetjen e zgjidhjeve të një sistemi ekuacionesh lineare me anë të përcaktorëve.

Rregulla e Cramer-it. Të panjohurat x, y dhe z mund të gjenden nga relacionet

$$x = \frac{d_1}{\det A}, \quad y = \frac{d_2}{\det A}, \quad z = \frac{d_3}{\det A},$$

ku

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

është përcaktori i *matricës A të sistemit,* kurse

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

janë përcaktorët të cilët formohen nga përcaktori i matricës së sistemit duke zëvendësuar shtyllën e koeficientëve pranë të panjohurës së kërkuar me shtyllën e vlerave b_1, b_2 dhe b_3 nga anët e djathta të ekuacioneve.

Rregulla e Cramer-it zbatohet edhe për sistemet e dy ekuacioneve (shihni detyrën 3).

Shembull 5. Zgjidhim tani sistemin (1) nga shembulli 1:

$$\begin{aligned}25x + 62y + 54z &= 2756000\\28x + 42y + 58z &= 2695000\\45x + 53y + 56z &= 3124000.\end{aligned}$$

Zgjidhje. Kemi

$$\begin{aligned}\det A = \begin{vmatrix}25 & 62 & 54\\28 & 42 & 58\\45 & 53 & 56\end{vmatrix}\\ &= 25\cdot 42\cdot 56 + 62\cdot 58\cdot 45 + 54\cdot 28\cdot 53\\ &\quad - 54\cdot 42\cdot 45 - 25\cdot 58\cdot 53 - 62\cdot 28\cdot 56 = 821,\end{aligned}$$

kurse

$$\begin{aligned}d_1 = \begin{vmatrix}2756000 & 62 & 54\\2695000 & 42 & 58\\3125000 & 53 & 56\end{vmatrix}\\ &= 2756000\cdot 42\cdot 56 + 62\cdot 58\cdot 3125000 + 54\cdot 2695000\cdot 53\\ &\quad - 54\cdot 42\cdot 3125000 - 2756000\cdot 58\cdot 53 - 62\cdot 2695000\cdot 56\\ &= 17163000,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_2 = \begin{vmatrix}25 & 2756000 & 54\\28 & 2695000 & 58\\45 & 3125000 & 56\end{vmatrix}\\ &= 25\cdot 2695000\cdot 56 + 2756000\cdot 58\cdot 45 + 54\cdot 28\cdot 3125000\\ &\quad - 54\cdot 2695000\cdot 45 - 25\cdot 58\cdot 3125000 - 2756000\cdot 28\cdot 56\\ &= 9653000\end{aligned}$$

dhe

$$d_3 = \begin{vmatrix}25 & 62 & 2756000\\28 & 42 & 2695000\\45 & 53 & 3125000\end{vmatrix}$$

$$= 25 \cdot 42 \cdot 3125000 + 62 \cdot 2695000 \cdot 45 + 2756000 \cdot 28 \cdot 53$$
$$- 2756000 \cdot 42 \cdot 45 - 25 \cdot 2695000 \cdot 53 - 62 \cdot 28 \cdot 3125000$$
$$= 22872500.$$

Prandaj,

$$x = \frac{d_1}{\det A} = \frac{17163000}{821} \approx 20904.99, \tag{3}$$
$$y = \frac{d_2}{\det A} = \frac{9653000}{821} \approx 11757.61, \tag{4}$$
$$z = \frac{d_3}{\det A} = \frac{22872500}{821} \approx 27859.32. \tag{5}$$

$\square$

Detyra për ushtrime

1. Për matricat A, B, C, D të dhëna me

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tregoni se a janë të mundura veprimet vijuese, dhe në qoftë se po, gjeni rezultatin.

(a) $A + B$;

(b) $A + C$;

(c) $A - B$;

(d) $B + D$;

(e) $C + D$;

(f) $B + A$;

(g) $B - A$;

(h) $A - D$.

2. Duke operuar nga dy uzina, Kompania e Paisjeve të Librave prodhon rafte dhe dollapë librash. Matrica A përmbledh prodhimtarinë e saj për

një javë, duke paraqitur në rreshtin 1 numrin e rafteve dhe në rreshtin 2 numrin e dollapëve. Matrica B jep prodhimtarinë për javën e dytë.

$$A = \begin{bmatrix} 50 & 30 \\ 36 & 44 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 30 & 45 \\ 22 & 62 \end{bmatrix}.$$

Në qoftë se shtylla 1 në secilën matricë paraqet prodhimtarinë e uzinës 1 dhe shtylla 2 paraqet prodhimtarinë e uzinës 2, atëherë:

(a) Gjeni matricën e cila përshkruan prodhimtarinë për periudhën 2-javore.

(b) gjeni matricën e cila përshkruan ngritjen në prodhimin nga java e parë deri në javën e dytë.

3. Formuloni rregullën e Cramer-it për sisteme dy ekuacionesh lineare (me dy të panjohura).

4. Të zgjidhen me metodën e Cramer-it sistemet vijuese të ekuacioneve lineare:

(a) $$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 19 \\ 3x - 2y &= 11 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} 12x - 7y &= 110 \\ 8x - 3y &= 90 \end{aligned}$$

5. Të zgjidhen me metodën e Cramer-it sistemet vijuese të ekuacioneve lineare:

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 2v_1 - 5 - v_2 + 3v_3 &= 0 \\ -2v_3 - 3v_2 - 4v_1 &= 8 \\ v_2 + 3v_1 - 4 - v_3 &= 0 \end{aligned}$$

1.3 Përcaktorët e matricave të rendeve të larta

Marrim në shqyrtim shembullin vijues, nga i cili fitohet një sistem katër ekuacionesh lineare me katër të panjohura.

Shembull 1. Një korporatë përbëhet nga 4 departamente. Produktiviteti i secilit departament ndikon nevojat e punës të departamenteve tjera. Tabela 1.2 tregon sasinë e prodhimit të departamentit të i-të të nevojshme për prodhimin e një njësie të departamentit të j-të, dhe sasitë (të shprehura në njësi përkatëse) e produkteve finale të planifikuara për secilin departament. Paraqitni ekuacionet për llogaritjen e vëllimeve të prodhimit të departamenteve.

Dept.	**Koeficientët**				**Prodhimi final**
	1	2	3	4	
1	0.1	0.1	0.2	0.1	500
2	0.2	0.3	0.3	0.2	100
3	0.2	0.1	0.3	0.1	200
4	0.2	0	0	0.1	1000

Tabela 1.2. Koeficientët e ndikimeve ndërmjet departamenteve

Zgjidhje. Shënojmë me q_1, q_2, q_3, q_4 sasitë (të panjohura) e prodhimit të departamentit 1, 2, 3 dhe 4. Atëherë, vëllimet e prodhimit të secilit nga departamentet mund të paraqiten me ekuacionet vijuese:

$$\begin{aligned}
q_1 &= 0.1q_1 + 0.1q_2 + 0.2q_3 + 0.1q_4 + 500\\
q_2 &= 0.2q_1 + 0.3q_2 + 0.3q_3 + 0.2q_4 + 100\\
q_3 &= 0.2q_1 + 0.1q_2 + 0.3q_3 + 0.1q_4 + 200\\
q_4 &= 0.2q_1 + \quad 0q_2 + \quad 0q_3 + 0.1q_4 + 1000.
\end{aligned}$$

Pas grupimit të të panjohurave nga anët e majta të barazimeve, fitojmë sistemin e ekuacioneve lineare

$$\begin{aligned}
0.9q_1 - 0.1q_2 - 0.2q_3 - 0.1q_4 &= 500\\
-0.2q_1 + 0.7q_2 - 0.3q_3 - 0.2q_4 &= 100\\
-0.2q_1 - 0.1q_2 + 0.7q_3 - 0.1q_4 &= 200\\
-0.2q_1 \qquad\qquad\qquad\quad + 0.9q_4 &= 1000.
\end{aligned} \tag{1}$$

□

Detyra jonë vijuese është zgjidhja e një sistemi të tillë ekuacionesh lineare, d.m.th., në shembullin tonë, gjetja e vlerave të të panjohurave q_1, q_2, q_3, q_4 ashtu që të plotësohen të katër ekuacionet.

Në rastin e përgjithshëm, metoda e Cramer-it mund të formulohet, në mënyrë analoge sikur për sistemet e tri ekuacioneve, edhe për sistemet e katër (ose më tepër) ekuacionesh lineare. Si rezultat, fitohen për t'u llogaritur përcaktorë matricash të rendit të katërtë (ose më tepër). Problemi qëndron në faktin se metoda e përshkruar në pikën paraprake nuk mund të zbatohet për llogaritjen e përcaktorit të një matrice të rendit më të lartë se 3. Për të gjetur përcaktorët e matricave të rendeve të larta, së pari duhet llogaritur *kofaktorët*, të cilët do t'i përkufizojmë në vazhdim.

Le të jetë A një matricë katrore e rendit n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Në qoftë se largojmë nga matrica A rreshtin e i-të dhe shtyllën e j-të, përcaktori i matricës së mbetur katore të rendit $n-1$ quhet *minor* i matricës A, dhe zakonisht e shënojmë me M_{ij}.

Prodhimi

$$(-1)^{i+j} M_{ij},$$

i minorit me parashenjën përkatëse, quhet *kofaktor i elementit* a_{ij}, dhe shënohet me α_{ij}.

Shembull 2. Llogaritni kofaktorët e matricës

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zgjidhje. Llogarisim kofaktorët. Kemi

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^3M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (-1)^4M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = (-1)^5M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (-1)^4M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = (-1)^5M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = (-1)^6M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

□

Kalojmë tani në gjetjen e përcaktorëve të matricave të rendeve të larta.

Përcaktori i një matrice A të rendit n ($n > 1$) është shuma e prodhimeve të elementeve të një rreshti ose një shtylle me kofaktorët e vetë; d.m.th., sipas rreshtit të i-të

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in},$$

ose sipas shtyllës së j-të

$$\det A = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}.$$

Tani mund të llogarisim vlerën e përcaktorit të matricës nga shembulli 2.

Shembull 3. Llogaritni përcaktorin e matricës

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zgjidhje. Llogaritjen e përcaktorit mund ta bëjmë sipas elementëve të cilitdo rresht ose shtyllë. Mirëpo, për ta lehtësuar punën, zakonisht zgjedhim rreshtin ose shtyllën e cila ka më së tepërmi vlera zero. Në rastin tonë kjo është shtylla e parë (ose rreshti i tretë). Llogarisim, për shembull, sipas shtyllës së parë. Kemi

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \alpha_{11} + 0 \cdot \alpha_{21} + 0 \cdot \alpha_{31} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

□

Testoni rezultatin e fituar në shembullin e mësipërm duke gjetur përcaktorin e matricës me anë të metodës së mësuar në pikën 1.2.

Me metodën e re mund të llogarisim përcaktorin e një matrice të rendit më të lartë se 3.

Shembull 4. Llogaritni përcaktorin e matricës vijuese të rendit të katërtë

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zgjidhje. Llogarisim, për shembull, sipas rreshtit të tretë. Kemi

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 0 \cdot \alpha_{31} + 1 \cdot \alpha_{32} + 0 \cdot \alpha_{33} + 1 \cdot \alpha_{34} \\ &= 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^5 \cdot 10 + (-1)^7 \cdot 12 = -22. \end{aligned}$$

□

Tani jemi në gjendje të zgjidhim sistemin (1), të fituar në shembullin 1.

Shembull 5. Zgjidhni sistemin e katër ekuacioneve lineare

$$\begin{aligned}
0.9q_1 - 0.1q_2 - 0.2q_3 - 0.1q_4 &= 500\\
-0.2q_1 + 0.7q_2 - 0.3q_3 - 0.2q_4 &= 100\\
-0.2q_1 - 0.1q_2 + 0.7q_3 - 0.1q_4 &= 200\\
-0.2q_1 \qquad\qquad\qquad\quad + 0.9q_4 &= 1000.
\end{aligned}$$

Zgjidhje. Sipas metodës së Cramer-it kemi

$$q_1 = \frac{d_1}{\det A}, \quad q_2 = \frac{d_2}{\det A}, \quad q_3 = \frac{d_3}{\det A}, \quad q_4 = \frac{d_4}{\det A},$$

ku

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 & -0.1\\ -0.2 & 0.7 & -0.3 & -0.2\\ -0.2 & -0.1 & 0.7 & -0.1\\ -0.2 & 0 & 0 & 0.9 \end{vmatrix}\\
&= -0.2 \cdot \alpha_{41} + 0 \cdot \alpha_{42} + 0 \cdot \alpha_{43} + 0.9 \cdot \alpha_{44}\\
&= -0.2 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -0.1 & -0.2 & -0.1\\ 0.7 & -0.3 & -0.2\\ -0.1 & 0.7 & -0.1 \end{vmatrix} + 0.9 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2\\ -0.2 & 0.7 & -0.3\\ -0.2 & -0.1 & 0.7 \end{vmatrix}\\
&= 0.3096,
\end{aligned}$$

kurse

$$\begin{aligned}
d_1 &= \begin{vmatrix} 500 & -0.1 & -0.2 & -0.1\\ 100 & 0.7 & -0.3 & -0.2\\ 200 & -0.1 & 0.7 & -0.1\\ 1000 & 0 & 0 & 0.9 \end{vmatrix}\\
&= 1000 \cdot \alpha_{41} + 0 \cdot \alpha_{42} + 0 \cdot \alpha_{43} + 0.9 \cdot \alpha_{44}\\
&= 1000 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -0.1 & -0.2 & -0.1\\ 0.7 & -0.3 & -0.2\\ -0.1 & 0.7 & -0.1 \end{vmatrix} + 0.9 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 500 & -0.1 & -0.2\\ 100 & 0.7 & -0.3\\ 200 & -0.1 & 0.7 \end{vmatrix}\\
&= 326.7,
\end{aligned}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 0.9 & 500 & -0.2 & -0.1\\ -0.2 & 100 & -0.3 & -0.2\\ -0.2 & 200 & 0.7 & -0.1\\ -0.2 & 1000 & 0 & 0.9 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= -0.2\cdot\alpha_{41} + 1000\cdot\alpha_{42} + 0\cdot\alpha_{43} + 0.9\cdot\alpha_{44}\\
&= -0.2\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}500 & -0.2 & -0.1\\ 100 & -0.3 & -0.2\\ 200 & 0.7 & -0.1\end{vmatrix} + 1000\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}0.9 & -0.2 & -0.1\\ -0.2 & -0.3 & -0.2\\ -0.2 & 0.7 & -0.1\end{vmatrix}\\
&\quad + 0.9\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}0.9 & 500 & -0.2\\ -0.2 & 100 & -0.3\\ -0.2 & 200 & 0.7\end{vmatrix} = 383.5,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_3 &= \begin{vmatrix}0.9 & -0.1 & 500 & -0.1\\ -0.2 & 0.7 & 100 & -0.2\\ -0.2 & -0.1 & 200 & -0.1\\ -0.2 & 0 & 1000 & 0.9\end{vmatrix}\\
&= -0.2\cdot\alpha_{41} + 0\cdot\alpha_{42} + 1000\cdot\alpha_{43} + 0.9\cdot\alpha_{44}\\
&= -0.2\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-0.1 & 500 & -0.1\\ 0.7 & 100 & -0.2\\ -0.1 & 200 & -0.1\end{vmatrix} + 1000\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}0.9 & -0.1 & -0.1\\ -0.2 & 0.7 & -0.2\\ -0.2 & -0.1 & -0.1\end{vmatrix}\\
&\quad + 0.9\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}0.9 & -0.1 & 500\\ -0.2 & 0.7 & 100\\ -0.2 & -0.1 & 200\end{vmatrix} = 296.1
\end{aligned}
$$

dhe

$$
\begin{aligned}
d_4 &= \begin{vmatrix}0.9 & -0.1 & -0.2 & 500\\ -0.2 & 0.7 & -0.3 & 100\\ -0.2 & -0.1 & 0.7 & 200\\ -0.2 & 0 & 0 & 1000\end{vmatrix}\\
&= -0.2\cdot\alpha_{41} + 0\cdot\alpha_{42} + 1000\cdot\alpha_{43} + 1000\cdot\alpha_{44}\\
&= -0.2\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-0.1 & 500 & 500\\ 0.7 & 100 & 100\\ -0.1 & 200 & 200\end{vmatrix} + 1000\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}0.9 & -0.1 & -0.2\\ -0.2 & 0.7 & -0.3\\ -0.2 & -0.1 & 0.7\end{vmatrix}\\
&= 416.6.
\end{aligned}
$$

Prandaj,

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{d_1}{\det A} = \frac{326.7}{0.3096} \approx 1055.23,\\
q_2 &= \frac{d_2}{\det A} = \frac{383.5}{0.3096} \approx 1238.70,\\
q_3 &= \frac{d_3}{\det A} = \frac{296.1}{0.3096} \approx 956.40,
\end{aligned}
$$

$$q_4 = \frac{d_4}{\det A} = \frac{416.6}{0.3096} \approx 1345.61.$$

Përfundimisht, meqë në zbatimin tonë q_1, q_2, q_3, q_4 paraqesin sasi prodhimi të shprehur në njësitë përkatëse, kemi

$$q_1 \approx 1055, \quad q_2 \approx 1239, \quad q_3 \approx 956, \quad q_4 \approx 1346.$$

□

Detyra për ushtrime

1. Llogaritni kofaktorët e matricave

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

   (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$;

   (c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

   (d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Llogaritni përcaktorët e matricave A, B, C, D nga detyra 1.

3. Të zgjidhet sistemi vijues i katër ekuacioneve lineare

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 14 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 9 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 19 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &= 27. \end{aligned}$$

4. Një biznes makinash automobilistike, shet vetura të Tipit A, B, C dhe D. Për shkak të negociatave me blerësit për çmimin më të volitshëm, çmimi i shitjes për secilin tip nuk është i njëjtë. Tabela vijuese tregon shitjet dhe të hyrat për një periudhë tremujore. Llogaritni çmimin mesatar të shitjes për secilin nga tipet e veturave.

Muaji	Tipi A	Tipi B	Tipi C	Tipi D	Të hyrat
1	25	60	50	10	3,235,000 €
2	28	42	58	13	2,870,000 €
3	45	53	56	15	3,420,000 €
4	45	50	50	15	3,235,000 €

5. Një korporatë përbëhet nga 4 departamente. Produktiviteti i secilit departament ndikon nevojat e punës të departamenteve tjera sipas tabelës vijuese, e cila tregon sasinë e prodhimit të departamentit të i-të të nevojshme për prodhimin e një njësie të departamentit të j-të, dhe sasitë (të shprehura në njësi përkatëse) e produkteve finale të planifikuara për secilin departament. Llogaritni vëllimet e prodhimeve të

Dept.	Koeficientët				Prodhimi final
	1	2	3	4	
1	0.6	0.002	0	0	1000
2	0.1	0.2	0	0.005	1000
3	0	0.1	0.3	0	1000
4	0.2	0.3	0.4	0.6	1000

departamenteve.

6. Vërtetoni se përkufizimi i përcaktorit të një matrice të rendit n, i dhënë në këtë pikë, për $n = 2$ është i njëjti me përkufizimin e përcaktorit të një matrice të rendit 2 të dhënë në pikën 1.2.

7. Vërtetoni se përkufizimi i përcaktorit të një matrice të rendit n, i dhënë në këtë pikë, për $n = 3$ është i njëjti me përkufizimin e përcaktorit të një matrice të rendit 3 të dhënë në pikën 1.2.

1.4 Shumëzimi i matricave. Matrica inverse

Me anë të metodës së Cramer-it, duke zbërthyer përcaktorët sipas një rreshti ose një shtylle, parimisht, mund të zgjidhim sisteme ekuacionesh lineare me çfarëdo numri të panjohurash. Mirëpo, në rastin e përgjithshëm, për të zgjidhur një sistem prej 5 ekuacionesh me 5 të panjohura duhet llogaritur 5 përcaktorë të rendit 5, e për llogaritjen e secilit prej tyre duhet llogaritur nga 5 përcaktorë të rendit 4, dhe më tutje, për secilin prej këtyre të fundit nga 4 përcamtorë të rendit 3; d.m.th., gjithsej 100 përcaktorë të rendit 3. Puna vështirësohet edhe më në rastet e sistemeve me më tepër të panjohura. Për ngushllim mund të nga shërbejnë vetëm faktet se, siç pamë në pikën 1.3, në rast elementesh 0 mund të evitohet llogaritja e përcaktorëve përkatës dhe se disa nga përcaktorët përsitjen gjatë llogaritjeve.

Metoda vijuese na mundëson të zgjidhim një sistem ekuacionesh lineare duke eliminuar njërën pas tjetrës të panjohurat në ekuacionet e sistemit, për ta transformuar kështu në një sistem ekuivalent i cili është më i lehtë për t'u zgjidhur.

Përshkruajmë këtë metodë me një shembull.

Shembull 1. Zgjidhni sistemin

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 \qquad + 3x_4 &= 4\\
2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1\\
3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3\\
-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4
\end{aligned}$$

Zgjidhje. Përshkruajmë ekuacionin e parë, shumëzojmë ekuacionin e parë me 2 dhe e zbresim nga i dyti, pastaj shumëzojmë të parin me 3 dhe e zbresim nga i treti dhe, në fund, i mbledhim të parin ekuacionit të katërtë. Si rezultat, fitojmë sistemin ekuivalent

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 \qquad + 3x_4 &= 4\\
-x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7\\
-4x_2 - x_3 - 7x_4 &= -15\\
3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 8.
\end{aligned}$$

Në sistemin e ri, me qëllim eliminim të ndryshores x_2 nga ekuacioni i tretë dhe ai i katërtë, shumëzojmë ekuacionin e dytë me 4 dhe ia zbresim të tretit, pastaj shumëzojmë ekuacionin e dytë me 3 dhe ia mbledhim të katërtit, për të fituar

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 \qquad\quad + \ \ 3x_4 &= \ \ \ 4 \\ -x_2 - \ \ x_3 - \ \ 5x_4 &= -7 \\ +\,3x_3 + 13x_4 &= \ \ 13 \\ -\,13x_4 &= -13. \end{aligned}$$

Sistemin e fundit mund ta zgjidhim duke gjetur së pari vlerën për x_4 nga ekuacioni i fundit

$$x_4 = \frac{-13}{-13} = 1,$$

pastaj vlerën e fituar e zëvendësojmë në ekuacionin e parafundit për të gjetur x_3

$$3x_3 = 13 - 13x_4,$$

ose

$$x_3 = \frac{1}{3}(13 - 13 \cdot 1) = 0,$$

dhe kështu me rradhë deri tek ekuacioni i parë:

$$\begin{aligned} x_2 &= -(-7 + 5x_4 + x_3) = -(-7 + 5 \cdot 1 + 0) = 2, \\ x_1 &= 4 - 3x_4 - x_2 = 4 - 3 - 2 = -1. \end{aligned}$$

□

Metoda e tillë e zgjidhjes së sistemeve të ekuacioneve lineare quhet metoda e eliminimit e Gauss-it.

Edhe më lehtë, pa i shënuar fare ndryshoret e ekuacioneve, metodën do të mund ta zbatonim duke e aplikuar në *matricën e zgjeruar të sistemit*, e cila përbëhet nga matrica e koeficientëve të sistemit, të cilës i përshkruhet nga e djathta shtylla e lirë. Pastaj veprimet kryhen mbi elementët e kësaj matrice.

Përkujtojmë se në pikën 1.2 kemi përkufizuar mbledhjen dhe zbritjen e dy matricave. Përkufizojmë në vazhdim dy veprime të reja me matrica: shumëzimin e matricës me *skalar* (numër) dhe shumëzimin e dy matricave.

Në qoftë se k është një numër (ose, *skalar*), atëherë *prodhimi skalar* i skalarit k me një matricë A është matrica B e rendit të njëjtë sikur A, elementet e së cilës janë të barabartë me prodhimin e elementëve përkatës të A me k; pra, $B = kA = [b_{ij}]$, ku $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Shembull 2. Shumëzoni skalarisht matricën

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

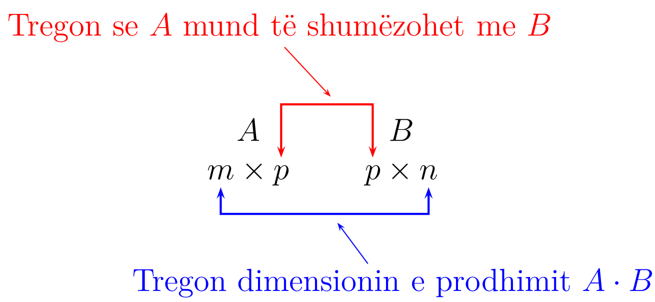
me numrin 5.

Zgjidhje.

$$kA = 5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 15 & -20 \end{bmatrix}.$$

□

Përkufizojmë në vazhdim *prodhimin matricor*, ose, shkurt, *prodhimin*, e një matrice A me një matricë B. Për këtë, është e nevojshme që numri i shtyllave të matricës A të jetë i barabartë me numrin e rreshtave të matricës B. Kështu, në qoftë se matrica A është e rendit $m \times p$, kurse matrica B e rendit $p \times n$, atëherë prodhimi $A \cdot B$ do të jetë matricë e rendit $m \times n$ (shihni skemën e mëposhtme).



Në qoftë se A është një matricë e rendit $m \times p$ dhe B është një matricë e rendit $p \times n$, atëherë *prodhimi matricor* i matricës A me B është matrica C e rendit $m \times n$, elementet e së cilës janë të barabarta me shumën e prodhimeve të elementeve të një rreshti të A me elementet përkatëse të një shtylle të B; pra, $C = AB = [c_{ij}]$, ku

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Shembull 3. Le të jenë

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Llogaritni prodhimet AB, AD, CD, DC.

Zgjidhje. Meqë dimensionet e matricave A e B janë 3×3 dhe 3×3, atëherë është i mundur prodhimi AB, dhe rezultati do të jetë sërish një matricë 3×3:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-3) \cdot 3 & 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 & 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-3) \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 11 & -4 & 11 \\ -13 & 2 & -13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Më tutje, meqë dimensionet e A e D janë, përkatësisht, 3×3 e 3×1, prodhimi AD do të jetë matricë e rendit 3×1:

$$\begin{aligned} AD &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ngjashëm, CD është matricë e rendit 1×1,

$$CD = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}.$$

Nga ana tjetër, DC është një matricë e rendit 3×3,

$$DC = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

□

Vërejmë në shembullin e mësipërm se $CD \neq DC$, që d.m.th. se shumëzimi matricor nuk e gëzon vetinë e ndërrimit. Por, mund të vërtetohet se gëzon vetinë e shoqërimit, d.m.th., në qoftë se për tri matrica A, B, C është i mundur prodhimi $(A \cdot B) \cdot C$, atëherë është i mundur edhe prodhimi $A \cdot (B \cdot C)$, dhe
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Pjesëtimi i një matrice me një tjetër nuk përkufizohet. Por, ekziston një veprim i ngjashëm, i cili përkufizohet me anë të *matricës inverse* të një matrice.

Së pari japim kuptimin e *matricës identike.*

Matricë identike I është një matricë katrore e cila i ka të gjitha elementet e diagonales të barabartë me 1, kurse të gjithë elementet tjerë të barabartë me 0.

Për shembull, matricat identike të rendeve 2×2, 3×3 dhe 4×4 janë

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Shembull 4. Gjeni prodhimin e një matrice katrore të rendit 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

me matricën identike I të rendit 2×2. Gjeni pastaj prodhimit IA.

Zgjidhje. Kemi

$$AI = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$

Poashtu,

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} & 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$

□

Mund të vërtetohet (shhni detyrën 6) se për çdo matricë katrore A të rendit n vlen

$$\boxed{AI = IA = A,}$$

ku I është matrica identike e rendit $n \times n$.

Për matricë katrore A të rendit n themi se është *josingulare* në qoftë se $\det A \neq 0$.

Në qoftë se A është një matricë josingulare, atëherë *matrica inverse* e A, e shënojmë me A^{-1}, quhet matrica e tillë që

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Por, shtrohet pyetja, si gjendet matrica inverse A^{-1} e një matrice josingulare A? Përgjegjjen e jep pohimi vijues.

Në qoftë se A është një matricë josingulare, atëherë matrica e saj inverse A^{-1} është

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A,$$

ku $\operatorname{adj} A$ është *matrica e adjonguar* e matricës A, e cila përbëhët nga kofaktorët sipas rreshtave të elementëve të A të rradhitur sipas shtyllave:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pra, vërejmë se kofaktorët e elementeve të rreshtit i-të të A janë elementët e shtyllës së i-të të $\operatorname{adj} A$.

Shembull 5. Gjeni matricën inverse të matricës

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zgjidhje. Në shembullin 2 kemi llogaritur kofaktorët e matricës A:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{21} = -2, \quad \alpha_{31} = 7, \\ &\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{22} = 1, \quad \alpha_{32} = -2, \\ &\alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{33} = 1. \end{aligned}$$

Prandaj

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Në shembullin 3 kemi llogaritur, poashtu, se $\det A = 1$. Kështu,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Shqyrtojmë, në fund, edhe një mënyrë të parqitjes së një sistemi ekuacionesh lineare *(trajtën matricore)*, dhe një zgjidhjen e sistemit me anë të matricës inverse.

Vëjmë, si zakonisht,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

si dhe

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Vërejmë barazimin (matricor)

$$AX = B. \tag{1}$$

Duke e zhvilluar sipas elementëve të rreshteve të matricës A dhe shtyllës X, fitojmë

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

d.m.th.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{2}$$

që pikërisht paraqet trajtën e përgjithshme të një sistemi n ekuacionesh lineare me n të panjohura.

Vërejmë se

$$\boxed{X = A^{-1}B} \tag{3}$$

është zgjidhja e ekuacionit (1).

Vërtet,

$$AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B.$$

Kështu, ekuacioni (3) na jep zgjidhjet e sistemit të ekuacioneve lineare (2) me anë të matricës inverse A^{-1} të matricës A të koeficientëve të sistemit.

Shembull 6. Zgjidhni sistemin

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -3 \\ x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Zgjidhje. Matrica e koeficientëve të sistemit është

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prandaj sistemi ynë mund të shkruhet në formën matricore

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Në shembullin 5 kemi gjetur matricën inverse

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prandaj, sipas formulës (3),

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

d.m.th.,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$$

$\square$

Zgjidhja me anë të matricës inverse e sistemit të ekuacioneve lineare, edhe pse në dukje të parë e thjeshtë, ka më tepër vlerë teorike sesa praktike; kjo për arsye se llogaritja e matricës inverse kërkon kryerjen e një numri të madh veprimesh, dhe si e tillë është e papërshtatshme për t'u zbatuar në praktikë.

Detyra për ushtrime

1. Supozoni se çmimet e blerjes dhe kostot e transportit për dru, fasadë dhe kulm për përdorim në ndërtimtari janë dhënë me tabelën 1.3. Gjeni matricën e cila paraqet kostot për njësi.

	Druri	**Fasada**	**Kulmi**
Blerja	6	4	2
Transporti	1	1	0.5

Tabela 1.3. Çmimet dhe kostot e transportit.

2. Për matricat A, B, C, D të dhëna me

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tregoni se a janë të mundura veprimet vijuese, dhe në qoftë se po, gjeni rezultatin.

(a) AB;
(b) AC;
(c) BD;
(d) CD;
(e) BA;
(f) CA;
(g) DA.

3. Të zgjidhet sistemi

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 &= 7 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 2 \\ -2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= -5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 &= 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

4. Të zgjidhet sistemi

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

   (a) me metodën e eliminimit të Gauss-it;
   (b) me metodën e Cramer-it;
   (c) me metodën e matricës inverse.

5. Cila është matrica katrore $D = [d_{ij}]$ e rendit n me vetinë

$$d_{ij} = 1 \quad \text{për } i = j$$

   dhe

$$d_{ij} = 0 \quad \text{për } i \neq j?$$

6. Tregoni se për çdo matricë katrore të rendit n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   vlen

$$AI = IA = A,$$

   ku I është matrica identike e rendit $n \times n$.