Kapitulli 1

Funksione të matematikës së biznesit

Në qoftë se vështrojmë marëdhëniet ndërmjet dukurive ekonomike të biznesit, mund të vërehen varësi ndërmjet tyre, të cilat shprehen si varësi funksionale ndërmjet madhësish të ndryshme. Në këtë rast është e natyrshme të flitet për *funksione të biznesit*. Natyrisht se edhe për këto funksione vlejnë ligjshmëritë e përgjithshme, formale, të matematikës, sigurisht, duke pasur gjithmonë parasysh që madhësitë e ndryshme kanë kuptim ekonomik përkatës. Në këtë kapitull do t'i përmendim disa funksione të biznesit, në të cilat do t'i zbatojmë njohuritë nga shqyrtimet e funksioneve, e në veçanti ato nga llogaritja e derivateve.

1.1 Funksioni i kërkesës

Edhepse kërkesa e një malli varet nga një varg faktorësh si: çmimi i këtij malli, çmimet e mallrave tjera në treg, standardi i konsumuesve, struktura e konsumuesve, shija e tyre, koha e shitjes (p.sh., sezona) dhe nga shumë faktorë tjerë, të gjithë këta faktorë nuk mund të merren në shqyrtim – një gjë e tillë është e pamundur.

Mirëpo lidhmëria ndërmjet sasisë së kërkuar të mallit dhe çmimit të tij tejkalon të gjithë faktorët e tjerë relevantë. Prandaj në vazhdim do të zbërthejmë këtë lidhmëri me anë të aparatit matematik.

Shënojmë me x sasinë e kërkuar (*kërkesën*) e një malli, kurse me p çmimin e tij në njësi monetare. Ndërmjet këtyre madhësive x dhe p ekziston një varësi funksionale

$$x = f(p).$$

Funksioni i tillë f quhet *funksion i kërkesës*.

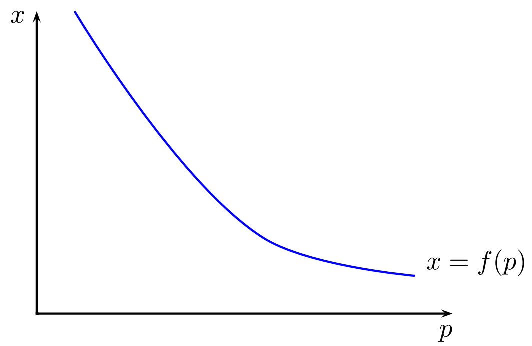

Figura 1.1: Paraqitja grafike e një funksioni kërkese

Në përgjithësi, me rritjen e çmimit p kërkesa bie (zvogëlohet), që do të thotë se funksioni i kërkesës është monoton zvogëlues (fig. 1.1).

Kështu, që $x = f(p)$ të paraqesë funksion të kërkesës duhet të plotësohen kushtet vijuese:

1. $p > 0$;

2. $x > 0$;

3. për derivatin $x' = f'(p)$ të funksionit të kërkesës vlen $x' < 0$.

Funksioni inverz (i anasjelltë) i funksionit të kërkesës është

$$p = \varphi(x),$$

ku $p' < 0$, dhe quhet *funksion i të hyrave mesatare* të prodhimit sipas kërkesës x.

Format më të shpeshta të funksionit të kërkesës janë

- $x = ap + b$ (funksion linear i kërkesës);

- $x = ap^2 + bp + c$ (funksion kuadratik i kërkesës);

- $x = ae^{bp}$ (funksion eksponencial i kërkesës);

- $x = ap^b$ (funksion fuqi i kërkesës).

Varësisht nga vlerat e parametrave a, b dhe c fitohen funksione të ndryshme të kërkesës. Caktimi i këtyre parametrave bëhet me metoda matematike–statistike.

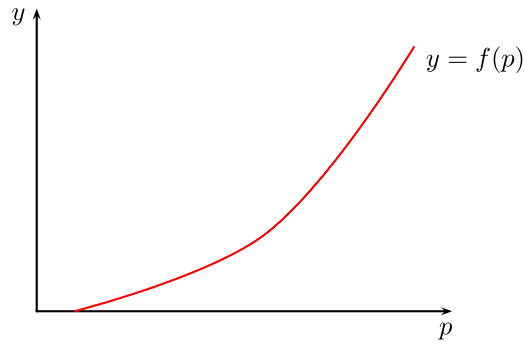

Figura 1.2: Paraqitja grafike e një funksioni oferte

1.2 Funksioni i ofertës

Ofertë e një malli është sasia e nxjerrë në treg sipas një çmimi të caktuar. Edhepse në sasinë e ofertës nuk ndikon vetëm çmimi i mallit i cili ofrohet, por përveç çmimit në ofertën ndikojnë edhe kostoja e prodhimit, kushtet kohore dhe teknologjike etj., ne do ta vështrojmë ofertën në varësi nga çmimi i prodhimit që ofrohet, meqë, sikur edhe në rastin e funksionit të kërkesë, është pikërisht kjo lidhmëri e cila tejkalon faktorët tjerë relevantë.

Shënojmë me y ofertën e një malli, kurse me p çmimin e tij. Ndërmjet këtyre madhësive ekziston një varësi funksionale

$$y = f(p),$$

e cila quhet *funksion i ofertës*.

Në parim, funksioni i ofertës është monoton rritës sepse me rritjen e çmimit rritet sasia e mallit e cila ofrohet (fig. 1.2).

Kështu, që $y = f(p)$ të paraqesë funksion të ofertës duhet të plotësohen kushtet vijuese:

1. $p > 0$;

2. $y > 0$;

3. për derivatin $y' = f'(p)$ të funksionit të ofertës vlen $y' > 0$.

Ngjashëm sikur ne rastin e funksionit të kërkesës, ekzistojnë forma të ndryshme funksionesh të ofertës, ku forma më e thjeshtë e funksionit të ofertës është funksioni linear

$$y = ap + b.$$

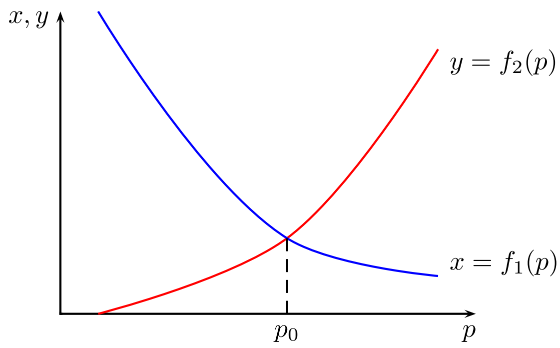

Figura 1.3: Paraqitja grafike e ekuilibrit të tregut

1.3 Ekuilibri i tregut

Në qoftë se janë caktuar funksionet ofertës dhe kërkesës së një prodhimi, atëherë mund të përcaktohet ekuilibri (baraspesha) e ofertës dhe kërkesës së atij prodhimi nga kushti që oferta të jetë e barabartë me kërkesën.

Kështu, në qoftë se me x shënojmë sasinë e kërkuar të mallit, kurse me y sasinë e ofruar, atëherë kushti i ekuilibrit të tregut është (shih fig. 1.3)

$$y = x.$$

Shembull 1. Janë dhënë funksioni i kërkesës së një prodhimi

$$x = -0.618p + 8.085$$

dhe funksioni tij i ofertës

$$y = 1.382p - 0.003.$$

Të përcaktohen çmimi dhe sasia e atij prodhimi ashtu që tregu të jetë i ekuilibruar.

Zgjidhje. Nga kushti i tregut të ekuilibruar

$$y = x$$

marrim

$$1.382p - 0.003 = -0.618p + 8.085,$$

prej nga

$$1.382p + 0.618p = 8.085 + 0.003,$$

ose

$$2p = 8.088,$$

d.m.th.

$$p = \frac{8.088}{2} = 4.044.$$

Duke zëvendësuar vlerën e fituar të p në cilindo nga barazimet fitojmë sasinë e nevojshme:

$$y = 1.382 \cdot 4.044 - 0.003 = 5.585808.$$

Pra ne qoftë se çmimi i këtij malli është $p = 4.044$, atëherë oferta dhe kërkesa e mallit të shqyrtuar do të jenë të barabarta. $\square$

Detyra për ushtrime

1. Eshtë dhënë funksioni i kërkesës

   (a) $x = -\frac{p^2}{5} + 20$;

   (b) $x = -\frac{p^2}{6} + 30$;

   (c) $x = -5p^2 + 50$;

   (d) $x = -4p^2 + 100$.

   Gjeni çmimin p varësisht nga sasia e kërkuar e mallit, pastaj llogaritni $p(10)$ dhe $p(2)$.

2. Është dhënë varësia vijuese e çmimit nga oferta për një artikull: $p = \sqrt{\frac{y}{4} + 25}$. Gjeni funksionin e ofertës, pastaj llogaritni vlerën $y(20)$.

3. Janë dhënë funksioni i kërkesës $x = -\frac{p^2}{5} + 10$ dhe funksioni i ofertës $y = \frac{p^2}{2} - 7.5$.

   (a) Përcaktoni çmimin e prodhimit ashtu që të kemi ekuilibër tregu.

   (b) Njehsoni sasinë e prodhimit për të cilën tregu është i ekuilibruar.

4. Janë dhënë funksionet vijuese të kërkesës dhe ofertës:

   (a) $x = -\frac{1}{2}p^2 + 7, \quad y = 2p - 3.5.$

   (b) $x = -\frac{1}{2}p^2 + 10, \quad y = p - 2.$

   (c) $x = -\frac{1}{3}p^2 + 4, \quad y = 2p - \frac{4}{3}.$

   (d) $x = -\frac{1}{3}p^2 + 10, \quad y = \frac{2}{3}p - \frac{5}{3}.$

   Caktoni çmimin e prodhimit ashtu që të kemi ekuilibër tregu. Njehsoni sasinë e prodhimit për të cilën tregu është i ekuilibruar.

1.4 Funksioni i të hyrave të përgjithshme

Me të hyra nënkuptojmë prodhimin ndërmjet sasisë së realizuar x dhe çmimit të caktuar p:

$$P = px,$$

ku P është vlera e të hyrave, p çmimi për njësi të prodhimit, kurse x kërkesa (d.m.th., sasia e realizuar).

Në qoftë se dihet funksioni i kërkesës, i cili, siç pamë në pikën 1.1, varet nga çmimi:

$$x = f(p),$$

atëherë të hyrat P janë funksion i një ndryshoreje:

$$P = p \cdot f(p). \tag{1}$$

Relacioni i fundit njihet si *funksion i të hyrave* (*të përgjithshme*) sipas çmimit.

Në qoftë se te funksioni i të hyrave zëvendësojmë çmimin p sipas funksionit inverz të funksionit të kërkesës

$$p = \varphi(x),$$

fitojmë të hyrat si funksion të sasisë së realizuar të prodhimit:

$$P = \varphi(x) \cdot x. \tag{2}$$

Ky relacion paraqet funksionin e të hyrave (të përgjithshme) sipas kërkesës.

Shembull 1. Eshtë dhënë funksioni i kërkesës $p^2 + 5x - 100 = 0$. Të llogaritet funksioni i të hyrave $P = P(x)$ në varësi nga kërkesa x. Pastaj të llogariten $P(2.5)$ dhe $P(3.25)$.

Zgjidhje. Së pari gjejmë funksionin inverz të funksionit të kërkesës. Kemi

$$p = \sqrt{100 - 5x},$$

kështu që, mbështetur në barazimin (2) për të hyrat fitojmë

$$P = x\sqrt{100 - 5x}.$$

Rrjedhimisht,

$$P(2.5) = 2.5 \cdot \sqrt{100 - 5 \cdot 2.5} \approx 23.39,$$
$$P(3.25) = 3.25 \cdot \sqrt{100 - 5 \cdot 3.25} \approx 29.74.$$

□

Duke zgjidhur sipas çmimit p shprehjen për të hyrat e përgjithshme $P = px$, fitojmë

$$p = \frac{P}{x},$$

d.m.th. shohim se çmimi paraqet, në fakt, të hyrat për njësi të sasisë së realizuar x, kështu që p mund të konsiderohet si vlerë e të hyrave mesatare. Pikërisht ky fakt arsyeton emërtimin e funksionit të të hyrave mesatare, të përkufizuar në pikën 1.1.

1.5 Të hyrat maksimale

Le të jetë funksioni i të hyrave $P(p)$ funksion i derivueshëm në intervalin e përkufizimit. Derivati i tij sipas p do të jetë

$$P'(p) = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{P(p + \Delta p) - P(p)}{\Delta p} = \frac{dP}{dp}.$$

Mbështetur në relacionin (1) nga pika paraprake,

$$P'(p) = f(p) + p \cdot f'(p),$$

ose

$$P'(p) = x + px'.$$

Duke pasur parasysh relacionin (2) nga e njëjta pikë, mund të gjejmë derivatin e funksioni të të hyrave sipas kërkesës x:

$$P'(x) = \varphi(x) + x \cdot \varphi'(x),$$

ose

$$P'(x) = p + xp',$$

Derivati i parë i funksionit të të hyrave quhet edhe *funksion margjinal i të hyrave.*

Shembull 1. Funksioni i kërkesës së një artikulli është $x = \frac{15-p}{2}$. Gjeni

(a) funksionin e të hyrave sipas çmimit;

(b) funksionin margjinal të të hyrave sipas çmimit.

(c) funksionin e të hyrave sipas kërkesës;

(d) funksionin margjinal të të hyrave sipas kërkesës.

Zgjidhje. (a) Nga $P = xp$ dhe kushtet e shembullit kemi

$$P = \frac{15-p}{2} \cdot p = \frac{15p - p^2}{2}.$$

(b) Ndërkaq

$$P'(p) = \frac{15}{2} - p.$$

(c) Nga ana tjetër, nga funksioni i kërkesës $x = \frac{15-p}{2}$ gjejmë funksionin e anasjelltë të tij

$$p = 15 - 2x.$$

Prej këtej

$$P = (15 - 2x)x = 15x - 2x^2.$$

(d) Duke derivuar këtë funksion gjejmë

$$P'(x) = 15 - 4x.$$

□

Shembull 2. Funksioni i të hyrave mesatare është $p = 1000 - 2x - 3x^2$. Caktoni funksionin e të hyrave të përgjithshme si dhe funksionin margjinal të të hyrave në varësi nga sasia e mallit të shitur.

Zgjidhje. Kemi

$$P = (1000 - 2x - 3x^2)x = 1000x - 2x^2 - 3x^3.$$
$$P'(x) = 1000 - 4x - 9x^2.$$

□

Nga parashenja e derivatit të parë të funksionit të të hyrave mund të konkludojmë se a janë në rritje apo zvogëlim të hyrat e përgjithshme, varësisht nga ndrshimi i çmimit dhe i kërkesës.

Edhe më e rëndësishme, funksioni derivat i funksionit të të hyrave së bashku me derivatin e dytë të tij shërbejnë për njehsimin e të hyrave maksimale (fig. 1.4).

Shembull 3. Eshtë dhënë funksioni i kërkesës $x = -p + 37000$. Caktoni çmimin dhe sasinë për të cilat të hyrat e përgjithshme do të jenë maksimale.

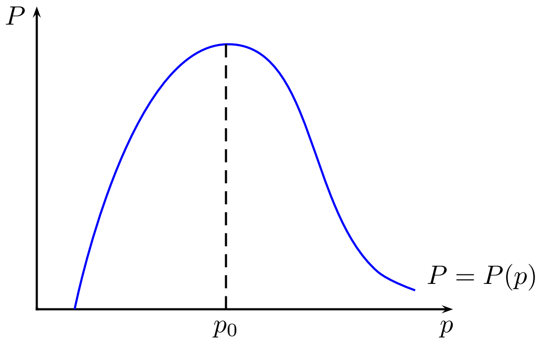

Figura 1.4: Paraqitja grafike e të hyrave maksimale

Zgjidhje. Meqë

$$P = (-p + 37000)p = -p^2 + 37000p,$$

kemi

$$P'(p) = -2p + 37000.$$

Zgjidhim ekuacionin

$$P'(p) = 0,$$

d.m.th.,

$$-2p + 37000 = 0,$$

për të fituar $p = 18500$.

Meqë $P''(p) = -2 < 0$, funksioni i të hyrave të përgjithshme ka vlerën maksimale për $p = 18500$.

Vlera e të hyrave maksimale është

$$P_{\max}(18500) = -18500^2 + 37000 \cdot 18500 = 342\,250\,000.$$

Sasinë e kërkuar e gjejmë nga funksioni i kërkesës:

$$x = -p + 37000 = -18500 + 37000 = 18500.$$

□

Detyra për ushtrime

1. Funksioni i kërkesës së një prodhimi është

   (a) $x = -2p + 4000$

   (b) $x = 8 - p$;

(c) $x = -p + 90$.

Gjeni çmimin dhe sasinë për të cilat të hyrat e përgjithshme me rastin e shtitjes së këtij malli do të jenë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?

2. Eshtë dhënë funksioni i të hyrave të përgjithshme $P = -3p^2 + 48p$. Llogaritni:

   (a) funksionin e kërkesës;

   (b) çmimin ashtu që të hyrat e përgjithshme të jenë maksimale;

   (c) të hyrat maksimale.

3. Funksioni i të hyrave mesatare është

   (a) $p = 2000 - \frac{x}{2}$;

   (b) $p = 1000 - 2x - 3x^2$;

   (c) $p = 3 - \sqrt{x}$;

   (d) $p = -3x + 3000 + \frac{80\,000}{x}$.

   Caktoni sasinë e mallit për të cilën të hyrat e përgjithshme janë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?

4. Funksioni i të hyrave mesatare është

   (a) $p = 9 - \sqrt{x}$;

   (b) $p = 9 - 2\sqrt{x}$;

   (c) $p = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{x}$;

   (d) $p = 3 - \sqrt{x}$.

   Caktoni sasinë e mallit për të cilën të hyrat e përgjithshme janë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?

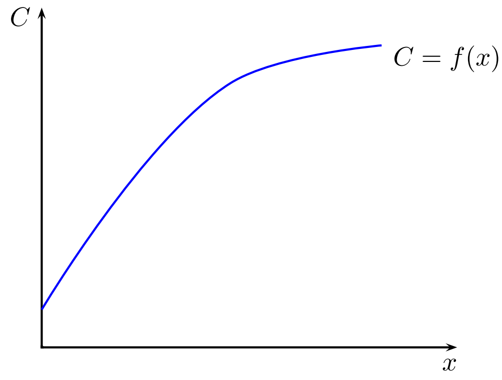

Figura 1.5: Paraqitja grafike e një funksioni kostoje

1.6 Funksionet e kostos

Funksioni i kostos së përgjithshme është një varësi funksionale ndërmjet sasisë së prodhimit dhe kostos (shpenzimeve) prodhuese:

$$C = f(x),$$

ku C është vlera e kostos së përgjithshme, kurse x numri i njësive të prodhuara.

Funksioni i kostos së përgjithshme është funksion monoton rritës dhe pozitiv (shih fig. 1.5).

Kështu, që $C = f(x)$ të paraqesë funksion të kostos së përgjithshme duhet të plotësohen kushtet vijuese:

1. $x > 0$;
2. $C > 0$;
3. për derivatin $C' = f'(x)$ të funksionit të kërkesës vlen $C' > 0$.

Në qoftë se funksioni i kostos së përgjithshme është funksion linear, d.m.th., i formës

$$C = ax + b,$$

atëherë ax quhet *pjesa variabile* (*e ndryshueshme*) e kostos, ku koeficienti a tregon për sa rritet kostoja kur vëllimi i prodhimit të rritet për një njësi, dhe quhet *koeficient i proporcionalitetit*. Në këtë rast, koeficienti b quhet *pjesa fikse* e kostos.

Funksioni i kostos mesatare të prodhimit përkufizohet si herës i funksionit të kostos së përgjithshme dhe sasisë së mallit të prodhuar:

$$\bar{C} = \frac{C}{x}.$$

Ky funksioni luan rol të rëndësishëm në analizën e kostos, e sidomos në përcaktimin e afarizmit optimal të biznesit.

Funksion margjinal i kostos quhet derivati i funksionit të kostos së përgjithshme:

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}.$$

Shembull 1. Funksioni i kostos së përgjithshme është dhënë me $C = x^3 - 6x^2 + 15x + 10$. Caktoni funksionin margjinal të kostos. Deri të cilën sasi të prodhimit kostoja margjinale zvogëlohet?

Zgjidhje. Nga

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 10$$

kemi

$$C'(x) = 3x^2 - 12x + 15,$$

që paraqet funksionin margjinal të kostos.

Meqë

$$C''(x) = 6x - 12,$$

rrjedh se $C'' < 0$ për $x < 2$. Pra, kostoja margjinale zvogëlohet kur x ndryshon nga 0 deri në 2. □

Shembull 2. Eshtë dhënë funksioni i kostos së përgjithshme (fig. 1.6) $C = x^3 - 300x^2 + 50000x$.

(a) Gjeni funksionin margjinal të kostos.

(b) Gjeni funksionin e kostos mesatare.

(c) Caktoni vëllimin e prodhimit x_0 për të cilin kostoja mesatare është minimale.

(d) Tregoni se në këtë pikë minimale kostoja mesatare dhe ajo margjinale janë të barabarta, d.m.th. se vlen $\bar{C}(x_0) = C'(x_0)$.

Zgjidhje. (a) Nga

$$C(x) = x^3 - 300x^2 + 50000x$$

kemi (fig. 1.7)

$$C'(x) = 3x^2 - 600x + 50000.$$

(b) Shpenzimet mesatare janë kemi (fig. 1.8)

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = x^2 - 300x + 50000.$$

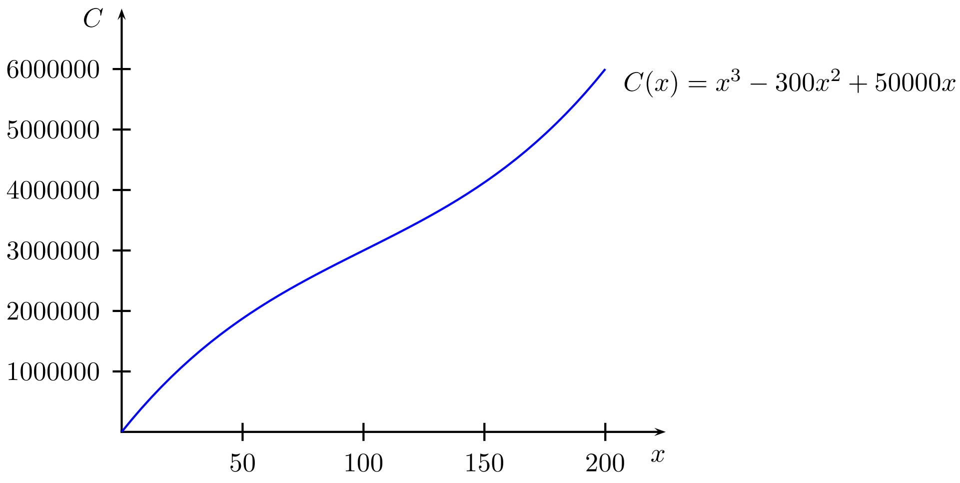

Figura 1.6: Grafiku i funksionit të kostos së përgjithshme

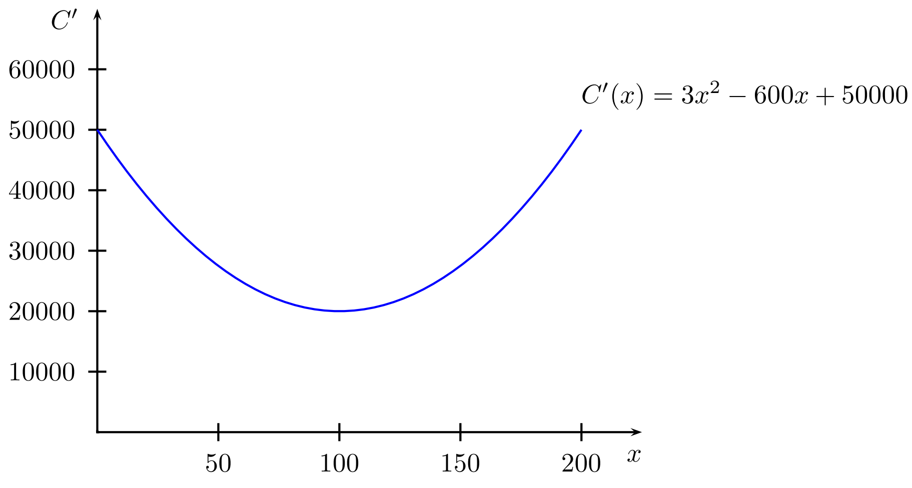

Figura 1.7: Grafiku i funksionit margjinal të kostos

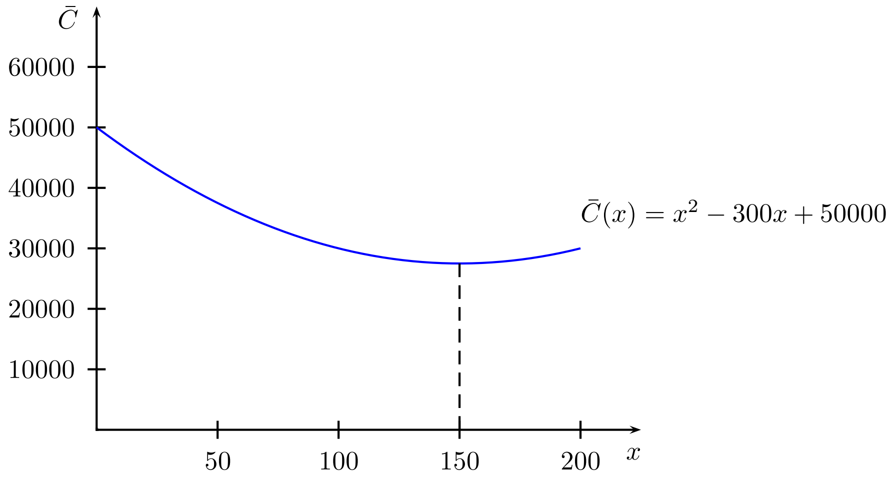

Figura 1.8: Grafiku i funksionit të kostos mesatare

(c) Gjejmë

$$\bar{C}'(x) = 2x - 300.$$

Tani

$$\bar{C}'(x) = 0 \iff 2x - 300 = 0 \iff x = 150.$$

Nga ana tjetër,

$$\bar{C}''(x) = 2,$$

që d.m.th. se $\bar{C}''(150) = 2 > 0$, prandaj për vëllimin e prodhimit $x_0 = 150$ kostoja mesatare është minimale kemi (fig. 1.8):

$$\bar{C}_{\text{min}} = \bar{C}(150) = 27500.$$

(d) Siç pamë $\bar{C}(x_0) = 27500$. Nga ana tjetër,

$$C'(x_0) = C'(150) = 27500;$$

d.m.th., $\bar{C}(x_0) = C'(x_0)$. □

Detyra për ushtrime

1. Eshtë dhënë funksioni i kostos së përgjithshme $C = 2x^3 - 48x^2 + 500x$. Llogaritni sasinë e prodhimit për të cilën kostoja mesatare është minimale. Sa është ajo kosto mesatare minimale?

2. Eshtë dhënë funksioni i kostos mesatare

   (a) $\bar{C} = 50 - 8x + x^2$;

(b) $\bar{C} = 20 - 6x + x^2$.

Caktoni vëllimi i prodhimit x_0 për të cilin kostoja mesatare do të jetë minimale. Tregoni se në këtë pikë x_0 kostoja mesatare dhe ajo margjinale janë të barabarta.

3. Le të jetë x_0 sasia e prodhimit për të cilën kostoja mesatare e prodhimit është minimale. Vërtetoni në rastin e përgjithshëm se në pikën x_0 kostoja mesatare dhe ajo margjinale janë të barabarta.

4. Funksioni i kostos së përgjithshme është $C = \sqrt{3x^2 + 5x - 4}$. Hulumtoni se si ndikon në koston mesatare rritja e prodhimit nga niveli $x = 2$.

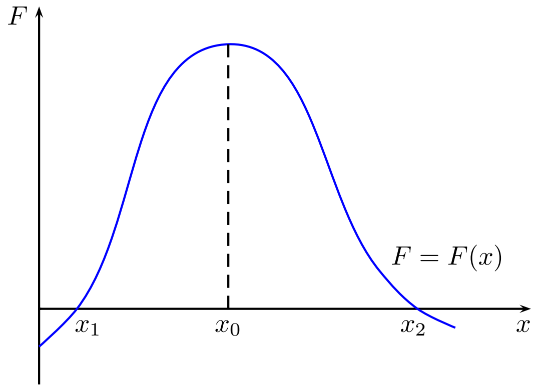

Figura 1.9: Paraqitja grafike e funksionit të profitit

1.7 Funksioni i profitit

Rezultatet e afarizmit të biznesit paraqiten me madhësinë e profitit. *Profit* quhet diferenca ndërmjet të hyrave të përgjithshme dhe kostos së përgjithshme të biznesit:

$$F = P - C.$$

Në qoftë se të hyrat dhe kostoja janë dhënë si funksione të sasisë së prodhimit x, atëherë fitohet *funksioni i profitit*:

$$F(x) = P(x) - C(x).$$

Intervali (x_1, x_2) për të cilin vlen $F > 0$ quhet *interval i rentabilitetit* (fig. 1.9).

Derivati i funksionit të profitit

$$F'(x) = P'(x) - C'(x)$$

quhet *funksion margjinal i profitit*, dhe shfrytëzohet për të gjetur sasinë optimale të prodhimit x_0 ashtu që profiti të jetë maksimal (shih fig. 1.9).

Shembull 1. Eshtë dhënë funksioni i të hyrave të përgjithshme $P = -x^2 + 90x$ dhe funksioni i kostos së përgjithshme $C = 3x^2 + 50x + 30$. Llogaritni

(a) kufirin e sipërm dhe të poshtëm të rentabilitetit;

(b) prodhimin ashtu që profiti të jetë maksimal;

(c) profitin maksimal.

Zgjidhje. (a) Zgjidhim mosbarazimin

$$F(x) > 0,$$

d.m.th.,

$$P(x) - C(x) > 0,$$

ose

$$-4x^2 + 40x - 30 > 0.$$

Meqë zgjidhjet e ekuacionit kuadratik $-4x^2 + 40x - 30 = 0$ janë $x_1 \approx 0.82$ dhe $x_2 \approx 9.18$, përfundojmë se madhësitë 0.82 dhe 9.18 paraqesin kufirin e poshtëm, përkatësisht atë të sipërm të rentabilitetit. Intervali i rentabilitetit është $(0.82, 9.18)$.

(b) Kemi

$$F(x) = -4x^2 + 40x - 30,$$

d.m.th.,

$$F'(x) = -8x + 40.$$

Nga $F'(x) = 0$ fitojmë

$$-8x + 40 = 0,$$

prej nga gjejmë

$$x_0 = 5.$$

Meqë $F''(x) = -8 < 0$ (e pra edhe $F''(x_0) < 0$) konkludojmë se në pikën x_0 arrihet profit maksimal.

(c) Tani

$$F_{max} = F(x_0) = F(5) = 70.$$

□

Shembull 2. Për një prodhim janë dhënë funksioni i kostos së përgjithshme $C = x^2 + 12$ dhe funksioni i të hyrave mesatare $p = -2x + 15$. Llogaritni

(a) funksionin e të hyrave në varësi nga sasia e shitur e prodhimit;

(b) vëllimin optimal të prodhimit dhe profitin maksimal.

Zgjidhje. (a) Nga $P = px$ gjejmë

$$P(x) = (-2x + 15)x = -2x^2 + 15x.$$

(b) Kemi

$$F(x) = P(x) - C(x) = -2x^2 + 15x - (x^2 + 12) = -3x^2 + 15x - 12.$$

Prej këtej

$$F'(x) = -6x + 15.$$

Duke barazuar $F'(x) = 0$ marrim ekuacionin

$$-6x + 15,$$

zgjidhja e të cilit është

$$x_0 = \frac{15}{6} = 2.5.$$

Meqë $F''(x) = -6 < 0$, në pikën x_0 funksioni i profitit arrin maksimumin:

$$F_{max} = F(x_0) = F(2.5) = 6.75.$$

$\square$

Detyra për ushtrime

1. Funksioni i kostos së përgjithshme është $C = 30x + 1000$, kurse funksioni i të hyrave të përgjithshme $P = 80x - \frac{x^2}{1000}$. Llogaritni

   (a) prodhimin optimal;

   (b) profitin maksimal;

   (c) kufijtë e rentabilitetit për prodhimin e dhënë.

2. Funksioni i kostos së përgjithshme është $C = x^2 + 100$, kurse funksioni i të hyrave mesatare $p = 90 - x$. Llogaritni

   (a) kufijtë e rentabilitetit për prodhimin e dhënë;

   (b) prodhimin optimal;

   (c) profitin maksimal.

3. Funksioni i shpenzimeve të përgjithshme është $C = x^2 + 500$, kurse funksioni kërkesës $x = 100 - p$. Llogaritni prodhimin optimal ashtu që të arrihet profit maksimal.

1.8 Elasticiteti i funksionit

Elasticiteti i një funksioni shpreh ndryshimin relativ të funksionit në njësi të ndryshimit relativ të argumentit.

Le të jetë $y = f(x)$ funksion i derivueshëm. *Elasticiteti* i funksionit f përkufizohet me

$$E_{y,x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx},$$

d.m.th.,

$$E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Në qoftë se vëjmë $\frac{\Delta x}{x} = 1\% = \frac{1}{100}$, atëherë

$$E_{y,x} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} \approx \frac{x}{y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{y} \cdot 100,$$

pra, në këtë rast,

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{E_{y,x}}{100}.$$

Kështu, për ndryshimin e variablës së lirë x për 1% elasticiteti $E_{y,x}$ është i përafërt me përqindjen e ndryshimit të vlerës së funksionit y.

Funksioni $y = f(x)$ quhet

1. *elastik* në pikën x në qoftë se $|E_{y,x}| > 1$;
2. *joelastik* në pikën x në qoftë se $|E_{y,x}| < 1$;
3. *me elasticitet unitar* në pikën x në qoftë se $|E_{y,x}| = 1$.

Shembull 1. Llogaritni elasticitetin e funksionit $y = x^2 e^x$. Çfarë është elasticiteti në pikën

(a) $x = -2$;

(b) $x = -1$;

(c) $x = 1$.

Zgjidhje. Gjejmë

$$\begin{aligned} E_{y,x} &= \frac{x}{y} y' = \frac{x}{x^2 e^x} (x^2 e^x)' \\ &= \frac{1}{xe^x} (2xe^x + x^2 e^x) = \frac{1}{xe^x} xe^x (2 + x) = 2 + x. \end{aligned}$$

(a) Meqë

$$E_{y,-2} = 2 + (-2) = 0,$$

kemi $|E_{y,-2}| = 0 < 1$, d.m.th. funksioni i dhënë është joelastik në pikën $x = -2$.

(b) Meqë

$$E_{y,-1} = 2 + (-1) = 1,$$

kemi $|E_{y,-1}| = 1$, d.m.th. funksioni i dhënë ka elasticitet unitar në pikën $x = -1$.

(c) Meqë

$$E_{y,1} = 2 + 1 = 3,$$

kemi $|E_{y,1}| = 3 > 1$, d.m.th. funksioni i dhënë është elastik në pikën $x = 1$. □

Detyra për ushtrime

1. Llogaritni elasticitetin e funksionit $y = \frac{e^{2x}}{x}$. Çfarë është elasticiteti i tij në pikën
   (a) $x = -1$;
   (b) $x = 0$;
   (c) $x = \frac{1}{2}$;
   (d) $x = 1$;
   (e) $x = 2$.

2. Llogaritni elasticitetin e funksionit
   (a) $y = x^n$;
   (b) $y = x^n e^{-x}$;
   (c) $y = x^n e^{ax}$ për $a \neq 0$;
   (d) $y = \frac{e^x}{\ln x}$.

1.9 Elasticiteti i funksioneve të biznesit

Elasticiteti i funksionit të kërkesës (ose *elasticiteti i kërkesës*) $x = f(p)$ në pikën p përkufizohet me

$$E_{x,p} = \frac{p}{x} \cdot x'.$$

Në rastin e përgjithshëm, meqë $x' < 0$, kurse $p > 0$ dhe $x > 0$, vlen $E_{x,p} < 0$.

Kështu, në praktikë hasen këto raste të elasticitetit të kërkesës:

1. Në qoftë se $E_{x,p} < -1$, atëherë kërkesa në pikën p është elastike.
2. Në qoftë se $-1 < E_{x,p} < 0$, atëherë kërkesa në pikën p është joelastike.
3. Në qoftë se $E_{x,p} = -1$, atëherë kërkesa në pikën p ka elasticitet unitar.

Bie fjala, për $E_{x,4} = -7$ kërkesa në pikën $p = 4$ është elastike; d.m.th., në qoftë se çmimi rritet nga $p = 4$ për 1%, atëherë kërkesa zvogëlohet përafërsisht për 7%.

Elasticiteti i çmimit (*fleksibiliteti i çmimit*) shprehet me

$$E_{p,x} = \frac{x}{p} \cdot p'.$$

Shembull 1. Funksioni i kërkesës është $x = 15 - 2p$. Llogaritni elasticitetin për $p = 3$ dhe për $p = 7$.

Zgjidhje. Kemi

$$E_{x,p} = \frac{p}{x} \cdot x' = -\frac{2p}{15 - 2p}.$$

Prandaj,

$$E_{x,3} = -\frac{6}{15 - 6} = -\frac{2}{3},$$

kurse

$$E_{x,7} = -\frac{14}{15 - 14} = -14.$$

D.m.th., kërkesa në pikën $p = 3$ është joelastike, kurse në pikën $p = 7$ është elastike. $\square$

Elasticiteti i funksionit të të hyrave të përgjithshme (ose *elasticiteti i të hyrave*) P sipas çmimit p jepet me

$$E_{P,p} = \frac{p}{P} \cdot P' = \frac{p}{px}(px)' = \frac{1}{x} \cdot (x + px') = 1 + \frac{p}{x} \cdot x',$$

përkatësisht

$$E_{P,p} = 1 + E_{x,p}.$$

Elasticiteti i të hyrave sipas sasisë x shprehet me anë të elasticitetit të çmimit:

$$E_{P,x} = \frac{x}{P} \cdot P' = \frac{x}{px} \cdot (px)' = \frac{1}{p} \cdot (p'x + p) = \frac{x}{p} \cdot p' + 1,$$

përkatësisht

$$E_{P,x} = 1 + E_{p,x}.$$

Shembull 2. Është dhënë funksioni i kërkesës $x = -2p + 6$. Llogaritni elasticitetin e të hyrave në varësi nga çmimi. Si ndryshojnë të hyrat me rritjen e çmimit nga niveli $p = \frac{1}{3}$?

Zgjidhje. Kemi

$$E_{P,p} = 1 + E_{x,p}.$$

Gjejmë së pari

$$E_{x,p} = \frac{p}{x} \cdot x' = \frac{p}{-2p+6} \cdot (-2) = \frac{-2p}{-2(p-3)} = \frac{p}{p-3}.$$

Kështu,

$$E_{P,p} = 1 + \frac{p}{p-3} = \frac{2p-3}{p-3}.$$

Në pikën $p = \frac{1}{3}$ kemi

$$E_{P,\frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} - 3}{\frac{1}{3} - 3} = \frac{7}{8}.$$

Pra, të hyrat janë jofleksibile për $p = \frac{1}{3}$; me rritjen e çmimit nga ky nivel për 1% të hyrat rriten përafërsisht për $\frac{7}{8}$%. □

Elasticiteti i funksionit të kostos së përgjithshme (ose *elasticiteti i kostos së përgjithshme*) C sipas sasisë x jepet me

$$E_{C,x} = \frac{x}{C} \cdot C' = \frac{C'}{\frac{C}{x}},$$

përkatësisht

$$E_{C,x} = \frac{C'}{\bar{C}}.$$

Meqë $C' > 0$ dhe $\bar{C} > 0$, vlen $E_{C,x} > 0$.

Në praktikë hasen rastet vijuese të elasticitetit të kostos së përgjithshme:

1. Në qoftë se $E_{C,x} > 1$, atëherë kostoja e përgjithshme në pikën x është elastike, d.m.th. kostoja margjinale është më e madhe sesa ajo mesatare.

2. Në qoftë se $E_{C,x} < 1$, atëherë kostoja e përgjithshme në pikën x është joelastike, d.m.th. kostoja margjinale është më e vogël sesa ajo mesatare.

3. Në qoftë se $E_{C,x} = 1$, atëherë kostoja e përgjithshme në pikën x është me elasticitet unitar, d.m.th. kostoja margjinale është e barabartë me atë mesatare.

Shembull 3. Është dhënë funksioni i kostos së përgjithshme $C = x^3 - 4x^2 + 9x$. Gjeni elasticitetin e kostos së përgjithshme për $x = 1$, $x = 2$ dhe $x = 3$.

Zgjidhje. Kemi

$$E_{C,x} = \frac{C'}{\bar{C}}.$$

Gjejmë së pari

$$C'(x) = (x^3 - 4x^2 + 9x)' = 3x^2 - 8x + 9$$

dhe

$$\bar{C}(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 9x}{x} == \frac{x(x^2 - 4x + 9)}{x} = x^2 - 4x + 9.$$

Kështu,

$$E_{C,x} = \frac{3x^2 - 8x + 9}{x^2 - 4x + 9}.$$

Tani, $E_{C,1} = \frac{2}{3} < 1$, d.m.th. kostoja e përgjithshme është joelastike për $x = 1$.

Më tutje, $E_{C,2} = 1$, d.m.th. kostoja e përgjithshme është me elasticitet unitar për $x = 2$.

Më në fund, $E_{C,3} = 2$, d.m.th. kostoja e përgjithshme është elastike për $x = 3$. □

Detyra për ushtrime

1. Është dhënë funksioni i të hyrave mesatare

   (a) $p = \frac{6}{3x+2}$;

   (b) $p = \frac{100}{x^2}$.

   Gjeni elasticitetin e kërkesës dhe hyrjet e përgjithshme $P(p)$.

2. Është dhënë funksioni i të hyrave mesatare $p = \sqrt{10 - 2x}$. Gjeni elasticitetin e kërkesës për $p = 1$, përkatësisht $p = 2$. Për çfarë çmimi elasticiteti i kërkesës është unitar?

3. Funksioni i kostos së përgjithshme është $C = \frac{x^2}{100} + 20x + 900$. Gjeni elasticitetin e funksionit në pikat $x = 290$, $x = 300$, përkatësisht $x = 310$.

4. Funksioni i kostos së përgjithshme është $C = x^2 + 100$. Tregoni se elasticiteti i kostos së përgjithshme është për 1 më i madh sesa elasticiteti i kostos mesatare.

5. Vërtetoni se elasticiteti i kostos së përgjithshme është për 1 më i madh sesa elasticiteti i kostos mesatare.