Kapitulli 1

Njehsimi diferencial

1.1 Derivati: shpejtësia e qastit dhe pjerrtësia

Analiza matematike studion ndryshimin e madhësive, kurse vegla primare për studimin e shpejtësisë së ndryshimit është procedura e quajtur diferencim.

Në këtë pikë do të sqarojmë këtë procedurë dhe do të shpjegojmë si ajo mund të zbatohet në probleme shpejtësish dhe për të gjetur pjerrtësinë (koeficientin e drejtimit) e një tangjenteje të një lakoreje.

Marrim në shqyrtim një funksion $f(x)$ i cili ndryshon në një interval $(x_0, x_0 + h)$. Natyrisht, është e vështirë që thjesht të „lexohet“ shpejtësia e qastit e ndryshimit të funksionit në pikën x_0, por mund ta masim distancën ndërmjet vlerave $f(x_0)$ dhe $f(x_0+h)$ të funksionit në pikat x_0 dhe x_0+h dhe ta llogarisim shpejtësinë mesatare të ndryshimit në intervalin (x_0, x_0+h) me anë të herësit

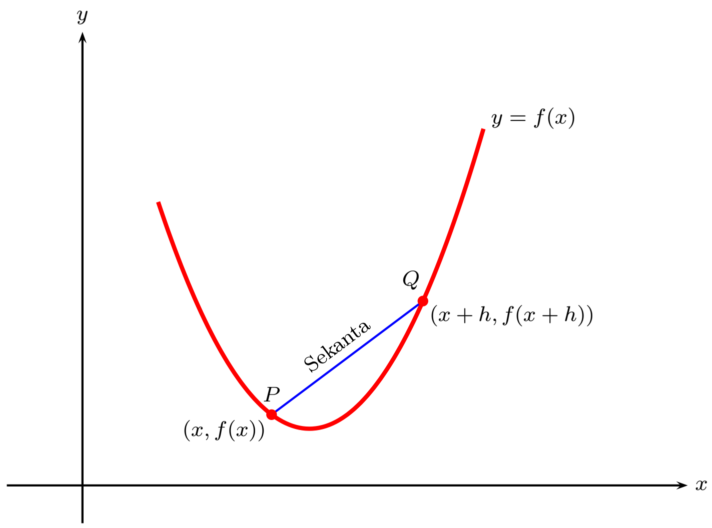
$$v_{\text{mes}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Në qoftë se vlera e h është e vogël, është për t'u pritur që shpejtësia mesatare e ndryshimit të $f(x)$ të jetë shumë afër me shpejtësinë e qastit të ndryshimit të tij në pikën x_0. Prandaj është e arsyeshme të llogaritet shpejtësia e qastit v si limit

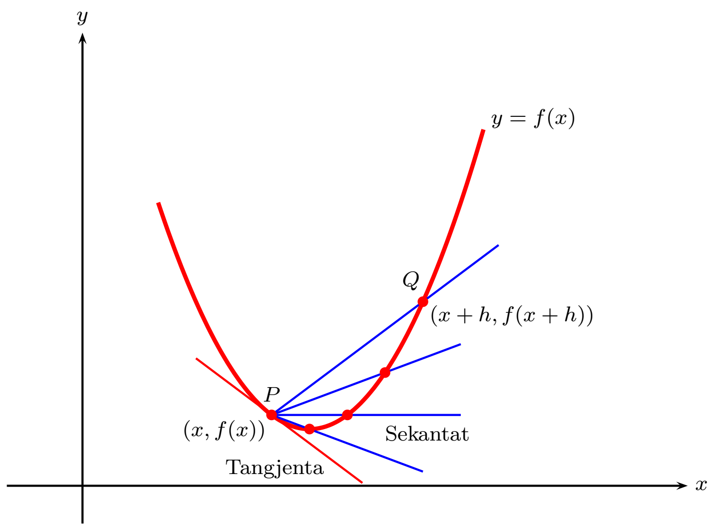
$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Procedura sapo e sqaruar është ilustruar gjeometrikisht në figurën 1.1. Figura 1.1a tregon grafikun e funksionit $y = f(x)$ së bashku me pikat $P(x_0, f(x_0))$ dhe $Q(x_0+h, f(x_0+h))$. Drejtëza PQ e cila bashkon pikat P dhe Q quhet *sekantë* (ose *kordë*) e grafikut dhe ka pjerrtësinë (koeficientin e drejtimit)

$$k_{\text{sec}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$



(a) Grafiku i $f(x)$ me sekantë nëpër pikat $P(x, f(x))$ dhe $Q(x+h, f(x+h))$.



(b) Kur $h \to 0$ sekantat tentojnë te tangjenta nëpër P.

Figura 1.1. Përafrimi i tangjentës me sekanta.

Siç është treguar në figurën 1.1b, duke marrë h gjithnjë më të vogël, sekantat korresponduese PQ tentojnë te pozita të cilën intuitivisht e mendojmë si tangjentë të lakores në pikën P. Një gjë e tillë na sygjeron se pjerrtësinë $k_{\tan}$ të tangjentës në pikën $P(x_0, f(x_0))$ e llogarisim duke gjetur vlerën limite të pjerrtësive të sekanteve përafruese PQ; d.m.th.,

$$k_{\tan} = \lim_{h\to 0} k_{\sec} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Pra, pjerrtësia e tangjentës së grafikut të funksionit $y = f(x)$ në pikën x_0 është pikërisht e barabartë me shpejtësinë e qastit të ndryshimit të $f(x)$ sipas x në këtë pikë.

Shprehja

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

e cila paraqitet si gjatë llogaritjes së pjerrtësisë ashtu edhe të shpejtësisë së ndryshimit, quhet *koeficient i diferencës* (*ndryshimit*) i funksionit f. Më saktësisht, në të dyja zbatimet, llogarisim limitin e koeficientit të diferencës kur h tenton në 0. Për të unifikuar studimin e këtyre dhe zbatimeve të ngjashme, fusim terminologjinë dhe shënimet vijuese.

Derivat i funksionit $f(x)$ sipas x quhet funksioni $f'(x)$ (lexo: „f prim prej x“) i dhënë me

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

kurse procesi i llogaritjes së derivatit quhet *diferencim* (ose *derivim*). Themi se $f(x)$ është *i diferncueshëm* (ose *i derivueshëm*) në c në qoftë se ekziston $f'(c)$ (d.m.th., ekziston limiti i koeficientit të diferencës kur $x = c$).

Përparësia e shënimit të këtillë të derivatit qëndron në faktin se vështrimet e bëra më parë në këtë pikë lidhur me pjerrtësinë dhe shpejtësinë e ndryshimit mund të përmblidhen në formën vijuese.

Pjerrtësia e tangjentës së lakores $f(x)$ në pikën $(x_0, f(x_0))$ jepet me $m_{\tan} = f'(x_0)$.
Shpejtësia e qastit e ndryshimit të madhësisë $f(x)$ sipas x kur $x = x_0$ është e barabartë me $f'(x_0)$.

Në të parin nga dy shembujt vijues gjejmë ekuacionin e tangjentës. Pastaj në të dytin shqyrtojmë një zbatim biznesi i cili ka të bëjë me shpejtësinë e ndryshimit.

Shembull 1. Llogaritni derivatin e funksionit $f(x) = x^2$, pastaj shfrytëzoni rezultatin për të gjetur pjerrtësinë e lakores në pikën $x = -1$. Cili është ekuacioni i tangjentës në këtë pikë?

Zgjidhje. Sipas përkufizimit të derivatit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x. \end{aligned}$$

Kështu, pjerrtësia e tangjentës së lakores $y = x^2$ në pikën $x = -1$ është

$$f'(-1) = 2(-1) = -2$$

(shihni fig. 1.2).

Për të gjetur ekuacionin e tangjentës na nevojitet edhe y-koordinata e pikës nga e cila është tërhequr tangjenta; d.m.th., $y = f(-1) = (-1)^2 = 1$. Prandaj, tangjenta kalon nëpër pikën $(-1, 1)$ dhe ka pjerrtësinë (koeficientin e drejtimit) -2. Nga sa dimë më parë, ekuacioni i saj është

$$\begin{aligned} y - 1 &= (-2)[x - (-1)] \\ y &= -2x - 1. \end{aligned}$$

□

Shembull 2. Një prodhues vlerëson se kur prodhohen dhe shiten x njësi të një prodhimi të hyrat e nxjerra do të jenë $R(x) = 0.5x^2 + 3x - 2$ mijë euro. Me çfarë shpejtësie ndryshojnë të hyrat sipas nivelit të prodhimit x kur prodhohen 3 njësi? A janë rritëse apo zvogëluese të hyrat në këtë moment?

Zgjidhje. Së pari, meqë x paraqet numrin e njësive të prodhuara, duhet të jetë $x \geq 0$. Koeficienti i diferencës së $R(x)$ është

$$\begin{aligned} \frac{R(x+h) - R(x)}{h} &= \frac{[0.5(x+h)^2 + 3(x+h) - 2] - [0.5x^2 + 3x - 2]}{h} \\ &= \frac{[0.5(x^2 + 2xh + h^2) + 3x + 3h - 2] - 0.5x^2 - 3x + 2}{h} \\ &= \frac{xh + 0.5h^2 + 3h}{h} = x + 0.5h + 3. \end{aligned}$$

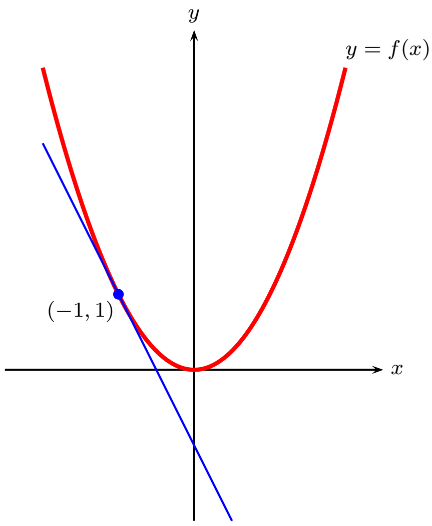


Figura 1.2. Tangjenta e lakores $y = x^2$ në pikën $(-1, 1)$.

Prandaj, derivati i $R(x)$ është

$$R'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{R(x+h) - R(x)}{h} = \lim_{h \to 0}(x + 0.5h + 3) = x + 3,$$

dhe meqë

$$R'(3) = 3 + 3 = 6,$$

rrjedh se të hyrat ndryshojnë me shpejtësi prej $6,000$ € për njësi sipas nivelit të prodhimit kur prodhohen 3 njësi.

Meqë $R'(3) = 6 > 0$, pra meqë $R'(3)$ është **pozitiv**, tangjenta në pikën e grafikut të funksionit të të hyrave për $x = 3$ duhet të jetë me pjerrtësi përpjetëze. Vështrimi i tillë na sygjeron se të hyrat janë rritëse kur $x = 3$, në çka edhe bindemi nga grafiku i $R(x)$ i paraqitur në fig 1.3. □

Derivati $f'(x)$ i $y = f(x)$ ndonjëherë shënohet me $\frac{dy}{dx}$ (lexo:„de y, de x“), dhe sipas këtij shënimi vlera e derivatit në $x = c$ (d.m.th., $f'(c)$) shkruhet si

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c}.$$

Për shembull, në qoftë se $y = x^2$, atëherë, siç u bindëm në shembullin 1,

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

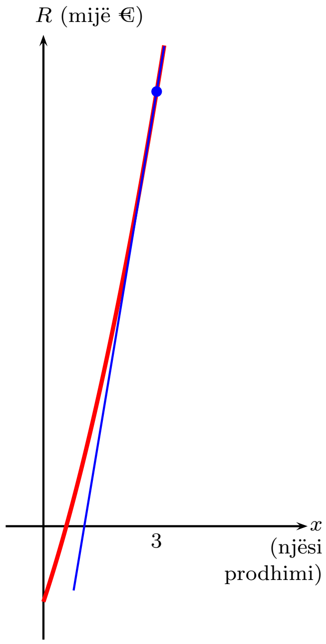


Figura 1.3. Grafiku i lakores $R(x) = 0.5x^2 + 3x - 2$, për $x \geq 0$, me tangjentën në pikën $x = 3$.

dhe vlera e derivatit në pikën $x = -1$ është

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 2x\Big|_{x=-1} = 2(-1) = -2.$$

Shënimi $\frac{dy}{dx}$ sygjeron pjerrtësinë

$$\frac{\text{ndryshimi i } y}{\text{ndryshimi i } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

dhe mund poashtu të mendohet si „shpejtësia e ndryshimit të y sipas x.“ Ndonjëherë është e levërdishme që fjalia e formës

$$\text{„në qoftë se } y = x^2\text{, atëherë } \frac{dy}{dx} = 2x\text{“}$$

të shkurtohet duke shënuar, thjesht,

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x,$$

që lexohet: „derivati i x^2 sipas x është $2x$.“

Në qoftë se një funksion është i derivueshëm në një pikë $P(x_0, f(x_0))$, atëherë grafiku i $y = f(x)$ ka tangjentë jovertikale në pikën P dhe në të gjitha pikat në „afërsi“ të P. Intuitivisht, një gjë e tillë sygjeron se një funksion duhet të jetë i vazhdueshëm në çdo pikë ku është i derivueshëm, meqë grafiku nuk mund të ketë „vrimë“ ose „këputje“ në ndonjë pikë ku mund të tërhiqet tangjenta.

Mirëpo, e anasjellta nuk është e vërtetë; d.m.th., një funksion i vazhdueshëm nuk është e thënë të jetë edhe i derivueshëm.

Në përgjithësi, funksionet me të cilat do të ndeshemi gjatë kursit tonë do të jenë të derivueshëm në pothuajse të gjitha pikat. Në veçanti, polinomet janë kudo të derivueshëm dhe funksionet racionale janë të dervueshme në çdo pikë ku janë të përkufizuara.

Detyra për ushtrime

1. Për funksionet vijuese llogaritni derivatin dhe gjeni pjerrtësinë e tangjentës së lakores për vlerën e dhënë të ndryshores së pavarur:

   (a) $f(x) = 5x - 3$, $x = 2$;
   (b) $f(x) = x^2 - 1$, $x = -1$;
   (c) $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$, $x = 0$;
   (d) $f(x) = x^3$, $x = -1$;
   (e) $f(x) = x^3 - 1$, $x = 2$;
   (f) $g(t) = \frac{2}{t}$, $t = \frac{1}{2}$;
   (g) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$;
   (h) $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$;
   (i) $h(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$, $u = 9$.

2. Për funksionet vijuese llogaritni derivatin dhe gjeni ekuacionin e tangjentës së lakores për vlerën e dhënë të x_0:

   (a) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 2$;
   (b) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = -2$;
   (c) $f(x) = \frac{3}{x^2}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;
   (d) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

3. Për funksionet vijuese gjeni shpejtësinë e ndryshimit $\frac{dy}{dx}$ kur $x = x_0$:

   (a) $y = 3$, $x_0 = 2$;

(b) $y = 6 - 2x$, $x_0 = 3$;

(c) $y = x(1 - x)$, $x_0 = -1$.

4. Për funksionet vijuese vizatoni grafikun, pastaj caktoni vlerat e x për të cilat derivati është zero. Çfarë ndodh me grafikun në pikat përkatëse?

   (a) $f(x) = x^2 - 2x$;

   (b) $f(x) = x^3 + 3x^2$;

   (c) $f(x) = x^3 - x^2$.

5. Një prodhues mund të prodhojë mall me kosto 20 € për copë. Vlerësohet se në qoftë se malli do të shitet për p euro copa, konsumuesit do të blejnë $120-p$ sish çdo muaj. Gjeni profitin mujor $P(p) = R(p)-C(p)$ të prodhuesit, ku $R(p)$ janë të hyrat dhe $C(p)$ kostoja. A është profiti rritës apo zvogëlues kur çmimi i mallit është 60 € copa? Po kur çmimi është 80 € copa? Çfarë ndodh me profitin kur malli shitet 70 € në copë?

1.2 Teknika derivimi

Në pikën paraprake, derivatet i llogaritëm duke shfrytëzuar përkufizimin me anë të limitit. Në qoftë se një gjë të tillë do të na duhej ta bënim sa herë që na nevojitet të llogarisim një derivat, atëherë do të ishte edhe bezdisëse edhe e vështirë për të zbatuar analizën matematike në aplikacione të ndryshme. Për fat të mirë, kjo nuk është e domosdoshme, dhe në këtë dhe pikën e ardhshme do të zhvillojmë ca teknika të cilat në masë të madhe e thjeshtësojnë procesin e diferencimit.

Fillojmë me një rregull për derivimin e një funksioni konstant.

Rregulla e konstantës. Për çfarëdo konstante c,

$$\frac{d}{dx}(c) = 0.$$

D.m.th., derivati i një konstanteje është zero.

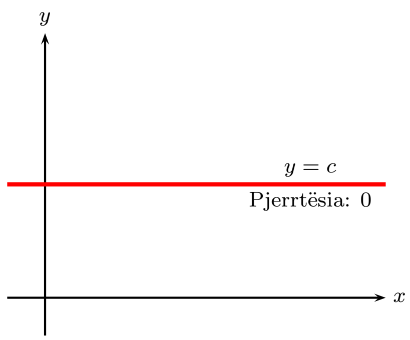


Figura 1.4. Grafiku i $f(x) = c$.

Një gjë e tillë mund të shihet nëse merret parasysh grafiku i një funksioni konstant $f(x) = c$, i cili është një drejtëz horizontale (fig. 1.4). Meqë pjerrtësia e një drejtëze të tillë është 0 në secilën pikë të saj, rrjedh se $f'(x) = 0$. Ja në vazhdim vërtetimi i cili shfrytëzon përkufizimin me anë të limitit:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

meqë për çdo x vlen $f(x+h) = c$.

Shembull 1. Për funksionin $f(x) = -5$ kemi

$$\frac{d}{dx}(-5) = 0.$$

Vetia vijuese është nga më të zbatueshmet meqë na tregon si të derivohet funksioni fuqi $f(x) = x^n$. Vëreni se rregulla gjen zbatim jo vetëm te funksionet si $f(x) = x^4$, por edhe tek ato si $g(x) = \sqrt[3]{x^4} = x^{4/3}$ dhe $h(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$.

Rregulla e fuqisë. Për çdo numër real n,

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Me fjalë, për të gjetur derivatin e x^n, zvogëlo për 1 eksponentin n të x dhe shumëzo me eksponentin fillestar.

Vërtetimi i rregullës së fuqisë bëhet në disa hapa: kur n është numër natyror, pastaj, kur është numër i plotë dhe, në fund, numër racional; këtu nuk do të merremi me të meqë tejkalon suazat e kursit tonë.

Shembull 2.

$$\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^{5-1} = 5x^4,$$
$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Rregulla e konstantës dhe ajo e fuqisë japin formula të thjeshta për gjetjen e derivateve të një klase të rëndësishme funksionesh, por, për të qenë në gjendje të diferencojmë shprehje ca më komplekse, duhet të dijmë rregullat për manipulim algjebrik me derivate. Dy rregullat vijuese na mësojnë t'i derivojmë prodhimin e një funksioni me konstantë dhe shumën e dy funksioneve.

Rregulla e faktorit konstant. Në qoftë se c është konstantë dhe $f(x)$ është funksion i derivueshëm, atëherë i tillë është edhe $cf(x)$ dhe

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}[f(x)].$$

D.m.th., derivati i një prodhimi me konstantë është prodhimi i derivatit me konstantën.

Shembull 3.

$$\frac{d}{dx}(5x^4) = 5\frac{d}{dx}(x^4) = 5(4x^3) = 20x^3,$$
$$\frac{d}{dx}(-\frac{3}{\sqrt{x}}) = \frac{d}{dx}(-3x^{-1/2}) = -3\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = \frac{3}{2}x^{-3/2}.$$

Rregulla e shumës. Në qoftë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë funksione të derivueshme, atëherë e tillë është edhe shume e tyre $S(x) = f(x) + g(x)$ dhe

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)],$$

d.m.th.,

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Me fjalë, derivati i një shume është shuma e derivateve.

Shembull 4.

$$\frac{d}{dx}(x^{-3} + 5) = \frac{d}{dx}(x^{-3}) + \frac{d}{dx}(5) = -3x^{-4} + 0 = -3x^{-4},$$
$$\frac{d}{dx}(2x^7 - 3x^{-5}) = 2\frac{d}{dx}(x^7) - 3\frac{d}{dx}(x^{-5}) = 2(7x^6) - 3(-5x^{-6}) = 14x^6 + 15x^{-6}.$$

Duke kombinuar rregullat e fuqisë, të faktorit konstant dhe të shumës mund të derivojmë çfarëdo polinimi.

Shembull 5. Gjeni derivatin e polinomit $y = 4x^3 - 5x^2 + 8x - 7$.

Zgjidhje.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^3 - 5x^2 + 8x - 7) \\ = 4\frac{d}{dx}(x^3) - 5\frac{d}{dx}(x^2) + 8\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(-7) \\ = 12x^2 - 10x^1 + 8x^0 + 0 = 12x^2 - 10x + 8.\end{aligned}$$

□

Në shumë zbatime praktike shpejtësia e qastit e ndryshimit të një madhësie nuk është aq e rëndësishme sa është *shpejtësia procentuale* (*në përqindje*) *e ndryshimit,* e cila përkufizohet me formulën

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{c}\text{shpejtësia procentuale}\\ \text{e ndryshimit të } Q\end{array}\right] = 100\frac{\text{shpejtësia e ndryshimit të } Q}{\text{madhësia e } Q} \\ = 100\frac{Q'(x)}{Q(x)}.\end{aligned}$$

Për shembull, shpejtësia e ndryshimit vjetor prej 200 € në pagë nuk do të kishte domethënie të madhe për një person që fiton $100,000$ € në vit. Në fakt, meqë

$$100 \cdot \frac{200}{100,000} = 0.2,$$

shpejtësia procentuale përkatëse e ndryshimit do të ishte vetëm 0.2%. Mirëpo, për një person që fiton vetëm $1,000$ € në vit do të kishim

$$100 \cdot \frac{200}{1,000} = 20,$$

që d.m.th. se për të shpejtësia procentuale e ndryshimit do të ishte 20%.

Shembull 6. Bruto produkti vendor (GDP) i një vendi ishte $N(t) = t^2+2t+50$ qind milion euro t vite pas 2000.

(a) Me çfarë shpejtësie ndryshon sipas kohës GDP në vitin 2005?

(b) Me çfarë shpejtësie procentuale ndryshon sipas kohës GDP në vitin 2005?

Zgjidhje. (a) Shpejtësia e ndryshimit të GDP është derivati

$$N'(t) = 2t + 2.$$

Shpejtësia e ndryshimit në vitin 2005 është

$$N'(5) = 2 \cdot 5 + 2 = 12$$

qind milion euro në vit.

(b) Shpejtësia procentuale e ndryshimit të GDP në vitin 2005 është

$$100\frac{N'(5)}{N(5)} = 100\frac{12}{5^2 + 2 \cdot 5 + 50} = 100 \cdot \frac{12}{85} \approx 14.1;$$

pra, përafërsisht 14.1% në vit. □

Detyra për ushtrime

1. Derivoni funksionet vijuese:
   (a) $y = x^{-4}$;
   (b) $y = x^{7/3}$;
   (c) $y = \frac{9}{\sqrt{t}}$;
   (d) $y = \frac{3}{2t^2}$;
   (e) $y = x^2 + 2x + 3$;
   (f) $y = 3x^5 - 4x^3 + 9x - 6$;
   (g) $f(x) = x^9 - 5x^8 + x + 12$;
   (h) $f(x) = \frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{2}x^6 - x + 2$;
   (i) $y = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{t}}$;
   (j) $y = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3x^3}$;
   (k) $f(x) = \sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$;
   (l) $f(t) = 2\sqrt{t^3} + \frac{4}{\sqrt{t}} - \sqrt{2}$;
   (m) $y = -\frac{x^2}{16} + \frac{2}{x} - x^{3/2} + \frac{1}{3x^2} + \frac{x}{3}$;
   (n) $y = x^2(x^3 - 6x + 7)$;
   (o) $y = \frac{x^5 - 4x^2}{x^3}$;

2. Kërkesa e konsumuesve për një mall është $D(p) = -200p + 12,000$ njësi në muaj kur çmimi i tregut është p euro për njësi.
   (a) Shprehni shpenzimet totale mujore $E(p)$ të konsumuesve për mallin si funksion të p dhe vizatoni grafikun. (Shpenzimet totale mujore të konsumuesve janë sasia totale e të hollave të cilën konsumuesit e shpenzojnë çdo muaj për mallin.)

(b) Gjeni shpejtësinë e ndryshimit të shpenzimeve totale mujore të konsumuesve sipas çmimit p.

(c) Çfarë ndodh me shpenzimet totale mujore të konsumuesve kur çmimi i tregut është 30 € për njësi?

3. Një studim efikasiteti të punëtorëve të ndërrimit të mëngjesit në një uzinë tregon se një punëtor mesatar i cili arrin në punë në orën 8:00 do të ketë montuar

$$f(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$$

radio-tranzistorë t orë më pas.

(a) Nxjerrni formulën për shpejtësinë me të cilën punëtori do të montojë radio pas t orësh.

(b) Me çfarë shpejtësie do të montojë radio punëtori në orën 9:00?

(c) Sa radio do të montojë punëtori ndërmjet orës 9:00 dhe 10:00?

4. Bruto të hyrat e një kompanie ishin $A(t) = 0.1t^2 + 10t + 20$ mijë euro t vite pas themelimit në vitin 2000.

(a) Me çfarë shpejtësie rriteshin sipas kohës bruto të hyrat e kompanisë në vitin 2004?

(b) Me çfarë shpejtësie procentuale rriteshin sipas kohës bruto të hyrat e kompanisë në vitin 2004?

5. Paga juaj fillestare do të jetë $6,000$ € në vit dhe do të keni rritje prej 500 € çdo vit pas vitit të parë.

(a) Shprehni shpejtësinë procentuale të rritjes së pagës suaj si funksion kohe dhe vizatoni grafikun.

(b) Me çfarë shpejtësie procentuale do të rritet paga juaj pas 1 viti?

(c) Çfarë do të ndodhë me shpejtësinë procentuale të rritjes së pagës suaj në afat të gjatë (d.m.th., kur t rritet shumë)?

1.3 Rregulla e prodhimit dhe ajo e herësit

Mbështetur në përvojat me rregullën e faktorit konstant dhe atë të shumës nga pika paraprake, mund të shtrojmë pyetjen se mos vallë edhe derivati i prodhimit të dy funksioneve është i barabartë me prodhimin e derivateve të tyre, mirëpo lehtë bindemi se konjektura e tillë nuk është e saktë. Për shembull, në qoftë se $f(x) = x$ dhe $g(x) = x^2$, atëherë $f'(x) = 1$ dhe $g'(x) = 2x$, prandaj

$$f'(x)g'(x) = 1(2x) = 2x,$$

kurse $f(x)g(x) = xx^2 = x^3$ dhe

$$[f(x)g(x)]' = (x^3)' = 3x^2.$$

Formula korrekte për derivimin e një prodhimi mund të formulohet si vijon.

Rregulla e prodhimit. Në qoftë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë funksione të derivueshme, atëherë i tillë është edhe prodhimi i tyre $P(x) = f(x)g(x)$ dhe

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)],$$

ose në trajtë ekuivalente,

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Me fjalë, derivati i një prodhimi të dy funksioneve është derivati i të parit herë i dyti plus i pari herë derivati i të dytit.

Duke zbatuar rregullën e prodhimit në shembullin tonë hyrës, gjejmë se

$$(xx^2)' = x'(x^2) + x(x^2)' = 1 \cdot x^2 + x(2x) = x^2 + 2x^2 = 3x^2.$$

Japim edhe një shembull tjetër.

Shembull 1. Derivoni funksionin $P(x) = (x^2 + 1)(3x - 1)$

(a) zhvilluar $P(x)$ dhe duke e derivuar si polinom;

(b) zbatuar rregullën e prodhimit.

Zgjidhje. (a) Kemi
$$P(x) = 3x^3 - x^2 + 3x - 1,$$
prandaj
$$P'(x) = 9x^2 - 2x + 3.$$
(b) Sipas rregullës së prodhimit,

$$\begin{aligned} P'(x) &= \frac{d}{dx}[(x^2+1)(3x-1)] \\ &= (3x-1)\frac{d}{dx}[(x^2+1)] + (x^2+1)\frac{d}{dx}[(3x-1)] \\ &= (3x-1)(2x) + (x^2+1)\cdot 3 = 9x^2 - 2x + 3, \end{aligned}$$

që, natyrisht, përputhet me rezultatin e fituar kur prodhimi zhvillohet dhe pastaj derivohet si shumë. □

Rregulla e herësit. Në qoftë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë funksione të derivueshme dhe $g(x) \neq 0$, atëherë i derivueshëm është edhe herësi i tyre $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dhe

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{g(x)^2},$$

ose në trajtë ekuivalente,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Me fjalë, derivati i një herësi të dy funksioneve është derivati i të parit herë i dyti minus i pari herë derivati i të dytit, e tëra mbi katrorin e funksionit të dytë.

Vërejtje. Rregulla e herësit është njëra ndër formulat më të ndërlikuara që keni mësuar në kurset e matematikës gjer më tani. Mund të jetë ndihmesë të vëreni se rregulla e herësit i ngjan rregullës së prodhimit përveç se ka shenjën minus, gjë e cila bën tepër të rëndësishme renditjen e termave në numëruesin. Mund të filloni ashtu që të vëni katrorin e g në emëruesin, dhe pastaj të shkruani numëruesin duke filluar me derivatin e f dhe duke menduar mbi rregullën e prodhimit. Mos e harroni shenjën minus, pa të cilën rregulla e herësit nuk do të ishte kaq e vështirë për ta mbajtur mend.

Shembull 2. Derivoni funksionin racional $y = \frac{x^2+3x-13}{x+5}$.

Zgjidhje. Sipas rregullës së herësit,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+3x-13)'(x+5)-(x^2+3x-13)(x+5)'}{(x+5)^2}$$
$$= \frac{(2x+3)(x+5)-(x^2+3x-13)\cdot 1}{(x+5)^2}$$
$$= \frac{2x^2+13x+15-x^2-3x+13}{(x+5)^2} = \frac{x^2+10x+28}{(x+5)^2}.$$

□

Rregulla e herësit është paksa e ngathët, prandaj mos e përdorni pa nevojë. Keni parasysh shembullin vijues.

Shembull 3. Derivoni funksionin $y = \frac{3}{2x^2} - \frac{x}{3} + \frac{5}{4} + \frac{x-1}{x}$.

Zgjidhje. Mos e përdorni rregullën e herësit! Në vend të saj, rishkruani funksionin në formën

$$y = \frac{3}{2}x^{-2} - \frac{1}{3}x + \frac{5}{4} + 1 - x^{-1}$$

dhe pastaj zbatoni rregullën e fuqisë term për term për të fituar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(-2x^{-3}) - \frac{1}{3} + 0 + 0 - (-1)x^{-2}$$
$$= -3x^{-3} - \frac{1}{3} + x^{-2} = -\frac{3}{x^3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{x^2}.$$

□

Shembull 4. Profiti nga shitja e q njësish të një malli është

$$P(q) = \frac{-q^3+27q^2+160q+5}{q+4}$$

mijë euro. Me çfarë shpejtësie ndryshon sipas shitjes profiti kur $q = 2$?

Zgjidhje. Na nevojitet ta llogarisim $P'(2)$. Duke zbatuar rregullën e herësit marrim

$$P'(q)$$
$$= \frac{(-q^3+27q^2+160q+5)'(q+4)-(-q^3+27q^2+160q+5)(q+4)'}{(q+4)^2}$$
$$= \frac{(-3q^2+54q+160)(q+4)-(-q^3+27q^2+160q+5)\cdot 1}{(q+4)^2}$$
$$= \frac{-2q^3+15q^2+216q+635}{(q+4)^2}.$$

Për nivelin e shitjes $q = 2$ gjejmë

$$P'(2) = \frac{-2 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2^2 + 216 \cdot 2 + 635}{(2+4)^2} = \frac{1111}{36} \approx 30.861$$

pra, profiti ndryshon (rritet) me shpejtësi afërsisht $30,861$ € për njësi. $\square$

Detyra për ushtrime

1. Derivoni funksionet vijuese:
   (a) $f(x) = (x-5)(7x-2)$;
   (b) $f(x) = (2x-1)(3x+2)$;
   (c) $y = 10(3u+1)(1-5u)$;
   (d) $y = 400(15-x^2)(3x-2)$;
   (e) $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - 2x^3 + 1$;
   (f) $y = \frac{x+1}{x-1}$;
   (g) $y = \frac{3x-2}{4x+5}$;
   (h) $y = \frac{3}{x-5}$;
   (i) $y = \frac{1-t^2}{t^2+1}$;
   (j) $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{2x^2-5x+1}$;
   (k) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{3}$;
   (l) $f(x) = \frac{(x-3)(2x+1)}{x-1}$.
2. Gjeni shpejtësinë e ndryshimit të funksioneve vijuese për vlerën e dhënë të x_0:
   (a) $y = (x^2+2)(x+\sqrt{x})$, $x_0 = 4$;
   (b) $y = (x^2-3)(1-2x^3)$, $x_0 = 1$;
   (c) $y = (3x-1)(2x+5)$, $x_0 = 1$.
3. Një konteiner rrjedh rërë ashtu që pas t javësh në konteiner mbesin

   $$S(t) = 10\left(1 - \frac{t^2}{25}\right)^3$$

   ton rërë.
   (a) Sa rërë kishte fillimisht në konteiner?

(b) Me çfarë shpejtësie rrjedh nga konteineri rëra pas 1 jave?

(c) Sa kohë nevojitet për të rrejdhur e tërë rëra nga konteineri? Me çfarë shpejtësie rrjedh rëra nga konteineri në momentin e zbrazjes?

4. Rregulla e prodhimit tregon si derivohet prodhimi i çfarëdo dy funksioneve kurse rregulla e faktorit konstant tregon si derivohen prodhimet në të cilat njëri nga faktorët është konstant. Tregoni se dy rregullat janë konsistente; d.m.th., zbatoni rregullën e prodhimit për të treguar se $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$ kur c është konstantë.

1.4 Derivimi i funksioneve eksponenciale, logaritmike dhe trigonometrike

Derivimi i funksioneve eksponenciale dhe funksioneve logaritmike është i thjeshtë. Në këtë pikë do të japim formulat për derivatet e këtyre funksioneve dhe do të përmendim derivatet e funksioneve trigonometrike.

Fillojmë me formulën për derivimin e funksionit $\ln x$.

Derivati i $\ln x$. Për $x > 0$ vlen

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Vërtetimi i formulës rrjedh nga vetitë e njohura për logaritmet dhe fakti i njohur më parë se $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ tenton në e kur t rritet (ose zvogëlohet) pafundësisht. Gjejmë koeficientin e diferencës së funksionit $f(x) = \ln x$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} \\ &= \frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h} = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}.\end{aligned}$$

Për të gjetur derivatin, lëshojmë $h \to 0$ në koeficientin e gjetur të diferencës. Për këtë gjë, vëjmë $\frac{h}{x} = \frac{1}{t}$. Atëherë $\frac{1}{h} = \frac{t}{x}$, kështu që

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t/x} = \ln\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{1/x}.$$

Meqë nga $h \to 0$ rrjedh $t \to \infty$, kemi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{t\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{1/x} = \ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{1/x} \\ &= \ln e^{1/x} = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Shembull 1. Derivoni $f(x) = \frac{\ln\sqrt[3]{x^2}}{x^4}$

Zgjidhje. Së pari, meqë $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$, kemi

$$f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x^2}}{x^4} = \frac{\ln x^{2/3}}{x^4} = \frac{\frac{2}{3}\ln x}{x^4}.$$

Tani, sipas rregullës së herësit,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(\ln x)' x^4 - (x^4)' \ln x}{(x^4)^2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{x}x^4 - 4x^3 \ln x}{x^8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3 - 4x^3 \ln x}{x^8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - 4\ln x}{x^5}. \end{aligned}$$

□

Shembull 2. Një prodhues vlerëson se q njësi të një malli do të shiten kur çmimi është $p(q) = 112 - q \ln q^3$ qind euro për njësi. Me çfarë shpejtësie ndryshojnë të hyrat e përgjithshme nga ky mall kur shiten 4 njësi?

Zgjidhje. Funksioni i të hyrave të përgjithshme është

$$R(q) = p(q)q = (112 - q \ln q^3)q = 112q - q^2(3 \ln q) = 112q - 3q^2 \ln q$$

qind euro, prandaj shpejtësia e ndryshimit të të hyrave është

$$\begin{aligned} R'(q) &= 112 - 3[(q^2)' \ln q + q^2 (\ln q)'] \\ &= 112 - 3\left(2q \ln q + q^2 \frac{1}{q}\right) = 112 - 6q \ln q - 3q. \end{aligned}$$

Kur $q = 4$ shpejtësia e ndryshimit është

$$R'(4) = 112 - 6 \cdot 4 \cdot \ln 4 - 3 \cdot 4 \approx 66.73$$

qind euro për njësi; d.m.th., 6, 673 € për njësi. □

Kalojmë tani te formula për derivatin e e^x.

Derivati i e^x.

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Me fjalë, e^x është derivat i vetvetes.

Gjeometrikisht, fakti i mësipërm ka domethënien se në çdo pikë $P(x_0, e^{x_0})$ të lakores $y = e^x$ pjerrtësia është e barabartë me e^{x_0}, ordinatën e pikës P (shih fig. 1.5). Kjo dhe është arsyeja kryesore pse numri e quhet bazë eksponenciale „natyrore."

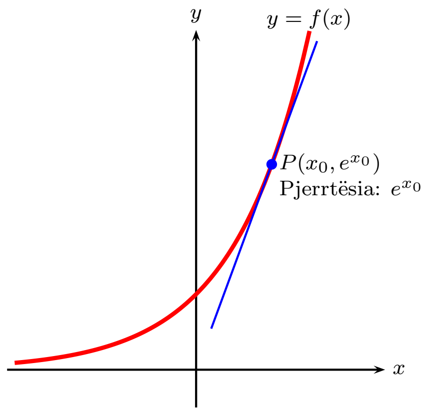


Figura 1.5. Në çdo pikë $P(x_0, e^{x_0})$ të lakores $y = e^x$ pjerrtësia është e barabartë me e^{x_0}.

Shembull 3. Një prodhues vlerëson se kërkesa për një mall të caktuar është $D(p) = 5,000e^{-p}$ njësi kur çmimi është p qind euro për njësi. Çfarë ndodh me të hyrat e përgjithshme $R(p) = pD(p)$ kur çmimi i tregut është 90 €? Po kur ky çmim është 110 €? Ç'mund të përfundoni për të hyrat e përgjithshme kur çmimi është 100 €?

Zgjidhje. Funksioni i të hyrave të përgjithshme është

$$R(p) = pD(p) = 5,000pe^{-p}$$

qind euro, prandaj shpejtësia e ndryshimit të të hyrave sipas çmimit është

$$\begin{aligned} R'(p) &= \frac{d}{dp}(5,000pe^{-p}) = 5,000\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{e^p}\right) \\ &= 5,000\frac{(p)'e^p - p(e^p)'}{(e^p)^2} = 5,000\frac{1 \cdot e^p - pe^p}{(e^p)^2} = 5,000\frac{1-p}{e^p} \end{aligned}$$

qind euro në 100 €.

Kur çmimi i tregut është 90 € kemi $p = 0.9$, prandaj

$$R'(0.9) = 5,000\frac{1-0.9}{e^{0.9}} \approx 203.29,$$

pra pjerrtësia është pozitive, që d.m.th. se të hyrat e përgjithshme rriten në qoftë se rritet çmimi nga ky nivel.

Kur çmimi është 110 € kemi $p = 1.1$, kështu që

$$R'(1.1) = 5,000\frac{1-1.1}{e^{1.1}} \approx -166.44,$$

pra pjerrtësia është negative, që d.m.th. se të hyrat e përgjithshme zvogëlohen në qoftë se rritet çmimi nga ky nivel.

Më në fund, për çmimin 100 € kemi

$$R'(1) = 5,000\frac{1-1}{e^{1}} = 0,$$

që na jep të drejtë të mendojmë se për këtë çmim prodhuesi realizon të hyra të përgjithshme maksimale. □

Japim më në fund, për arsye kompletësie, edhe derivatet e funksioneve trigonometrike, të cilat i keni hasur në kurset e gjertanishme të matematikës:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x,$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$$

Me fjalë, derivati i sinusit është kosinusi, kurse derivati i kosinusit është minus sinusi.

Detyra për ushtrime

1. Derivoni funksionet vijuese:

   (a) $f(x) = x^2e^x$;

   (b) $f(x) = xe^{-x}$;

   (c) $f(x) = x - \ln x$;

   (d) $f(x) = \ln x^3$;

   (e) $f(x) = \ln 2x$;

   (f) $f(x) = x^2 \ln x$;

   (g) $f(x) = x \ln \sqrt{x}$;

   (h) $f(x) = x^2 \ln \sqrt{x}$;

   (i) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

2. Një makine e caktuar industriale amortizohet ashtu që vlera e saj pas t vitesh bëhet $V(t) = 20,000e^{-t}$ euro.

(a) Me çfarë shpejtësie ndryshon sipas kohës vlera e makinës pas 5 vjetësh?

(b) Me çfarë shpejtësie procentuale ndryshon sipas kohës vlera e makinës pas t vjetësh? A varet kjo shpejtësi nga t apo është konstante?

3. Kërkesa e konsumuesve për një mall është $D(p) = 3,000e^{-p}$ njësi në muaj kur çmimi i tregut është p qind euro për njësi. Shprehni shpenzimet totale mujore $E(p)$ të konsumuesve për mallin si funksion të p. Çfarë ndodh me shpenzimet totale mujore kur çmimi i tregut është 95 €? Po kur ky çmim është 105 €? Ç'mund të përfundoni për shpenzimet totale mujore kur çmimi është 100 €?

1.5 Elemente të analizës margjinale: Përafrimi me shtesa

Analiza margjinale është një fushë e ekonomiksit e cila ka të bëjë me vlerësimin e efektit në madhësi të tilla si kostoja, të hyrat dhe profiti kur niveli i prodhimit ndryshon për një njësi. Për shembull, në qoftë se $C(x)$ është kostoja e prodhimit të x njësish të një malli, atëherë kostoja e prodhimit të njësisë së $(x_0 + 1)$-të është $C(x_0 + 1) - C(x_0)$. Mirëpo, meqë derivati i funksionit të kostos $C(x)$, i quajtur *kosto margjinale,* jepet me

$$\mathrm{MC}(x) = C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h},$$

rrjedh se për vlera „të vogla" të h

$$\mathrm{MC}(x_0) \approx \frac{C(x_0 + h) - C(x_0)}{h},$$

kështu që për $h = 1$ mund të bëhet përafrimi

$$\mathrm{MC}(x_0) \approx C(x_0 + 1) - C(x_0).$$

Me fjalë tjera, në nivelin e prodhimit $x = x_0$, çmimi i prodhimit të një njësie shtesë është përafërsisht i barabartë me koston margjinale $\mathrm{MC}(x_0)$. Lidhmëria gjeometrike ndërmjet $C(x_0+1)-C(x_0)$ dhe $\mathrm{MC}(x_0)$ është paraqitur në fig. 1.6.

Japim në vazhdim përkufizimet e funksioneve të *kostos margjinale, të hyrave margjinale* dhe *profitit margjinal.*

Kostoja margjinale, të hyrat margjinale dhe profiti margjinal. Në qoftë se $C(x)$ është kostoja totale e prodhimit të x njësish të një malli, $R(x) = px$ funksioni i të hyrave të përgjithshme të shitjes së kësaj sasie me çmim p për njësi dhe $P(x) = R(x) - C(x)$ funksioni i profitit, atëherë

$$\mathrm{MC}(x) = C'(x)$$

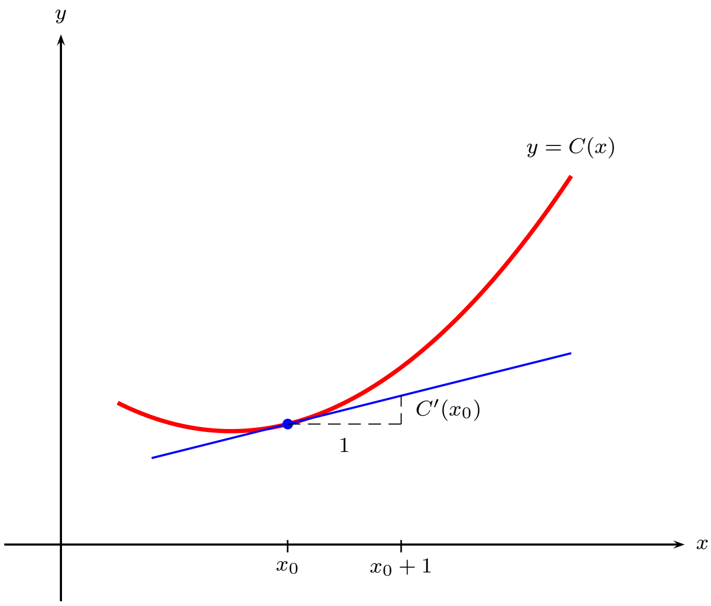
quhet *funksion i kostos margjinale,*

$$\mathrm{MR}(x) = R'(x)$$

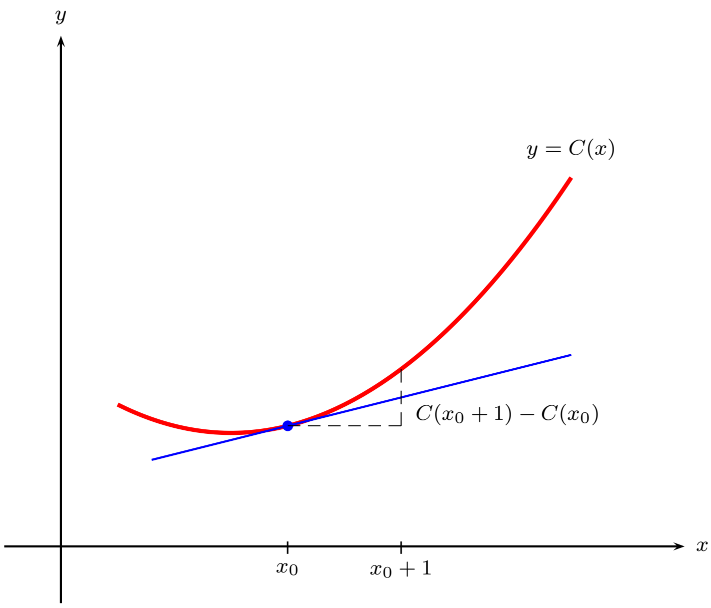
quhet *funksion i të hyrave margjinale* dhe

$$\mathrm{MP}(x) = P'(x)$$

quhet *funksion i profitit margjinal.*



(a) Kostoja margjinale MC(x_0) për $x = x_0$ është $C'(x_0)$.



(b) Kostoja e prodhimit të njësisë së $(x_0 + 1)$-të është $C(x_0 + 1) - C(x_0)$.

Figura 1.6. Përafrimi i $C(x_0 + 1) - C(x_0)$ me anë të kostos margjinale MC(x_0).

Shembull 1. Një prodhues vlerëson se kur prodhohen x njësi të një malli kostoja totale do të jetë $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x + 27$ euro dhe se që të gjitha x njësitë do të shiten kur çmimi është $p(x) = 22 - \frac{1}{4}x$ euro për njësi.

(a) Shfrytëzoni funksionin e kostos margjinale për të vlerësuar koston e prodhimit të njësisë së katërtë. Sa është kostoja e saktë e prodhimit të njësisë së katërtë?

(b) Gjeni funksionin e të hyrave për mallin. Shfrytëzoni pastaj funksionin margjinal të të hyrave për të vlerësuar të hyrat të nxjerrura nga shitja e njësisë së katërtë.

(c) Gjeni profitin e gjeneruar me shitjen e x njësish. Paraqitni grafikisht funksionin e profitit dhe përcaktoni nivelin e prodhimit për të cilin profiti është maksimal. Sa është profiti margjinal në këtë nivel optimal prodhimi?

Zgjidhje. (a) Funksioni i kostos margjinale është

$$\mathrm{MC}(x) = C'(x) = \frac{2}{5}x + 4$$

dhe ndryshimi në kosto përderisa x rritet nga 3 në 4 (njësia e katërtë) është përafërsisht

$$\mathrm{MC}(3) = \frac{2}{5} \cdot 3 + 4 = \frac{26}{5} = 5.2$$

euro.

Kostoja e saktë e njësisë së katërtë është

$$C(4) - C(3) = \left(\frac{1}{5} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 27\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 27\right) = \frac{27}{5} = 5.4.$$

(b) Funksioni i të hyrave totale është

$$R(x) = p(x)x = \left(22 - \frac{1}{4}x\right)x = -\frac{1}{4}x^2 + 22x$$

dhe funksioni i të hyrave margjinale është

$$\mathrm{MR}(x) = R'(x) = -\frac{1}{2}x + 22.$$

Të hyrat e nxjerrura nga shitja e njësisë së katërtë janë përafërsisht

$$\mathrm{MR}(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3 + 22 = \frac{41}{2} = 20.5,$$

kurse të hyrat e sakta

$$R(4) - R(3) = \left(-\frac{1}{4} \cdot 4^2 + 22 \cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot 3^2 + 22 \cdot 3\right) = \frac{81}{4} = 20.25.$$

(c) Profiti është

$$\begin{aligned} P(x) = R(x) - C(x) &= \left(-\frac{1}{4}x^2 + 22x\right) - \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x + 27\right) \\ &= -\frac{9}{20}x^2 + 18x - 27. \end{aligned}$$

Grafiku i funksionit të profitit është parabolë me hapje nga poshtë dhe pikën më të lartë (kulmim) nga sipër:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{2(-\frac{9}{20})} = 20$$

(shihni fig. 1.7). Prandaj, profiti është maksimal kur prodhohen dhe shiten 20 njësi me çmim

$$p(20) = 22 - \frac{1}{4} \cdot 20 = 17$$

euro njësia.

Funksioni i profitit margjinal është

$$\mathrm{MP}(x) = P'(x) = -\frac{9}{10}x + 18,$$

dhe në nivelin optimal të prodhimit $x = 20$ profiti margjinal është

$$\mathrm{MP}(20) = -\frac{9}{10} \cdot 20 + 18 = 0.$$

□

Kostoja për njësi prodhimi është poashtu me rëndësi në ekonomiks. Funksioni i tillë quhet *kosto mesatare* dhe derivati i tij quhet *kosto mesatare margjinale.*

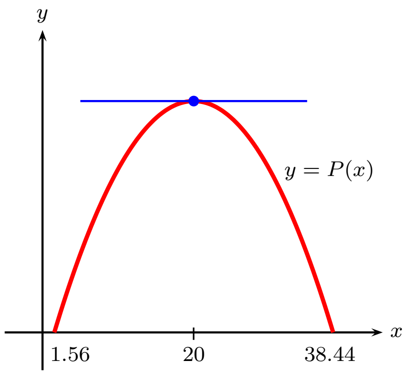


Figura 1.7. Grafiku i funksionit të profitit $P(x) = -\frac{9}{20}x^2 + 18x - 27$.

Kostoja mesatare dhe kostoja mesatare margjinale. Në qoftë se $C(x)$ është kostoja totale e prodhimit të x njësish të një malli të caktuar, atëherë

$$\mathrm{AC}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

quhet *funksion i kostos mesatare* dhe

$$\mathrm{MAC}(x) = (\mathrm{AC})'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{C(x)}{x}\right]$$

quhet *funksion i kostos mesatare margjinale.*

Të hyrat mesatare dhe profiti mesatar përkufizohen në mënyrë analoge.

Japim në vazhdim një shembull i cili ka të bëjë me koston mesatare.

Shembull 2. Le të jetë $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x + 27$ funksioni i kostos totale për mallin në shembullin 1.

(a) Gjeni koston mesatare dhe koston mesatare margjinale për mallin.

(b) Për çfarë niveli të prodhimit kostoja mesatare margjinale është e barabartë me 0?

(c) Për çfarë niveli të prodhimit kostoja margjinale është e barabartë me koston mesatare?

Zgjidhje. (a) Kostoja mesatare është

$$\mathrm{AC}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{1}{5}x^2 + 4x + 27}{x} = \frac{1}{5}x + 4 + \frac{27}{x}$$

dhe kostoja mesatare margjinale është

$$\mathrm{MAC}(x) = (\mathrm{MC})'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x + 4 + \frac{27}{x}\right) = \frac{1}{5} - \frac{27}{x^2}.$$

(b) Kostoja mesatare margjinale është 0 kur

$$\begin{aligned} \mathrm{MAC}(x) &= 0 \\ \frac{1}{5} - \frac{27}{x^2} &= 0 \\ x^2 &= 27 \cdot 5 \\ x^2 &= 135. \end{aligned}$$

Meqë sasia e prodhimit x nuk mund të jetë negative, marrim parasysh vetëm rrënjën pozitive

$$x = \sqrt{135} \approx 11.62.$$

(c) Siç pamë në shembullin 1, kostoja margjinale është $\mathrm{MC}(x) = \frac{2}{5}x + 4$, prandaj kostoja margjinale është e barabartë me koston mesatare kur

$$\begin{aligned} \mathrm{MC}(x) &= \mathrm{AC}(x) \\ \frac{2}{5}x + 4 &= \frac{1}{5}x + 4 + \frac{27}{x} \\ \frac{1}{5}x &= \frac{27}{x} \\ x^2 &= 27 \cdot 5 \\ x &= \sqrt{135} \\ x &\approx 11.62. \end{aligned}$$

$\square$

Vërejtje. Në shembullin 1 profiti është maksimal për nivelin e prodhimit ku profiti margjinal është 0, ndërsa në shembullin 2, duke analizuar vlerat e kostos mesatare margjinale $\mathrm{MAC}(x)$ në afërsi të nivelit të prodhimit $x \approx 11.62$, mund të përfundojmë se kostoja mesatare është minimale kur kostoja mesatare është e barabartë me koston margjinale. Në pikat vijuese do të zbatojmë metoda të analizës matematike për të treguar se që të dyja këto rezultate janë pasoja të rregullave të përgjithshme të ekonomiksit.

Analiza margjinale është një shembull i rëndësishëm i një procedure më të përgjithshme përafrimi të mbështetur në faktin se meqë

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

atëherë për vlera të vogla të h derivati $f'(x_0)$ është përafërsisht i barabartë me koeficientin e diferencës; d.m.th.,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

prandaj

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h,$$

ose në trajtë ekuivalente,

$$f(x_0+h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h.$$

Për të theksuar faktin se shtesa bëhet sipas ndryshores x, vëjmë $h = \Delta x$ dhe përmbledhim formulën për përafrim me anë shtesash si vijon.

Përafrimi me shtesa. Në qoftë se $y = f(x)$ është i derivueshëm në $x = x_0$ dhe Δx është një ndryshim i vogël në x, atëherë

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

ose, në trajtë ekuivalente, në qoftë se $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, atëherë

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Japim një shembull zbatimi të kësaj formule përafruese në ekonomiks.

Shembull 3. Supozojmë se kostoja totale në euro e prodhimit të q njësish të një malli të caktuar është $C(q) = \frac{7}{2}q^2 + 16q + 37$. Në qoftë se niveli i tanishëm i prodhimit është 30 njësi, vlerësoni se si do të ndryshojë kostoja totale në qoftë se prodhohen 30.5 njësi.

Zgjidhje. Në këtë problem, niveli i tanishëm i prodhimit është $q = 30$ dhe ndryshimi në prodhim është $\Delta q = 0.5$. Sipas formulës përafruese, ndryshimi përkatës në kosto është

$$\Delta C = C(30.5) - C(30) \approx C'(30)\Delta q = C'(30) \cdot 0.5.$$

Meqë

$$C'(q) = 7q + 16,$$

kemi

$$\Delta C \approx C'(30) \cdot 0.5 = (7 \cdot 30 + 16) \cdot 0.5 = 113.$$

Sa për ushtrim, llogaritni vlerën e saktë të ndryshimit të kostos dhe krahasoni përgjegjjen tuaj me vlerën e përafërt. A është i mirë përafrimi? □

Për një funksion $y = f(x)$, ndonjëherë shtesa Δx quhet *diferencial i x* dhe shënohet me dx, e atëherë formula jonë përafruese mund të shkruhet në formën $\Delta y \approx f'(x)\,dx$. Në këtë rast, *diferenciali i y* përkufizohet me $dy = f'(x)\,dx$. Në vijim është dhënë në mënyrë të përmbledhur ky nocion.

Diferencialet. Në qoftë se $y = f(x)$ është funksion i derivueshëm sipas x, atëherë $dx = \Delta x$ është *diferenciali i x* dhe $dy = f'(x)\,dx$ është *diferenciali i y*.

Shembull 4. Gjeni diferencialin e $y = 3x^2 + 5x + 10$.

Zgjidhje.

$$dy = f'(x)\,dx = (6x + 5)\,dx.$$

□

Detyra për ushtrime

1. Kostoja totale e një prodhuesi është $C(q) = 0.1q^3 - 0.5q^2 + 500q + 200$ euro, ku q është numri i njësive të prodhuara.

   (a) Zbatoni analizën margjinale për të vlerësuar koston e prodhimit të njësisë së nëntë.

   (b) Llogaritni koston e saktë të prodhimit të njësisë së nëntë.

2. Të hyrat e përgjithshme mujore të një prodhuesi janë $R(q) = 240q + 0.05q^2$ euro kur prodhohen dhe shiten q njësi gjatë muajit. Për momentin prodhuesi prodhon 80 njësi në muaj dhe planifikon të rrisë prodhimin mujor për 1 njësi.

   (a) Zbatoni analizën margjinale për të vlerësuar të hyrat shtesë të cilat do të gjenerohen me prodhimin dhe shitjen e njësisë së 81-të.

   (b) Zbatoni funksionin e të hyrave për të llogaritur vlerën e saktë të të hyrave shtesë të cilat do të gjenerohen me prodhimin dhe shitjen e njësisë së 81-të.

Në detyrat 3–8, $C(x)$ është kostoja e përgjithshme e prodhimit të x njësish të një malli të caktuar dhe $p(x)$ çmimi me të cilin do të shiten që të gjitha x njësitë.

(a) Gjeni koston margjinale dhe të hyrat margjinale.

(b) Shfrytëzoni koston margjinale për të vlerësuar koston e prodhimit të njësisë së katërtë.

(c) Gjeni koston e saktë e prodhimit të njësisë së katërtë.

(d) Shfrytëzoni të hyrat margjinale për të vlerësuar të hyrat të nxjerrura nga shitja e njësisë së katërtë.

(e) Gjeni vlerën e saktë të të hyrave të nxjerrura nga shitja e njësisë së katërtë.

3. $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 98$, $p(x) = 25 - \frac{1}{3}x$.

4. $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 67$, $p(x) = \frac{1}{5}(45 - x)$.

5. $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 39$, $p(x) = -x^2 + 4x + 10$.

6. $C(x) = \frac{5}{9}x^2 + 5x + 73$, $p(x) = -x^2 + 2x + 13$.

7. $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 43$, $p(x) = \frac{3+2x}{1+x}$.

8. $C(x) = \frac{2}{7}x^2 + 65$, $p(x) = \frac{12+2x}{3+x}$.

9. Vlerësoni se sa do të ndryshojë funksioni $f(x) = x^2 - 3x + 5$ kur x rritet nga 5 në 5.3.

10. Vlerësoni se sa do të ndryshojë funksioni $f(x) = \frac{x}{x+1} - 3$ kur x zvogëlohet nga 4 në 3.8.

11. Kostoja totale e një prodhuesi është $C(q) = 0.1q^3 - 0.5q^2 + 500q + 200$ euro kur niveli i prodhimit është q njësi. Niveli i tanishëm i prodhimit është 4 njësi, dhe prodhuesi planifikon të rrisë prodhimin në 4.1 njësi. Vlerësoni se si do të ndryshojë kostoja totale.

12. Të hyrat totale mujore të një prodhuesi janë $R(q) = 240q + 0.05q^2$ euro kur shiten q njësi gjatë muajit. Për momentin prodhuesi prodhon 80 njësi në muaj dhe planifikon të zvogëlojë prodhimin mujor për 0.65 njësi. Vlerësoni se si do të ndryshojnë të hyrat totale mujore.

13. Prodhimi ditor i një uzine është $Q(L) = 300L^{2/3}$ njësi, ku L është madhësia e fuqisë punëtore e matur me orë pune. Për momentin shfrytëzohen 512 orë pune çdo ditë. Vlerësoni numrin e orë-punëve shtesë të nevojshme për të rritur prodhimin ditor për 12.5 njësi.

14. Kostoja totale mujore e një prodhuesi është $C(q) = \frac{1}{6}q^3 + 642q + 400$ euro kur prodhohen q njësi. Për momentin niveli i prodhimit është 4 njësi. Vlerësoni sasinë për të cilin prodhuesi duhet të zvogëlojë prodhimin për të reduktuar koston totale për 130 €.

15. Një studim efikasiteti të punëtorëve të ndërrimit të mëngjesit në një uzinë tregon se një punëtor mesatar i cili arrin në punë në orën 8:00 do të ketë montuar

$$f(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$$

radio-tranzistorë t orë më pas. Sa radio përafërsisht do të montojë punëtori ndërmjet orës 9:00 dhe 9:15?

16. Prodhimi ditor i një uzine është $Q(K) = 600\sqrt{K}$ njësi, ku K është investimi kapital i matur në njësi $1,000$ €. Për momentin investimi kapital është $900,000$ €. Vlerësoni efektin të cilin do ta kishte në prodhimin ditor një investim shtesë kapitali prej 800 €.

17. Kostoja totale e një prodhuesi është $C(q) = 0.5q^2 + 500q + 200$ euro kur niveli i prodhimit është q njësi.

    (a) Gjeni koston mesatare dhe koston mesatare margjinale për mallin.

    (b) Për çfarë niveli të prodhimit kostoja mesatare margjinale është e barabartë me 0?

    (c) Për çfarë niveli të prodhimit kostoja margjinale është e barabartë me koston mesatare?

1.6 Rregulla zingjir

Në shumë situata praktike do të gjejmë se shpejtësia me të cilën ndryshon një madhësi mund të shprehet si prodhim shpejtësish tjera. Për shembull, le të marrim se kostoja totale e prodhimit në një uzinë është funksion i numrit të njësive të prodhuara, i cili është vetë funksion i numrit të orëve që operon uzina. Në qoftë se me C, q dhe t shënojmë koston në euro, numrin e njësive të prodhuara, përkatësisht kohën në orë, atëherë

$$\frac{dC}{dq} = \left[\begin{array}{c}\text{shpejtësia e ndryshimit të}\\ \text{kostos sipas sasisë së prodhuar}\end{array}\right]$$

euro për njësi, dhe

$$\frac{dq}{dt} = \left[\begin{array}{c}\text{shpejtësia e ndryshimit të}\\ \text{sasisë së prodhuar sipas kohës}\end{array}\right]$$

njësi për orë. Prodhimi i këtyre dy shpejtësive është shpejtësia e ndryshimit të kostos sipas kohës; d.m.th.,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$$

euro për orë. Kjo formulë është rast i posaçëm i një rezultati me rëndësi në analizën matematike, të quajtur *rregulla zingjir.*

Rregulla zingjir. Le të jetë y funksion i derivueshëm sipas u dhe u funksion i derivueshëm sipas x. Atëherë y është funksion i përbërë sipas x dhe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Vërejtje. Një mënyrë për të mbajtur në mend rregullën zingjir është të bëjmë sikur derivatet $\frac{dy}{du}$ dhe $\frac{du}{dx}$ janë thyesa dhe të thjeshtojmë du:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}}\frac{\cancel{du}}{dx}.$$

Shembulli vijues ilustron përdorimin e rregullës zingjir.

Shembull 1. Gjeni $\frac{dy}{dx}$ në qoftë se $y = \frac{2}{3}u^3 - 2u^2 + 5$ dhe $u = x^2 - 1$.

Zgjidhje. Nga

$$\frac{dy}{du} = 2u^2 - 4u$$

dhe

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

rrjedh se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (2u^2 - 4u) \cdot 2x.$$

Vërejmë se derivati është shprehur sipas ndryshoreve x dhe u. Meqë y konsiderojmë të jetë funksion i x, do të mund të dëshironim ta shprehnim $\frac{dy}{dx}$ vetëm sipas x. Për këtë, zëvendësojmë $u = x^2 - 1$ në shprehjem për $\frac{dy}{dx}$ për të fituar

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= [2(x^2-1)^2 - 4(x^2-1)] \cdot 2x \\ &= 4x(x^2-1)[(x^2-1)-2] = 4x(x^2-1)(x^2-3).\end{aligned}$$

Për ushtrim, provoni zgjidhjen duke zëvendësuar së pari $u = x^2 - 1$ në shprehjen fillestare për y dhe duke derivuar pastaj sipas x. □

Në shumë probleme praktike një madhësi jepet si funksion i një ndryshoreje, e cila për vete është funksion i një ndryshoreje të dytë, dhe qëllimi është të gjendet shpejtësia e ndryshimit të madhësisë fillestare sipas ndryshores së dytë. Problemet e tilla mund të zgjidhen me anë të rregullës zingjir. Ja një shembull.

Shembull 2. Kostoja e prodhimit të x njësish të një malli të caktuar është $C(x) = 0.2x^2 + x + 900$ euro dhe niveli i prodhimit pas t orësh pune prodhuese është $x(t) = t^2 + 100t$ njësi. Me çfarë shpejtësie ndryshon kostoja sipas kohës pas 1 ore pune?

Zgjidhje. Meqë

$$\frac{dC}{dx} = 0.4x + 1$$

dhe

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 100,$$

sipas rregullës zingjir kemi

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx}\frac{dx}{dt} = (0.4x + 1)(2t + 100).$$

Qëllimi është të evaluohet ky derivat kur $t = 1$. Një mënyrë për ta bërë këtë është të zëvendësohet x me formulën e vet algjebrike, sikur në shembullin 1, dhe pastaj të evaluojmë shprehjen e fituar kur $t = 1$. Mirëpo, është më lehtë të zëvendësojmë numra sesa shprehje algjebrike, prandaj është më e preferueshme që së pari të llogaritet vlera numerike e x e pastaj të zëvendësohet kjo.

Kështu, kur $t = 1$ niveli i prodhimit është

$$x(1) = 1^2 + 100 \cdot 1 = 101$$

njësi, dhe

$$\left.\frac{dC}{dt}\right|_{t=1} = (0.4 \cdot 101 + 1)(2 \cdot 1 + 100) = 4222.8.$$

Pra, pas 1 ore kostoja rritet me shpejtësi 4, 222.80 € në orë. □

Të rikujtojmë nga kurset paraprake se funksioni i përbërë $g[h(x)]$ është funksioni i formuar nga $g(u)$ dhe $h(x)$ duke zëvendësuar $h(x)$ për u në formulën për $g(u)$. Në të vërtetë, rregulla zingjir është rregull për derivim funksionesh të përbëra dhe mund të rishkruhet duke zbatuar shënim funksional si vijon.

Derivimi i funksioneve të përbëra. Në qoftë se $g(u)$ dhe $h(x)$ janë funksione të derivueshme, atëherë

$$\frac{d}{dx}g[h(x)] = g'[h(x)]h'(x).$$

Për t'u bindur se kjo nuk është tjetër veçse një riformulim i versionit të mëparmë të rregullës zingjir, supozojmë se $y = g[h(x)]$. Atëherë

$$y = g(u), \quad \text{ku } u = h(x)$$

dhe, sipas rregullës zingjir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = g'(u)h'(x) = g'[h(x)]h'(x).$$

Përdorimi i kësaj forme të rregullës zingjir është ilustruar në shembullin vijues.

Shembull 3. Derivoni funksionin $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$.

Zgjidhje. Forma e funksionit është

$$f(x) = \left(\boxed{x^2 - x + 3}\right)^{1/2}.$$

Atëherë

$$\left(\boxed{x^2 - x + 3}\right)' = 2x - 1$$

dhe mbështetur në rregullën për derivimin e funksionit të përbërë, derivati i funksionit të përbërë $f(x)$ është

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(\boxed{x^2 - x + 3}\right)^{-1/2}\left(\boxed{x^2 - x + 3}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(\boxed{x^2 - x + 3}\right)^{-1/2}(2x - 1) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 3}}. \end{aligned}$$

□

Shembulli i mësipërm është një rast i veçantë i derivimit të funksioneve të formës së përgjithshme $[h(x)]^n$. Duke kombinuar rregullën për derivimin e funksioneve fuqi

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

me rregullën për derivimin e funksioneve të përbëra, fitojmë rregullën vijuese.

> **Rregulla e përgjithshme e fuqisë.** Për çdo numër real n dhe funksion të derivueshëm h,
>
> $$\frac{d}{dx}[h(x)]^n = n[h(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}[h(x)].$$

Për ta nxjerrur rregullën e përgjithshme të fuqisë, e mendojmë $[h(x)]^n$ si funksion të përbërë

$$[h(x)]^n = g[h(x)], \quad \text{ku } g(u) = u^n.$$

Atëherë $g'(u) = nu^{n-1}$ dhe, sipas rregullës për derivimin e funksioneve të përbëra,

$$\frac{d}{dx}[h(x)]^n = \frac{d}{dx}g[h(x)] = g'[h(x)]h'(x) = n[h(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}[h(x)].$$

Zbatimi i rregullës së përgjithshme të fuqisë është ilustruar me shembullin vijues

Shembull 4. Derivoni funksionin $f(x) = \frac{1}{(3x-2)^4}$.

Zgjidhje. Mos e përdorni rregullën e herësit! Është shumë më lehtë të rishkruhet funksioni në formën

$$f(x) = (3x-2)^{-4}$$

dhe të përdoret rregulla e përgjithshme e fuqisë për të fituar

$$f'(x) = -4(3x-2)^{-5}\frac{d}{dx}(3x-2) = -4(3x-2)^{-5} \cdot 3 = -\frac{12}{(3x-2)^5}.$$

$\square$

Rregulla zingjir përdoret shpesh në kombinim me rregullat tjera të mësuara në pikat paraprake. Shembulli vijues përfshin rregullën e herësit.

Shembull 5. Derivoni funksionin $f(t) = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$.

Zgjidhje. Së pari e rishkruajmë funksionin në formë të përshtatshme:

$$f(t) = \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{1/2}$$

dhe pastaj zbatojmë rregullën e përgjithshme të fuqisë për të fituar

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{-1/2} \frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{t+1}\right).$$

Zbatojmë rregullën e herësit për të gjetur

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = \frac{1(t+1)-(t-1)\cdot 1}{(t+1)^2} = \frac{2}{(t+1)^2},$$

dhe rezultatin e zëvendësojmë në barazimin për $f'(t)$:

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{-1/2} \frac{2}{(t+1)^2} = \frac{1}{(t+1)^2}\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}.$$

$\square$

Në qoftë se $f(x) = \ln h(x)$, atëherë rregulla zingjir jep formulën vijuese për $f'(x)$.

Rregulla zingjir për funksione logaritmike. Në qoftë se $h(x)$ është funksion i derivueshëm, atëherë

$$\frac{d}{dx}[\ln h(x)] = \frac{1}{h(x)}\frac{d}{dx}[h(x)].$$

Shembull 6. Një prodhues vlerëson se x njësi të një malli do të shiten kur çmimi është $p(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$ qind euro për njësi. Gjeni të hyrat margjinale për këtë mall kur shiten 4 njësi.

Zgjidhje. Funksioni i të hyrave totale është

$$R(x) = p(x)x = \frac{\ln(x+3)}{x+3}x = \frac{x\ln(x+3)}{x+3}$$

qind euro, prandaj të hyrat margjinale janë

$$\begin{aligned}
\mathrm{MR}(x) = R'(x) &= \frac{[x\ln(x+3)]'(x+3) - [x\ln(x+3)](x+3)'}{(x+3)^2} \\
&= \frac{[1\cdot\ln(x+3) + x(\ln(x+3))'](x+3) - [x\ln(x+3)]\cdot 1}{(x+3)^2} \\
&= \frac{[\ln(x+3) + x\left(\frac{1}{x+3}(x+3)'\right)](x+3) - x\ln(x+3)}{(x+3)^2} \\
&= \frac{[\ln(x+3) + x\left(\frac{1}{x+3}\cdot 1\right)](x+3) - x\ln(x+3)}{(x+3)^2} \\
&= \frac{[\ln(x+3) + \frac{x}{x+3}](x+3) - x\ln(x+3)}{(x+3)^2} \\
&= \frac{(x+3)\ln(x+3) + x - x\ln(x+3)}{(x+3)^2} \\
&= \frac{x + 3\ln(x+3)}{(x+3)^2}.
\end{aligned}$$

Kur $x = 4$ të hyrat margjinale janë

$$R'(4) = \frac{4 + 3\ln(4+3)}{(4+3)^2} \approx 0.20$$

qind euro për njësi; d.m.th. përafërsisht 20 € për njësi. □

Duke zbatuar rregullën zingjir së bashku me formulën për derivimin e funksionit eksponencial

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x,$$

fitojmë formulën vijuese për derivimin e funksionit të përbërë eksponencial.

Rregulla zingjir për funksione eksponenciale. Në qoftë se $h(x)$ është funksion i derivueshëm, atëherë

$$\frac{d}{dx}[e^{h(x)}] = e^{h(x)}\frac{d}{dx}[h(x)].$$

Shembull 7. Një prodhues vlerëson se $D(p) = 8,000e^{-0.04p}$ njësi të një malli do të shiten kur çmimi është p euro për njësi. Çfarë ndodh me të hyrat e përgjithshme kur çmimi është 25 € njësia.

Zgjidhje. Funksioni i të hyrave totale është

$$R(p) = pD(p) = 8,000pe^{-0.04p},$$

me derivat

$$R'(p) = 8,000(e^{-0.04p} - 0.04pe^{-0.04p}) = 8,000(1 - 0.04p)e^{-0.04p}.$$

Kur $p = 25$ kemi

$$R'(25) = 8,000(1 - 0.04 \cdot 25)e^{-0.04 \cdot 25} = 0.$$

Nuk është vështirë të vërejmë poashtu se të hyrat totale kanë shpejtësi pozitive të ndryshimit kur çmimi p është më i vogël se 25 € dhe shpejtësi negative ndryshimi kur është më i madh se 25 €. Prej këtej mund të përfundojmë se prodhuesi arrin të hyra maksimale pikërisht kur çmimi i mallit është 25 € njësia. □

Detyra për ushtrime

1. Gjeni derivatin $\frac{dy}{dx}$ në qoftë se

   (a) $y = u^2 + 1$, $u = 3x - 2$;

   (b) $y = 2u^2 - u + 5$, $u = 1 - x^2$;

(c) $y = \sqrt{u}$, $u = x^2 + 2x - 3$;

(d) $y = u^2 + 2u - 3$, $u = \sqrt{x}$;

(e) $y = \frac{1}{u^2}$, $u = x^2 + 1$;

(f) $y = \frac{1}{\sqrt{u}}$, $u = x^2 - 9$;

(g) $y = u^2 + u - 2$, $u = \frac{1}{x}$;

(h) $y = \frac{1}{u-1}$, $u = x^2$;

(i) $y = u^2$, $u = \frac{1}{x-1}$.

2. Derivoni funksionet vijuese:

(a) $f(x) = (2x+1)^4$;

(b) $f(x) = \sqrt{5x^6 - 12}$;

(c) $f(x) = (x^5 - 4x^3 - 7)^8$;

(d) $f(t) = (3t^4 - 7t^2 + 9)^5$;

(e) $f(t) = \frac{1}{5t^2 - 6t + 2}$;

(f) $g(x) = \frac{1}{4x^2 + 1}$;

(g) $h(t) = (1 + \sqrt{3t})^5$;

(h) $f(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}$.

3. Bruto të hyrat vjetore të një kompanie janë $A(t) = \sqrt{10t^2 + t + 236}$ mijë euro t vite pas themelimit në vitin 2000.

(a) Me çfarë shpejtësie rriten sipas kohës bruto të hyrat e kompanisë në vitin 2005?

(b) Me çfarë shpejtësie procentuale rriten sipas kohës bruto të hyrat e kompanisë në vitin 2005?

4. Në një uzinë kostoja totale e prodhimit të q njësish gjatë prodhimtarisë ditore është $C(q) = \frac{1}{3}q^2 + 4q + 53$ euro. Nga përvoja është përcaktuar se përafërsisht $q(t) = 0.2t^2 + 0.03t$ njësi prodhohen pas t orësh pune prodhuese. Me çfarë shpejtësie ndryshon kostoja sipas kohës pas 4 orësh pune?

5. Një importues kafeje braziliene vlerëson se konsumatorët lokalë do të blejnë përafërsisht $D(p) = \frac{4,374}{p^2}$ kilogram kafe në javë kur çmimi është p euro për kilogram. Gjithashtu vlerësohet se t javë nga tani çmimi i kafesë braziliene do të jetë $p(t) = 0.02t^2 + 0.1t + 6$ euro për

kilogram. Me çfarë shpejtësie do të ndryshojë sipas kohës kërkesa javore për kafenë 10 javë nga tani? A do të jetë rritëse apo zvogëluese kërkesa?

6. Kur një mall i caktuar shitet p euro për njësi, konsumatorët blejnë $D(p) = \frac{8{,}000}{p}$ njësi në muaj. Vlerësohet se t muaj nga tani çmimi i mallit do të jetë $p(t) = 0.04t^{3/2} + 15$ euro për njësi. Llogaritni shpejtësinë me të cilën do të ndryshojë sipas kohës kërkesa mujore 25 muaj nga tani? A do të jetë rritëse apo zvogëluese kërkesa?

7. Kur një mall i caktuar shitet p euro për njësi, konsumatorët blejnë $D(p) = \frac{40{,}000}{p}$ njësi në muaj. Vlerësohet se t muaj nga tani çmimi i mallit do të jetë $p(t) = 0.4t^{3/2} + 6.8$ euro për njësi. Me çfarë shpejtësie procentuale do të ndryshojë sipas kohës kërkesa mujore për mallin 4 muaj nga tani?

Në detyrat 8–11, $C(x)$ është kostoja e përgjithshme e prodhimit të x njësish të një malli të caktuar dhe $p(x)$ çmimi me të cilin do të shiten që të gjitha x njësitë. Gjeni

(a) koston margjinale;

(b) koston mesatare të një njësie dhe koston mesatare margjinale;

(c) të hyrat totale dhe të hyrat margjinale;

(d) nivelin e prodhimit x ku të hyrat margjinale janë të barabarta me koston margjinale;

(e) nivelin e prodhimit x ku kostoja margjinale është e barabartë me koston mesatare.

8. $C(x) = e^{0.2x}$, $p(x) = e^{-3x}$.

9. $C(x) = x^3 + 20$, $p(x) = 2e^{-2x}$.

10. $C(x) = x^2 + 2$, $p(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$.

11. $C(x) = 9x + 5xe^{-2x}$, $p(x) = e^{-x}$.

1.7 Derivati i dytë

Në këtë pikë do të shqyrtohet shpejtësia e ndryshimit e shpejtësisë së ndryshimit të një madhësie. Me shpejtësi të tilla kemi të bëjmë në situata të ndryshme. Për shembull, nxitimi (përshpejtimi) i një veture është shpejtësia e ndryshimit sipas kohës të shpejtësisë së saj, e cila vetë është shpejtësia e ndryshimit sipas kohës të pozitës së saj. Në qotë se pozita matet me kilometra dhe koha me orë, atëherë shpejtësia (e ndryshimit të distancës) matet me kilometra në orë, kurse nxitimi (shpejtësia e ndryshimit të shpejtësisë) matet me kilometra në orë në orë.

Probleme të cilat kanë të bëjnë me shpejtësi ndryshimi shpejtësie hasen shpesh në ekonomiks. Në kohëra inflacioni, për shembull, mund të dëgjohet ekonomist qeveritar duke siguruar kombin që edhepse shkalla e inflacionit është duke u rritur, shpejtësia me të cilën ajo rritet është duke u zvogëluar. D.m.th., çmimet janë akoma duke shkuar sipër, por jo aq shpejt sa ishin më parë.

Shpejtësia e ndryshimit të funksionit $f(x)$ sipas x është derivati $f'(x)$, dhe, në mënyrë analoge, shpejtësia e ndryshimit të funksionit $f'(x)$ sipas x është deirvati i vetë $(f'(x))'$. Shënimi i tillë është i stërngarkuar, prandaj derivatin e derivatit të funksionit $f(x)$ e shënojmë me $(f'(x))' = f''(x)$ dhe e quajmë *derivati i dytë* i $f(x)$ (lexoni $f''(x)$ si „f dopjo prim prej x“ ose „f sekond prej x“).

Vërejtje. Derivati i zakonshëm $f'(x)$ ndonjëherë quhet *derivati i parë* për ta dalluar nga derivati i dytë $f''(x)$.

Derivati i dytë. Derivati i dytë i një funksioni është derivati i derivatit të tij. Në qoftë se $y = f(x)$, derivati i dytë shënohet me

$$f''(x) \quad \text{ose} \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Derivati i dytë jep shpejtësinë e ndryshimit të shpejtësisë së ndryshimit të funksionit fillestar.

Për ta gjetur derivatin e dytë të një funksioni nuk kemi nevojë të përdorim rregulla të reja; vetëm gjejmë derivatin e parë dhe pastaj derivojmë sërish.

Shembull 1. Gjeni derivatin e dytë të funksionit $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x - 3$.

Zgjidhje. Gjejmë derivatin e parë

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 7$$

dhe pastaj derivojmë sërish për të fituar

$$f''(x) = 12x^2 - 30x.$$

□

Një këshillë: para se ta llogarsni derivatin e dytë të një funksioni, gjithmonë shpenzoni ca kohë për të thjestësuar sa të jetë e mundur derivatin e parë. Sa më e ndërlikuar të jetë forma e derivatit të parë, aq më e mundimshme do të jetë llogaritja e derivatit të dytë.

Derivatin e dytë do ta shfrytëzojmë gjatë pikave vijuese për të fituar informata mbi format e grafikëve, si dhe për zgjidhje problemesh të optimizimit. Në vazhdim po japim një zbatim ca më elementar, i cili ilustron interpretimin e derivatit të dytë si shpejtësi e ndryshimit të shpejtësisë së ndryshimit.

Shembull 2. Një studim efikasiteti të punëtorëve të ndërrimit të mëngjesit në një uzinë tregon se një punëtor mesatar i cili arrin në punë në orën 8:00 do të ketë montuar

$$Q(t) = -t^3 + 11t^2 + 16t$$

radio-tranzistorë t orë më pas.

(a) Llogaritni shpejtësinë e prodhimit të punëtorit në orën 12:00?

(b) Me çfarë shpejtësie sipas kohës ndyrshon shpejtësia e prodhimit e punëtorit në orën 12:00?

(c) Zbatoni analizën matematike për të vlerësuar ndryshimin në shpejtësinë e prodhimit të punëtorit ndërmjet 12:00 dhe 12:10.

(d) Llogaritni ndryshimin e saktë në shpejtësinë e prodhimit të punëtorit ndërmjet 12:00 dhe 12:10.

Zgjidhje. (a) Shpejtësia e prodhimit e punëtorit është derivati i parë

$$Q'(t) = -3t^2 + 22t + 16$$

i funksionit të prodhimit $Q(t)$. Në orën 12:00 është $t = 4$ dhe shpejtësia e prodhimit është

$$Q'(4) = -3 \cdot 4^2 + 22 \cdot 4 + 16 = 56$$

njësi në orë.

(b) Shpejtësia e ndryshimit të shpejtësisë së prodhimit është derivati i dytë

$$Q''(t) = -6t + 22$$

i funksionit të prodhimit. Në orën 12:00 kjo shpejtësi është

$$Q''(4) = -6 \cdot 4 + 22 = -2$$

njësi në orë në orë.

Parashenja negative tregon se shpejtësia e prodhimit e punëtorit është duke u zvogëluar; d.m.th., punëtori është duke ngadalsuar. Shpejtësia e këtij ngadalsimi është 2 njësi në orë në orë.

(c) Vërejmë se 10 minuta janë $\frac{1}{6}$ orë. Për të vlerësuar ndryshimin në shpejtësinë e prodhimit $Q'(t)$ për shkak të ndryshimit në t prej $\Delta t = \frac{1}{6}$ orë, zbatojmë në funksionin $Q'(t)$ formulën për përafrim me shtesa

$$\Delta Q' \approx Q''(t)\Delta q,$$

për të fituar pas zëvendësimit $t = 4$ dhe $\Delta t = \frac{1}{6}$:

$$\Delta Q' \approx Q''(4)\Delta q = -2 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \approx -0.33$$

njësi në orë. D.m.th., shpejtësia e prodhimit e punëtorit në orën 11:00 do të zvogëlohet për përafërsisht 0.33 njësi gjatë 10 minutave vijues.

(c) Ndryshimi i saktë i shpejtësisë së prodhimit të punëtorit ndërmjet 11:00 dhe 11:10 është ndryshimi ndërmjet vlerave të shpejtësisë $Q'(t)$ kur $t = 4 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$ dhe kur $t = 4$. D.m.th.,

$$\begin{aligned}
&Q'\left(\frac{25}{6}\right) - Q'(4) \\
&\qquad = -3\left(\frac{25}{6}\right)^2 + 22\left(\frac{25}{6}\right) + 16 - (-3 \cdot 4^2 + 22 \cdot 4 + 16) \\
&\qquad \approx 55.58 - 56 = -0.42
\end{aligned}$$

njësi në orë. Pra, deri në orën 11:10 shpejtësia e prodhimit e punëtorit, e cila ishte 56 njësi në orën 11:00 do të zvogëlohet saktësisht për 0.42 njësi në orë. □

Detyra për ushtrime

1. Gjeni derivatin e dytë për funksionin e dhënë:

   (a) $f(x) = 5x^{10} - 6x^5 - 27x + 4$;

   (b) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 6x - 2$;

   (c) $y = 5\sqrt{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$;

(d) $y = \frac{3}{2x}5 - \sqrt{2x} + \sqrt{2}x - \frac{1}{6\sqrt{x}}$;

(e) $f(x) = (3x-1)^4$;

(f) $f(x) = (x^2+1)^5$;

(g) $f(t) = \frac{2}{5t+1}$;

(h) $f(x) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$.

2. Një studim efikasiteti të punëtorëve të ndërrimit të mëngjesit në një uzinë tregon se një punëtor mesatar i cili arrin në punë në orën 8:00 do të ketë prodhuar $Q(t) = -t^3 + 8t^2 + 15t$ njësi pas t orësh.

   (a) Llogaritni shpejtësinë e prodhimit të punëtorit në orën 9:00?

   (b) Me çfarë shpejtësie sipas kohës ndyrshon shpejtësia e prodhimit e punëtorit në orën 9:00?

   (c) Zbatoni analizën matematike për të vlerësuar ndryshimin në shpejtësinë e prodhimit të punëtorit ndërmjet 9:00 dhe 9:15.

   (d) Llogaritni ndryshimin e saktë në shpejtësinë e prodhimit të punëtorit ndërmjet 9:00 dhe 9:15.

3. Është parapare që t vjet nga tani çmimi mesatar për njësi mallrash në një sektor të caktuar të ekonomisë do të jetë $p(t) = -t^3 + 7t^2 + 200t + 300$ euro.

   (a) Me çfarë shpejtësie sipas kohës do të rritet çmimi për njësi pas 5 muajsh?

   (b) Me çfarë shpejtësie sipas kohës do të ndryshojë shpejtësia e rritjes së çmimit pas 5 muajsh?

   (c) Zbatoni analizën matematike për të vlerësuar ndryshimin në shpejtësinë e rritjes së çmimit nga muaji i pestë deri në muajin e tetë.

   (d) Llogaritni ndryshimin e saktë në shpejtësinë e prodhimit të punëtorit nga muaji i pestë deri në muajin e tetë.