ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

§ 1. Понятие о тригонометрическом ряде; сопряженные ряды

Тригонометрическим рядом называют выражение вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1.1}$$

где a_n, b_n — постоянные числа ($n = 0, 1, 2, \ldots$), носящие название *коэффициентов ряда* *).

Если такой ряд сходится для всех x на $-\infty < x < +\infty$, то он изображает функцию, имеющую период 2π. Поэтому, желая изобразить функцию тригонометрическим рядом, рассматривают либо периодические функции с периодом 2π, либо берут функцию, заданную на отрезке длины 2π, а дальше продолжают ее периодически, т. е. требуют, чтобы $f(x+2\pi) = f(x)$ при любом x.

Тригонометрические ряды играют выдающуюся роль не только в самой математике, но и в многочисленных ее приложениях. Но прежде чем говорить об этом, отметим сразу же связь между тригонометрическими и степенными рядами. Если мы рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{1.2}$$

где $c_n = a_n - ib_n$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$ и положим $z = re^{ix}$, то ряд (1.1) есть не что иное, как действительная часть ряда (1.2) на единичной окружности; чисто мнимая часть ряда (1.2) при $z = e^{ix}$ есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx, \tag{1.3}$$

который обычно называют *рядом, сопряженным с рядом* (1.1)

Если предполагать числа c_n ограниченными, то ряд (1.2) изображает аналитическую функцию внутри единичного круга, т. е. при $z = re^{ix}$, где

*) Почему свободный член пишется в виде $\frac{a_0}{2}$, станет ясно в дальнейшем (см. § 4).

$0 \leqslant r < 1$ и $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; поэтому ее действительная и мнимая части

$$u(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$$

и

$$v(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx) r^n$$

являются сопряженными гармоническими функциями; отсюда и произошло название «сопряженные ряды». Изучение поведения сопряженных рядов есть не что иное, как исследование поведения сопряженных гармонических функций на окружности $|z| = 1$.

§ 2. Комплексная форма тригонометрического ряда

Часто бывает более удобно придать тригонометрическому ряду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{2.1}$$

иную форму. Именно, замечая, что из известного тождества Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

следует

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

мы можем записать ряд (2.1) в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + ib_n \frac{e^{-inx} - e^{+inx}}{2},$$

откуда, полагая

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \tag{2.2}$$

видим, что ряд (2.1) принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}. \tag{2.3}$$

Это так называемая *комплексная форма тригонометрического ряда*. Частная сумма ряда (2.1), т. е.

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

принимает теперь вид

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=+n} c_k e^{ikx}, \tag{2.4}$$

т. е. сходимость ряда (2.3) надо понимать как стремление к пределу сумм вида (2.4).

В некоторых задачах приходится иметь дело с тригонометрическими рядами вида (2.3), коэффициентами которых являются любые комплексные числа. Если же предполагать, что в ряде (2.1) числа a_n и b_n все действительные, то, как показывает формула (2.2), числа c_n и c_{-n} будут сопряженными комплексными числами, т. е. $c_{-n} = \bar{c}_n$ (знак $\bar{a}$ всегда будет обозначать число, сопряженное с a).

§ 3. Краткие исторические сведения

Задача о возможности изобразить функцию тригонометрическим рядом, по-видимому, впервые была поставлена Эйлером в 1753 г. в связи с появившейся в это время работой Даниила Бернулли «О колеблющихся струнах».

Если струну, закрепленную в двух концах, вывести из состояния равновесия и, не давая ей никакой начальной скорости, предоставить ей свободно колебаться, то, как утверждал Бернулли, положение струны в момент времени t определяется формулой

$$y = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \sin p\frac{\pi x}{l} \cos p\,k\,t,$$

где l — длина струны и k — некоторый коэффициент, зависящий от плотности и натяжения струны. Что же касается коэффициентов a_p, то это произвольные постоянные, и их можно подобрать так, чтобы удовлетворить начальным условиям, т. е. требованиям, чтобы в начальный момент струна занимала некоторое заданное положение.

Эйлер заметил, что это утверждение Бернулли приводит к парадоксальным — по мнению математиков его времени — результатам. Действительно, если $y = f(x)$ есть начальное положение струны, то, полагая $t = 0$, мы должны получить

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \sin p\frac{\pi x}{l},$$

т. е. «произвольная» функция $f(x)$ может быть разложена в ряд по синусам. Однако Эйлер и его современники делили кривые на два класса: те, которые они называли «непрерывными», и другие — «геометрические». Кривую — в отличие от принятой теперь терминологии — называли непрерывной, если y и x были связаны некоторой формулой; напротив, геометрической кривой называли любую кривую, которую можно произвольно начертить «от руки». При этом всем казалось очевидным, что если кривая задана формулой, то она, будучи определена на некотором маленьком интервале, автоматически определена и всюду дальше *). Поэтому они не сомневались, что вторая категория кривых шире первой, так как, например, ломаную линию они не могли считать «непрерывной», а лишь составленной из кусков непрерывных линий.

Если бы «произвольную» функцию можно было разложить в ряд синусов, т. е. представить формулой — это значило бы, что всякая «геометрическая» кривая есть «непрерывная» кривая, что казалось совершенно неправдоподобным. В частности, Даламбер заметил, что наиболее естественный способ вывести струну из состояния равновесия, это — взять ее за одну из ее точек и потянуть вверх, благодаря чему она займет положение, изображенное двумя прямыми, образующими между собой угол. Даламбер считал, что кривая такого рода не может быть суммой ряда из синусов **).

---

*) Это свойство присуще аналитическим функциям.

**) По поводу спора между Эйлером и Даламбером о том, что надо называть «произвольной функцией», возникшего в связи с решением проблемы о колеблющейся струне, см. чрезвычайно интересную статью «Функция» Н. Н. Лузина [4] (она должна также появиться в томе III Собрания сочинений Н. Н. Лузина).

Вопрос о том, какие же функции могут быть изображены тригонометрическими рядами, значительно позже был снова поставлен в работах Фурье. В связи с изучением проблем теплопроводности ему пришлось поставить перед собой следующую задачу: пусть задана функция

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{на} \quad -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{на} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Требуется представить ее в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \tag{3.1}$$

Фурье указал формулы, при помощи которых надо определить a_n так, чтобы ряд (3.1) мог иметь $f(x)$ своей суммой. Именно, это ряд вида

$$\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \ldots\right].$$

Фурье не доказал, что ряд обязан сходиться к функции $f(x)$, однако более поздними изысканиями этот вопрос был решен в положительном смысле. Во всяком случае важно, что Фурье впервые решил вопрос, как надо определить коэффициенты тригонометрического ряда, для того чтобы он мог иметь суммой заданную функцию. Совершенно другой вопрос — будет ли действительно такой ряд сходиться и иметь эту функцию своей суммой.

§ 4. Формулы Фурье

Допустим, что функция $f(x)$ не только является суммой тригонометрического ряда, но этот ряд сходится равномерно на $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$; тогда определить его коэффициенты очень легко. Для этого следует только, умножив равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

на $\cos kx$ или на $\sin kx$, проинтегрировать его в пределах от $-\pi$ до $+\pi$ (что законно) и заметить, что

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0, \quad m \neq n, \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0, \quad m \neq n, \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0, \quad m \neq n \text{ и } m = n, \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

В результате получаем *)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx. \tag{4.2}$$

*) Свободный член ряда надо было писать в виде $\frac{a_0}{2}$, чтобы a_0 получалось из a_n при $n = 0$.

Формулы (4.2) называются *формулами Фурье* *), числа a_n и b_n — коэффициентами Фурье, наконец, ряд, коэффициенты которого определяются по формулам Фурье, отправляясь от функции $f(x)$, носит название *ряда Фурье* для функции $f(x)$. Мы будем его обозначать $\sigma(f)$.

§ 5. Комплексная форма ряда Фурье

Если ряд, изображающий $f(x)$, задан в комплексной форме (см. § 2) **), т. е. если мы предполагаем, что

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}, \tag{5.1}$$

то коэффициенты c_n определяются формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots), \tag{5.2}$$

которые можно получить либо отправляясь от равенств (2.2) и подставляя значения a_n и b_n из формул Фурье, либо аналогично тому, как выводились сами формулы Фурье. Именно, предполагая, что

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k e^{ikx}, \tag{5.3}$$

где сходимость равномерная, умножая обе части равенства (5.3) на e^{-inx} и интегрируя почленно, находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx.$$

Но

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n, \\ 2\pi, & \text{если } k = n, \end{cases} \tag{5.4}$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 2\pi c_n,$$

что и доказывает справедливость формулы (5.2).

Числа c_n называют *комплексными коэффициентами Фурье функции* $f(x)$.

§ 6. Проблемы теории рядов Фурье; ряды Фурье—Лебега

В §§ 4 и 5 мы решили только вопрос, как должны быть определены коэффициенты тригонометрического ряда, если мы знаем, что он сходится равномерно к некоторой функции $f(x)$. Оказалось, что в таком случае этот ряд имеет коэффициенты, определяемые по формулам Фурье, т. е. является рядом Фурье от $f(x)$.

---

*) Собственно говоря, эти формулы были известны еще Эйлеру, но Фурье стал ими пользоваться систематически, поэтому по традиции их называют формулами Фурье и соответствующий ряд — рядом Фурье.

**) При ссылках на параграф или формулу из той же главы номер главы не указывается.

Однако для того, чтобы функция могла быть суммой равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций, необходимо, чтобы она была непрерывной. Поэтому могло бы показаться, что желая изобразить функцию рядом Фурье, мы вынуждены ограничиться тем случаем, когда она непрерывна. Мы увидим, что на самом деле теория рядов Фурье охватывает гораздо более широкий класс функций. Но прежде всего условимся точнее, что надо понимать под рядом Фурье.

В формулах Фурье фигурируют интегралы. Мы знаем, что понятие интеграла, начиная от Коши, развивалось и в связи с этим становился все шире класс интегрируемых функций. В этой книге под классом «интегрируемых функций» мы всегда будем понимать функции, интегрируемые по Лебегу. Такие функции, как известно, носят название суммируемых; составленные для них ряды называют рядами Фурье—Лебега. Для краткости мы все же будем просто говорить «ряды Фурье», но иметь в виду, что рассматриваемые функции всегда суммируемы.

Пусть $f(x)$ суммируема на $[-\pi, \pi]$. Тогда для нее всегда можно определить по формулам Фурье числа a_n, b_n и составить ряд, который мы будем называть рядом Фурье для этой функции и писать

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{6.1}$$

или

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{6.2}$$

Знак $\sim$ указывает на то, что мы построили этот ряд чисто формальным образом, отправляясь от $f(x)$ и пользуясь формулами Фурье, но мы ничего не знаем о сходимости этого ряда. Возникает целый ряд проблем: должен ли ряд Фурье сходиться (на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ или в заданной точке, или на некотором множестве) и если да, то сходится ли он к функции $f(x)$ или нет? В каких случаях сходимость будет абсолютной, когда она будет равномерной? Что можно сказать о расходящихся рядах Фурье (дают ли они возможность все же как-то судить о функции?). Этим и многим другим проблемам и будут посвящены следующие главы книги.

Следует еще отметить, что бывают случаи, когда тригонометрический ряд задан своими коэффициентами, но мы не знаем, является ли он рядом Фурье от некоторой функции, или нет. Это — одна из очень интересных, но трудных проблем теории тригонометрических рядов.

§ 7. Разложение в тригонометрический ряд функций с периодом $2l$

До сих пор мы рассматривали разложение в тригонометрический ряд функций с периодом 2π. Если функция $f(x)$ имеет период $2l$, где l — некоторое действительное число, то, производя замену переменного,

$$x = \frac{lt}{\pi},$$

мы получим функцию

$$\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right),$$

которая будет уже иметь период 2π.

Если мы найдем ее ряд Фурье

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt\, dt; \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt\, dt,$$

то, возвращаясь снова к переменному x, получим

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos nt\, dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos n\frac{\pi}{l} x\, dx, n = 0, 1, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin nt\, dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin n\frac{\pi}{l} x\, dx, n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (7.1)$$

а потому функции $f(x)$ будет отвечать ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{l} x + b_n \sin n\frac{\pi}{l} x, \quad (7.2)$$

где числа a_n и b_n определены формулами (7.1).

Все, что будет говориться в дальнейшем о сходимости обычных тригонометрических рядов, вполне применимо и к рядам вида (7.2).

Наконец рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ не периодическая. Если она определена на некотором отрезке $[a, b]$, где $-\pi < a < b < \pi$ (рис. 4),

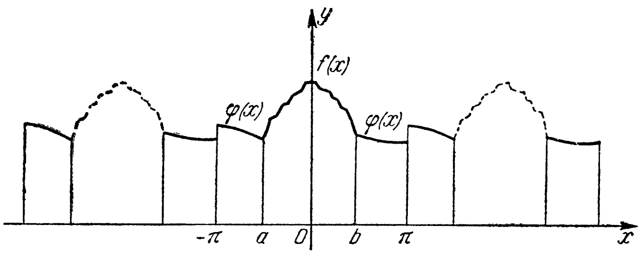

Рис. 4

и суммируема на нем, то можно разложить ее в тригонометрический ряд так: построить функцию $\varphi(x)$, совпадающую с $f(x)$ на $[a, b]$ и определенную на $(-\pi, a)$ и (b, π) как угодно, лишь бы она была суммируема. Полагая затем $\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x)$, мы разлагаем $\varphi(x)$ в ряд Фурье. Допустим, что этот ряд будет сходиться к $\varphi(x)$ в некоторой точке x, $a < x < b$; значит сумма его в этой точке будет равна $f(x)$. Ясно, что, продолжая $f(x)$ разными способами за пределы (a, b), мы будем получать разные функции $\varphi(x)$. Однако впоследствии (см. § 33) будет доказано, что ряды Фурье от всех этих функций будут вести себя одинаково, т. е. если хоть один из них сходится к $f(x)$ в рассматриваемой точке, то и все остальные также.

§ 8. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Если $f(x)$ четная, т. е. $f(-x)=f(x)$, а $g(x)$ — нечетная, т. е. $g(-x)=-g(x)$, то $f(x)\,g(x)$, очевидно, нечетная; напротив, если $f(x)$ и $g(x)$ обе четные или обе нечетные, то $f(x)\,g(x)$ — четная.

Это простое замечание позволяет сразу заключить, что у всякой четной функции ряд Фурье содержит одни косинусы, а у нечетной — одни синусы. Действительно, для любой нечетной функции $\varphi(x)$ и для любого $a>0$ имеем

$$\int_{-a}^{a}\varphi(x)\,dx=0,$$

а потому для четных $f(x)$ имеем

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0 \qquad (n=1,2,3,\ldots),$$

а для нечетных $f(x)$ имеем

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0, \qquad (n=0,1,\ldots).$$

Кроме того, для любой четной $\varphi(x)$ и для любого $a>0$ имеем

$$\int_{-a}^{a}\varphi(x)\,dx=2\int_{0}^{a}\varphi(x)\,dx.$$

Поэтому окончательно: если $f(x)$ четная, то

$$\sigma(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

где

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,$$

если $f(x)$ нечетная, то

$$\sigma(f)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

§ 9. Ряд Фурье по ортогональной системе

Когда мы ставили перед собой задачу, как определить коэффициенты тригонометрического ряда для того, чтобы он мог сходиться к заданной функции $f(x)$, мы рассматривали лишь частный случай гораздо более общей проблемы. Чтобы сформулировать, в чем она заключается, введем понятие ортогональной системы.

Некоторая система функций $\varphi_n(x) \in L^2(a, b)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называется *ортогональной* на отрезке $[a, b]$, если

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad && m \neq n;\, m = 1, 2, \ldots;\, n = 1, 2, \ldots \\ &\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx \neq 0 && n = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (9.1)$$

Соотношения (4.1) суть не что иное, как доказательство ортогональности тригонометрической системы

$$1, \cos x,\ \sin x, \ldots, \cos nx,\ \sin nx, \ldots$$

на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Ортогональная система называется *нормированной*, если

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Примером нормированной ортогональной системы может служить *система Радемахера* (Rademacher [1]), которая строится так: отрезок [0,1] делится на 2^n равных отрезков и функция $r_n(x)$ полагается равной $+1$ на первом, третьем, ..., $(2^n - 1)$-м интервале, и равной -1 на втором, четвертом, ..., 2^n-м интервале (т. е. она попеременно принимает значения $+1$ и -1), а в концах интервалов ее считают равной нулю. И так для всех значений n $(n = 1, 2, \ldots)$. Ортогональность полученной системы $\{r_n(x)\}$ на отрезке [0,1] следует из того, что если $m \neq n$ (пусть $m < n$), то функция $r_n(x)$ на каждом интервале постоянства $r_m(x)$ принимает столько же раз значение $+1$, сколько и -1 и длины интервалов, на которых она постоянна, все равны между собой. Таким образом мы убеждаемся, что

$$\int_0^1 r_m(x)\,r_n(x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n).$$

Так как при любом n имеем $r_n^2(x) = 1$ всюду, кроме конечного числа точек, то система $\{r_n(x)\}$ нормирована.

В дальнейшем при изучении свойств тригонометрических рядов система Радемахера окажется очень полезной *).

Тригонометрическая система не является нормированной, но становится нормированной, если первую функцию умножить на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, а все остальные на $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, т. е. система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

уже является нормированной ортогональной системой.

Мы не будем рассматривать вопроса о том, почему именно представляется чрезвычайно интересным и важным изучение ортогональных систем. Этому вопросу посвящены специальные книги. Здесь же мы хотим лишь указать,

*) Ознакомиться подробно со свойствами системы Радемахера читатель может по книге Качмажа и Штейнгауза [М. 7].

что целый ряд теорем из теории тригонометрических рядов может быть получен весьма просто, исходя из гораздо более общих результатов, касающихся так называемых ортогональных рядов.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \tag{9.2}$$

где c_n — постоянные коэффициенты, а $\{\varphi_n(x)\}$ — заданная ортогональная система функций, называется *рядом по ортогональной системе* $\{\varphi_n(x)\}$ или, короче, *ортогональным рядом.*

Подобно тому, как мы спрашивали себя, как найти коэффициенты тригонометрического ряда, если мы знаем, что он сходится к некоторой функции $f(x)$, можно поставить вопрос о том, каковы коэффициенты c_n, если мы знаем, что

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{9.3}$$

Допустим снова, что ряд равномерно сходится. Будем предполагать систему $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональной и нормированной на (a, b). Тогда, умножив обе части равенства (9.3) на $\varphi_m(x)$ и интегрируя в пределах от a до b, найдем*)

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx = c_m \int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx = c_m,$$

т. е.

$$c_m = \int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{9.4}$$

Эти формулы также называют *формулами Фурье*, и если для некоторой функции $f(x)$ по формулам (9.4) найдены числа c_n и из них образован ряд (9.2), то его называют *рядом Фурье от функции $f(x)$ по ортогональной системе* $\{\varphi_n(x)\}$.

Здесь, как и для случая тригонометрической системы, гипотеза равномерной сходимости ряда была крайне ограничительной. Мы можем рассматривать ряд Фурье для функции $f(x)$ при единственном предположении, что интегралы (9.4) имеют смысл, и писать тогда

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Так же как и в теории тригонометрических рядов, возникает вопрос о сходимости ряда Фурье и о том, в какой мере он характеризует функцию $f(x)$.

Прежде всего ясно, что для того, чтобы ряд Фурье мог в какой бы то ни было мере определять свойства функции, необходимо, чтобы у двух разных функций не могло быть одинаковых рядов Фурье. Для выяснения вопроса, когда это имеет место, нам необходимо изучить понятие о полноте ортогональной системы. Этот вопрос будет рассматриваться в § 10. Здесь же мы хотим еще указать, что надо понимать под ортогональной системой в случае, когда функции $\varphi_n(x)$ являются комплексными.

*) Здесь функции $\varphi_n(x)$ и $f(x)$ предполагаются такими, что интегралы (9.4) имеют смысл.

Если функции $\varphi_n(x)$ являются комплексными функциями действительного переменного x, то их называют *ортогональными*, когда

$$\int_a^b \varphi_m(x)\overline{\varphi}_n(x)\,dx = 0 \quad (m \neq n) \tag{9.5}$$

и

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,dx \neq 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9.6}$$

Система *нормирована*, если

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,dx = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

В случае комплексных функций формулы Фурье принимают вид

$$c_n = \int_a^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)\,dx \tag{9.7}$$

для нормированной системы и

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)\,dx}{\int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,dx}$$

для ненормированной системы.

Важнейшим примером ортогональной системы из комплексных функций является система $\{e^{inx}\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; она ортогональна на любом отрезке длины 2π (см. § 5). Если ввести множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, т. е. рассмотреть систему

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\} \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots),$$

то она будет и нормированной.

§ 10. Полнота ортогональной системы

Введем следующее важное определение *).

Определение. Система функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на некотором отрезке $[a, b]$, называется полной в $L^p[a, b]$ $(p \geqslant 1)$ (или в $C[a, b]$), если не существует ни одной функции $f(x) \in L^p[a, b]$ (или $f(x) \in C[a, b]$), которая ортогональна ко всем функциям этой системы без того, чтобы $f(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$ (для случая пространства C — всюду на $[a, b]$).

Иначе говоря, для полной системы из равенств

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{10.1}$$

и из $f(x) \in L^p[a, b]$ должно следовать $f(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$ (для пространства C аналогично, но уже слова «почти всюду» надо заменить на «всюду»).

*) Относительно всех употребляемых здесь обозначений см. «Обозначения» (стр. 15).

Для того чтобы интегралы, входящие в (10.1), имели смысл для любой $f(x) \in L[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы все $\varphi_n(x)$ были ограничены на $[a, b]$; если $f(x) \in L^p[a, b]$, то необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_n(x) \in L^q[a, b]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (см. § 9 Вводного материала и § 3 Добавлений), наконец, для $f(x) \in C$ от функций $\varphi_n(x)$ требуется одна лишь суммируемость.

Понятие полноты вводится без предположения ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$, но мы будем интересоваться тем случаем, когда она ортогональна.

Если функции $\varphi_n(x)$ комплексные, то определение сохраняет силу, только вместо равенств (10.1) следует писать

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi}_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$

Если две функции $f(x) \in L^p[a, b]$ и $g(x) \in L^p[a, b]$ отличны на множестве меры больше нуля, то они не могут иметь одинаковых рядов Фурье по полной в $L^p[a, b]$ системе функций $\{\varphi_n(x)\}$ (при $p \geqslant 1$). Действительно, если бы это имело место, то разность $\psi(x) = f(x) - g(x)$ была бы функцией, принадлежащей к $L^p[a, b]$ и ортогональной ко всем $\{\varphi_n(x)\}$, причем условие $\psi(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$ не выполнено, а это противоречит определению полноты системы.

§ 11. Полнота тригонометрической системы в пространстве L

Мы докажем, что тригонометрическая система полна в пространстве $L(-\pi, \pi)$, т. е. убедимся, что две суммируемые функции имеют одинаковые тригонометрические ряды Фурье только в том случае, когда они совпадают почти всюду на $(-\pi, \pi)$.

Для этого мы предварительно докажем, что, если уже известна полнота тригонометрической системы в C, то отсюда мгновенно получается и ее полнота в L.

В самом деле, допустим, что $f(x) \in L$ и

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots),\\ &\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).\end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

Тогда, обозначая через a_n и b_n коэффициенты Фурье от $f(x)$, имеем

$$a_n = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$
$$b_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt$$

на

$$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

и

$$F(x + 2\pi) = F(x).$$

Ясно, что $F(\pi) = \pi a_0 = 0$ и $F(-\pi) = 0$, следовательно, $F(x)$ непрерывна не только на $[-\pi, \pi]$, но и на всей прямой $-\infty < x < +\infty$. Ее коэффициенты Фурье A_n и B_n находим, интегрируя по частям, именно

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx\, dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = 0.$$

(в силу (11.1)) и аналогично

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = 0 \ (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, у $F(x)$ все коэффициенты Фурье, кроме A_0, должны быть равны нулю. Раз $F(x)$ непрерывна, то, полагая $\Phi(x) = F(x) - \frac{A_0}{2}$, мы видим, что $\Phi(x)$ непрерывна и имеет все коэффициенты Фурье равными нулю, т. е. она ортогональна ко всем функциям тригонометрической системы. Но мы предположили уже известным, что тригонометрическая система полна в C. Значит, $\Phi(x) \equiv 0$, а потому $F(x) = \frac{A_0}{2} = \text{const}$. Но так как $F'(x) = f(x)$ почти всюду, то $f(x) = 0$ почти всюду, а это и требовалось доказать.

Докажем теперь полноту тригонометрической системы в C.

Мы условились (Вводный материал, § 22) называть тригонометрическим полиномом всякое выражение вида

$$T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx. \tag{11.2}$$

Ясно, что если $f(x)$ ортогональна ко всем функциям тригонометрической системы, то она ортогональна и к любому тригонометрическому полиному, т. е. для любого $T_n(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, T_n(x)\, dx = 0. \tag{11.3}$$

Мы покажем, что если $f(x)$ непрерывна, но не есть тождественный нуль, то тригонометрический полином $T_n(x)$ можно подобрать так, чтобы интеграл в левой части равенства (11.3) был положителен; тогда ясно, что избежать противоречия можно, только считая $f(x) \equiv 0$.

Итак, пусть $f(x) \not\equiv 0$; тогда найдется такая точка ξ, где $f(\xi) = c \neq 0$. Не нарушая общности, можно предполагать $c > 0$ (так как в противном случае достаточно было бы доказать, что $-f(x) \equiv 0$). Можно также предположить, что $\xi = 0$, так как если мы умеем для функции $\varphi(x)$, у которой $\varphi(0) > 0$, найти полином $T_n^*(x)$, для которого

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, T_n(x)\, dx > 0,$$

то полагая $\varphi(x) = f(\xi + x)$ и $T_n(x) = T_n^*(x - \xi)$, видим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, T_n(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi + x)\, T_n(\xi + x)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, T_n^*(x)\, dx > 0.$$

Итак, остается доказать, что если $f(0) = c > 0$, то можно найти полином $T_n(x)$, для которого

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, T_n(x)\, dx > 0. \tag{11.4}$$

Но если $f(0)=c>0$, то найдется, в силу непрерывности $f(x)$, такой интервал $(-\delta,\ +\delta)$, где $f(x)\geqslant\frac{c}{2}$. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,T_n(x)\,dx=\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,T_n(x)\,dx+\int_{-\pi}^{-\delta} f(x)\,T_n(x)\,dx+\int_{\delta}^{\pi} f(x)\,T_n(x)\,dx.$$

Так как $f(x)$ непрерывна, то она ограничена, т. е.

$$|f(x)|\leqslant M \qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi, \tag{11.5}$$

где M постоянное.

Пусть $A>0$ задано. Допустим, что удалось подобрать $T_n(x)$ так, чтобы удовлетворились условия

$$T_n(x)\geqslant 1 \quad \text{на } (-\delta,\delta), \tag{11.6}$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} T_n(x)\,dx>A \tag{11.7}$$

и

$$|T_n(x)|\leqslant 1 \quad \text{на} \quad (-\pi,\delta) \quad \text{и} \quad (\delta,\pi). \tag{11.8}$$

Возьмем $A>\frac{4M\pi}{c}$, где M взято из условия (11.5). Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,T_n(x)\,dx>\frac{cA}{2}-M\cdot 2\pi>0$$

и, значит, (11.4) имеет место, а тогда доказательство будет закончено.

Итак, осталось подобрать тригонометрический полином $T_n(x)$ такой, что удовлетворены условия (11.6), (11.7) и (11.8).

Чтобы найти такой полином, заметим, что если

$$T(x)=1+\cos x-\cos\delta,$$

то $T(x)\geqslant 1$ на $(-\delta,\delta)$ и $|T(x)|\leqslant 1$ вне $(-\delta,\delta)$, а стало быть, и для

$$T_n(x)=[T(x)]^n$$

имеем

$$|T_n(x)|\leqslant 1 \text{ вне } (-\delta,\ \delta) \text{ и } T_n(x)\geqslant 1 \text{ на } (-\delta,\ \delta).$$

Кроме того, на $\left(-\frac{\delta}{2},\ \frac{\delta}{2}\right)$ имеем

$$T(x)>1+\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta=q>1,$$

а потому

$$\int_{-\delta}^{\delta} T_n(x)\,dx>\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} T_n(x)\,dx>q^n\delta\to\infty$$

при $n\to\infty$ и, значит, при любом A, выбирая n достаточно большим, мы можем добиться выполнения неравенства (11.7).

Осталось доказать, что $T_n(x)$ тригонометрический полином. Но так как $T(x)=\cos x+c$, где c — постоянное, то $[T(x)]^n$ есть тригонометрический полином при любом n (см. § 22 Вводного материала).

Итак, наша теорема полностью доказана. Из самого определения полноты системы в пространстве L^p следует, что если $p' > p$, то полнота в L^p влечет полноту в $L^{p'}$. В частности, тригонометрическая система, будучи полной в L (§ 11), будет полна и в L^p при любом $p > 1$.

§ 12. Равномерно сходящиеся ряды Фурье

Из полноты тригонометрической системы в C вытекает следующее простое, но важное следствие:

Теорема. *Если ряд Фурье непрерывной функции $f(x)$ равномерно сходится, то сумма этого ряда совпадает с $f(x)$.*

Действительно, пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

причем $f(x)$ непрерывна, а ряд в правой части сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$. Обозначим через $S(x)$ его сумму. Ясно, что $S(x)$ непрерывна. Но мы видели (см. § 4), что если $S(x)$ есть сумма равномерно сходящегося тригонометрического ряда, то его коэффициенты a_n и b_n получаются из $S(x)$ при помощи формул Фурье. С другой стороны, по условию, a_n и b_n получаются из $f(x)$ по формулам Фурье. Отсюда следует, что $S(x)$ и $f(x)$ имеют одинаковые коэффициенты Фурье. Следовательно, в силу полноты тригонометрической системы в C они должны совпадать тождественно.

Впоследствии (см. § 48) мы убедимся, что в этой теореме требование равномерной сходимости можно отбросить и утверждать, что если $f(x)$ непрерывна, то во всякой точке, где ее ряд Фурье сходится, он сходится именно к $f(x)$.

В данный момент, поскольку мы уже говорим о равномерно сходящихся рядах, целесообразно сразу же доказать одну лемму, которая будет часто применяться впоследствии.

Лемма. *Пусть тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

имеет подпоследовательность частных сумм, сходящуюся равномерно к некоторой функции $f(x)$. Тогда этот ряд есть ее ряд Фурье (в частности, это тем более верно, когда сам ряд равномерно сходится к $f(x)$).

Действительно, пусть $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ сходится равномерно к $f(x)$. Тогда и подавно

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_{n_k}(x)|\, dx \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Отсюда для любого m имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_{n_k}(x)] \cos mx\, dx \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_{n_k}(x)] \sin mx\, dx \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

т. е.

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_{n_k}(x) \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx$$

и аналогично для $\sin mx$. Но в силу ортогональности тригонометрической системы, если $n_k \geqslant m$, то имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_{n_k}(x) \cos mx \, dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi a_m,$$

а потому

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_{n_k}(x) \cos mx \, dx = \pi a_m$$

и, значит,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

и аналогично для b_m. Лемма доказана.

§ 13. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье; неравенство Бесселя

Вернемся теперь к общему случаю, т. е. к рассмотрению ряда Фурье по любой ортогональной системе. Мы займемся ортогональными системами полными в L^2, так как они обладают рядом важных свойств, к изучению которых мы переходим.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ полна в $L^2[a, b]$, ортогональна и нормирована на этом отрезке. Поставим перед собой следующую задачу: дана функция $f(x) \in L^2$; берем n функций системы $\{\varphi_n(x)\}$ и рассматриваем всевозможные выражения вида $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$, которые условимся называть полиномами n-го порядка относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$. Мы хотим знать, как надо выбрать константы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ для того, чтобы полином $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$ давал наилучшее приближение для $f(x)$ в метрике L^2, т. е. чтобы норма разности

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \right\| L^2$$

была минимальной. Мы докажем теорему.

Т е о р е м а. *Среди всех полиномов n-го порядка по нормированной ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$ наилучшее приближение в метрике L^2 для $f(x) \in L^2$ дается n-й частной суммой ее ряда Фурье по этой системе.*

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, которую мы для общности будем доказывать, предполагая $\varphi_n(x)$ комплексными, мы напишем, применяя тождество $|A|^2 = A \cdot \bar{A}$:

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2}^2 = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \right|^2 dx =$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \right] \left[\bar{f}(x) - \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k \bar{\varphi}_k(x) \right] dx =$$

$$= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_a^b \bar{f}(x) \varphi_k(x) \, dx - \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k \int_a^b f(x) \bar{\varphi}_k(x) \, dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_k \bar{\alpha}_j \int_a^b \varphi_k(x) \bar{\varphi}_j(x) \, dx;$$

и так как

$$\int_a^b \varphi_k(x)\overline{\varphi}_j(x)\,dx = 0 \quad \text{для} \quad k \neq j,$$

$$\int_a^b |\varphi_k(x)|^2 dx = 1 \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то

$$\int_a^b \Big|f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k\varphi_k(x)\Big|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^n \alpha_k\overline{c}_k - \sum_{k=1}^n \overline{\alpha}_k c_k + \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2,$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Иначе говоря (добавляя и вычитая $\sum\limits_{k=1}^n |c_k|^2$),

$$\Big\|f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k\varphi_k(x)\Big\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^n |c_k - \alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \tag{13.1}$$

Ясно, что правая часть (13.1) будет минимальной в том и только том случае, когда

$$\alpha_k = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

и теорема доказана.

Подставляя в (13.1) вместо α_k числа c_k, мы как следствие получаем

$$\Big\|f(x) - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\Big\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2. \tag{13.2}$$

Так как левая часть равенства (13.2) неотрицательна, то и правая тоже, а потому

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leqslant \|f\|_{L^2}^2.$$

Это неравенство справедливо при любом n, а потому ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty |c_k|^2$ сходится и

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \leqslant \|f\|_{L^2}^2. \tag{13.3}$$

Неравенство (13.3) носит название *неравенства Бесселя*. Оно справедливо для любой нормированной ортогональной системы и для любой $f(x) \in L^2$.

§ 14. Сходимость ряда Фурье в метрике L^2

Как следствие из неравенства Бесселя легко получается важная теорема.

Теорема. *Для всякой функции с интегрируемым квадратом ряд Фурье по любой нормированной ортогональной системе сходится в метрике L^2.*

Чтобы убедиться в справедливости этого предложения, напомним (см. § 21 Вводного материала), что для сходимости последовательности $f_n(x)$ в метрике L^2 необходимо и достаточно, чтобы при любом ε можно было найти такое N, что

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_{L^2} < \varepsilon \quad \text{для } n \geqslant N \text{ и } m \geqslant N.$$

Покажем, что этот критерий выполнен, если роль функций $f_n(x)$ играют частные суммы $s_n(x)$ ряда Фурье для $f(x) \in L^2$.

Имеем для любого целого n и $p \geqslant 1$

$$\| S_{n+p}(x) - S_n(x) \|_{L^2}^2 = \| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k(x) \|_{L^2}^2 = \\ = \int_a^b \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2,$$

так как система $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональна и нормирована. Но в силу неравенства Бесселя мы знаем, что если $f(x) \in L^2$, то $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty$, а потому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что $\sum_{n+1}^{n+p} |c_k|^2 < \varepsilon$ при $n \geqslant N$, а тогда

$$\| S_{n+p}(x) - S_n(x) \|_{L^2} < \varepsilon,$$

что и заканчивает доказательство сходимости ряда Фурье для $f(x) \in L^2$.

Однако следует обратить внимание, что была доказана только сходимость ряда Фурье в метрике L^2. Ниоткуда не видно, что сумма в смысле метрики L^2 этого ряда должна быть равна функции $f(x)$. Это и действительно не всегда имеет место. Вопрос о том, когда ряд Фурье в метрике L^2 сходится именно к заданной функции, связан с вопросом о так называемой замкнутости ортогональной системы в пространстве L^2. К изучению этого вопроса мы сейчас и переходим.

§ 15. Понятие о замкнутости системы. Связь между замкнутостью и полнотой

Условимся говорить, что система функций $\{\varphi_n(x)\}$ *замкнута в пространстве* C на $[a, b]$ или в L^p $(p \geqslant 1)$ на $[a, b]$, если любую функцию $f(x) \in C$ (или $f(x) \in L^p$) можно в этом пространстве с наперед заданной степенью точности представить в виде полинома по системе $\{\varphi_n(x)\}$.

Говоря точнее, система $\{\varphi_n(x)\}$ замкнута в C (или в L^p), если для любой $f(x) \in C$ (или $f(x) \in L^p$) и для любого $\varepsilon > 0$ можно так подобрать числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, чтобы

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b$$

или

$$\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \|_{L^p} < \varepsilon.$$

Мы здесь не будем доказывать, а только сформулируем две теоремы, указывающие на связь между замкнутостью и полнотой, а именно: если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то каждая система, замкнутая в L^p $(p > 1)$ (или в C), является полной в L^q (или в L). Обратно, каждая система, полная в L^p $(p > 1)$, является замкнутой в L^q *).

Мы рассмотрим подробно лишь тот наиболее важный случай, когда $p = 2$. В этом случае $q = 2$ и сформулированная нами теорема приводит к выводу:

---

*) Доказательство этих теорем можно найти, например, в книге Качмажа и Штейнгауза [М. 7].

Теорема. *В пространстве L^2 полнота и замкнутость системы эквивалентны, т. е. каждая полная система замкнута, и наоборот.*

Это предложение может быть доказано для произвольных систем, состоящих из функций, входящих в L^2. Но мы ограничимся рассмотрением того случая, когда заданная система ортогональна. Кроме того, так как и замкнутость системы и ее полнота не могут ни исчезнуть, ни появиться, если мы все функции системы умножим на любые константы, то можно предполагать систему нормированной.

Итак, пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — нормированная ортогональная система на отрезке $[a, b]$. Мы видели в § 14, что для любой $f(x) \in L^2[a, b]$ ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится в метрике L^2. Обозначим через $F(x)$ его сумму, тогда

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \tag{15.1}$$

где знак равенства понимается в смысле сходимости в метрике L^2.

Докажем, что числа c_n являются коэффициентами Фурье функции $F(x)$. В самом деле, умножая обе части равенства (15.1) на $\overline{\varphi}_n(x)$ и интегрируя (а это законно в силу теоремы Рисса, см. § 21 Вводного материала), имеем

$$\int_a^b F(x)\overline{\varphi}_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_k(x)\overline{\varphi}_n(x)\,dx. \tag{15.2}$$

Учитывая ортогональность и нормированность $\{\varphi_n(x)\}$, выводим отсюда, что

$$c_n = \int_a^b F(x)\overline{\varphi}_n(x)\,dx.$$

Отсюда мы заключаем, что функции $f(x)$ и $F(x)$ имеют все коэффициенты Фурье одинаковыми. Если предположить, что система $\{\varphi_n(x)\}$ полная, то это возможно только в том случае, когда $f(x) = F(x)$ почти всюду, а потому мы получаем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x).$$

Здесь знак равенства снова понимается в смысле сходимости в L^2. Следовательно,

$$\Big\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \Big\|_{L^2} \to 0$$

при $n \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что

$$\Big\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \Big\|_{L^2} < \varepsilon.$$

Но $f(x)$ была любая функция из L^2. Следовательно, согласно определению замкнутости, мы видим, что $\{\varphi_n(x)\}$ замкнута в L^2.

Итак, мы доказали, что полнота системы в L^2 влечет ее замкнутость в L^2. Обратное предложение доказывается совсем просто.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — замкнутая в L^2 система и $f(x)$ — любая функция из L^2. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно так подобрать числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что

$$\Big\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \Big\| < \varepsilon.$$

Но было доказано (см. § 13), что среди всех полиномов порядка n по системе $\{\varphi_n(x)\}$ наилучшее приближение к $f(x)$ в метрике L^2 дает полином $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье от $f(x)$. Поэтому

$$\|f(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\|\leqslant\|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)\|<\varepsilon.$$

Но так как мы знаем (см. (13.2)), что

$$\|f(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2,$$

то

$$0\leqslant\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2<\varepsilon^2,$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=\|f\|^2. \qquad (15.3)$$

Мы видели раньше (§ 13), что для любой нормированной ортогональной системы справедливо неравенство Бесселя (13.3)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leqslant\|f\|^2.$$

Теперь мы видим, что в случае замкнутой системы это неравенство превращается в равенство (15.3); его обычно называют *равенством Парсеваля*.

Итак, *если система замкнута, то для любой* $f(x)\in L^2$ *имеет место равенство Парсеваля*.

Но отсюда мгновенно следует и полнота системы $\{\varphi_n(x)\}$ в L^2, так как если функция $f(x)\in L^2$ ортогональна ко всем функциям системы $\{\varphi_n(x)\}$, то

$$c_n=\int_a^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)\,dx=0 \qquad (n=1,2,\ldots),$$

т. е. все ее коэффициенты Фурье равны нулю; но тогда и $\|f\|^2=0$ в силу (15.3), т. е.

$$\int_a^b |f|^2\,dx=0,$$

а это возможно только, если $f(x)=0$ почти всюду.

Итак, замкнутость системы в L^2 влечет ее полноту в L^2, и доказательство полностью закончено.

§ 16. Теорема Фишера—Рисса

Мы видели в § 13, что для всякой функции $f(x)\in L^2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$, составленный из квадратов модулей ее коэффициентов Фурье, при любой ортогональной нормированной системе сходится. Кроме того, в случае, когда рассматриваемая система полна, то (см. 15.3)

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2.$$

Но имеет место следующая гораздо более глубокая теорема:

Теорема Фишера—Рисса. *Пусть* c_n $(n=1, 2, \ldots)$ — *любая последовательность чисел, для которых* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$ *и* $\{\varphi_n(x)\}$ — *любая нормированная ортогональная система. Тогда существует такая* $f(x) \in L^2$, *для которой числа* c_n *являются ее коэффициентами Фурье по этой системе; если система полная, то такая* $f(x)$ *только одна.*

Для доказательства заметим, что если составить ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, то он должен сходиться в метрике L^2; действительно, раз $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать столь большое N, что $\sum_{N+1}^{\infty} |c_n|^2 < \varepsilon$. Но тогда

$$\| S_{n+p}(x) - S_n(x) \|^2 = \sum_{n+1}^{n+p} |c_k|^2 < \varepsilon \qquad (n \geqslant N, p > 0)$$

(аналогичное рассуждение мы уже проводили в § 14); следовательно, последовательность $S_n(x)$ сходится в метрике L^2. Итак, найдется такая $f(x)$, для которой $\|f(x) - S_n(x)\|_{L^2} \to 0$ при $n \to \infty$. Повторяя рассуждения § 15, мы видим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ есть ряд Фурье для $f(x)$, причем, если система полная, то такая $f(x)$ только одна.

§ 17. Теорема Фишера—Рисса и равенство Парсеваля для тригонометрической системы

Как теорема Фишера—Рисса, так и равенство Парсеваля были нами доказаны для нормированных систем функций. Поэтому они справедливы для системы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Следовательно, если a_0, a_n, b_n — последовательность чисел, для которых

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < +\infty, \tag{17.1}$$

то можно найти такую $F(x)$, для которой

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(x)\, dx; \quad a_n = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\, dx; \quad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\, dx.$$

Отсюда, полагая $f(x) = \sqrt{\pi}\, F(x)$, видим, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Итак, если ряд (17.1) сходится, то существует $f(x) \in L^2$, для которой ряд с коэффициентами a_n, b_n является рядом Фурье.

Равенство Парсеваля для тригонометрической системы принимает вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\,. \tag{17.2}$$

Отметим еще, что в силу минимального свойства частных сумм ряда Фурье (см. § 13) мы, в частности для случая тригонометрического ряда, можем утверждать, что среди всех тригонометрических полиномов порядка не выше n наилучшее приближение в метрике L^2 для любой $f(x) \in L^2$ дается n-й частной суммой ряда $\sigma(f)$.

В § 24 Вводного материала мы обозначили через $E_n^{(p)}(f)$ наилучшее приближение $f(x) \in L^p$ в метрике L^p тригонометрическими полиномами порядка не выше n; значит,

$$E_n^{(2)}(f) = \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}. \tag{17.3}$$

Эта формула будет в дальнейшем полезна.

§ 18. Равенство Парсеваля для произведения двух функций

В этом параграфе мы будем рассматривать функции, принимающие лишь действительные значения.

Мы хотим отметить еще одно полезное равенство, легко выводимое из равенства Парсеваля.

Если $f(x) \in L^2$ и $g(x) \in L^2$, система $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональная, нормированная и полная на (a, b), причем c_n — коэффициенты Фурье для $f(x)$, а d_n — коэффициенты Фурье для $g(x)$, то имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n\,. \tag{18.1}$$

Действительно, если $f \in L^2$ и $g \in L^2$, то это же верно для их суммы и, применяя равенство Парсеваля к $f(x)$, $g(x)$ и $f(x) + g(x)$, имеем

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \qquad \int_a^b g^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2, \tag{18.2}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2. \tag{18.3}$$

Раскрывая скобки в левой части (18.3), получаем

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2\,.$$

Вычитая равенства (18.2) из (18.3) и деля на 2, получим нужную формулу (18.1).

Для случая тригонометрической системы формула (18.1) примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx=\frac{a_0\,\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,\alpha_n+b_n\,\beta_n\,,$$

где a_n, b_n — коэффициенты для $f(x)$, а α_n, β_n — коэффициенты для $g(x)$.

§ 19. Стремление к нулю коэффициентов Фурье

Мы видели, что если $f(x)\in L^2$, то $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<+\infty$ и отсюда сразу следует, что $|c_n|\to 0$ при $n\to\infty$. Это справедливо для любой ортогональной системы. Мало того, теорема Фишера—Рисса показывает, что если для каких-то c_n имеем $\Sigma\, c_n^2<+\infty$, то эти c_n — обязательно коэффициенты Фурье от некоторой функции $f(x)\in L^2$.

Значительно сложнее обстоит дело, если $f(x)\in L$, но $f^2(x)$ несуммируема. Тогда мы можем очень мало сказать о коэффициентах Фурье от $f(x)$. Точно так же, если дана последовательность чисел c_n, для которой $\Sigma\, c_n^2=+\infty$, то мы даже не знаем, существует ли функция, имеющая эти числа своими коэффициентами Фурье.

Укажем здесь простые факты, позволяющие все же хоть в некоторой мере судить о коэффициентах Фурье.

Теорема Мерсера. *Если у ортогональной нормированной системы* *) $\{\varphi_n(x)\}$ *функции ограничены в своей совокупности, т. е.*

$$|\varphi_n(x)|\leqslant M\qquad a\leqslant x\leqslant b\qquad (n=1,2,\ldots),$$

то коэффициенты Фурье любой суммируемой функции по этой системе стремятся к нулю.

Пусть $f(x)$ суммируема и $\varepsilon>0$ наперед задано; найдем сначала такую функцию $F(x)$, для которой $\int_a^b|f(x)-F(x)|\,dx<\varepsilon$, причем $F(x)$ ограничена. Это всегда возможно в силу самого определения интеграла Лебега.

Так как всякая ограниченная функция заведомо принадлежит L^2, то ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю, значит, для достаточно большого N будем иметь

$$\Big|\int_a^b F(x)\,\varphi_n(x)\,dx\Big|<\varepsilon\qquad\text{при}\qquad n>N.$$

Кроме того,

$$\Big|\int_a^b [f(x)-F(x)]\,\varphi_n(x)\,dx\Big|\leqslant M\varepsilon\,.$$

а тогда

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\Big|<\varepsilon\,(1+M)\qquad\text{для}\qquad n>N,$$

а следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty,$$

и теорема доказана.

*) Здесь будет идти речь о функциях, принимающих лишь действительные значения.

Так как тригонометрическая система состоит из функций, которые ограничены в своей совокупности, то отсюда, в частности, вытекает

Теорема. *Для любой суммируемой функции ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе стремятся к нулю.*

Этот факт имеет очень большое значение, так как в дальнейшем (см. § 62) мы увидим, что те тригонометрические ряды, коэффициенты которых не стремятся к нулю, могут сходиться только на множестве меры нуль. Однако одного только стремления к нулю коэффициентов тригонометрического ряда все же недостаточно для того, чтобы он сходился (см. § 63); мало того, мы увидим дальше (глава V, § 20), что и ряды Фурье могут расходиться в каждой точке. Таким образом, проблема сходимости тригонометрических рядов подлежит серьезному исследованию.

§ 20. Лемма Фейера

Теорема § 19 о стремлении к нулю коэффициентов Фурье является частным случаем следующего общего результата, принадлежащего Фейеру (Féjér [1]).

Лемма Фейера*). *Если $f(x) \in L$ имеет период 2π, а $g(x)$ имеет период 2π и ограничена, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(nx)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx. \tag{20.1}$$

Здесь $n \to \infty$, принимая любые, а не только целые значения (полагая $g(x) = \cos x$ или $g(x) = \sin x$, мы сразу видим, что утверждение, касающееся коэффициентов Фурье, справедливо).

Для доказательства леммы Фейера заметим сначала, что если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую $\varphi(x)$, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon \tag{20.2}$$

и если для $\varphi(x)$ равенство (20.1) уже доказано, то оно верно и для $f(x)$.

В самом деле, имеем для любого n

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(nx)\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, g(nx)\, dx \right| < M\varepsilon, \tag{20.3}$$

где M — верхняя грань $g(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Далее, раз (20.1) справедливо для $\varphi(x)$, то найдется такое N, что

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, g(nx)\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx \right| < \varepsilon \text{ для } n > N. \tag{20.4}$$

Наконец, из (20.2) заключаем

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx \right| < \varepsilon M. \tag{20.5}$$

*) Эту лемму можно в первом чтении пропустить. Она понадобится лишь в главе XIII).

Следовательно, из (20.3), (20.4) и (20.5)

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(nx)\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx \right| < (2M+1)\varepsilon \tag{20.6}$$

при любом $n > N$. А так как ε как угодно мало, то из (20.6) следует (20.1).

Так как класс ступенчатых функций всюду плотен в классе функций $f \in L$ (см. Вводный материал, § 21), то мы видим, на основании только что доказанного, что равенство (20.1) достаточно доказать для ступенчатых функций. Но для них его доказать уже легко, так как отрезок $[-\pi, \pi]$ разбивается на конечное число отрезков, на каждом из которых $f(x)$ постоянна, а тогда, если δ_j такой отрезок, $f(x) = c_j$ на нем, и k — число отрезков δ_j, то равенство (20.1) принимает вид

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} c_j \int_{\delta_j} g(nx)\, dx = \sum_{j=1}^{k} c_j \delta_j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx \tag{20.7}$$

и оно будет доказано, если мы убедимся, что для любого интервала δ

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta} g(nx)\, dx = \frac{\delta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx\,. \tag{20.8}$$

Пусть $\delta = (a, b)$. Имеем $-\pi \leqslant a < b \leqslant \pi$. Надо доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} g(nx)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx\,, \tag{20.9}$$

принимая во внимание, что $|g(x)| < M$ и $g(x)$ периодическая с периодом 2π.

С этой целью заметим сначала, что

$$\frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} g(nx)\, dx = \frac{1}{n(b-a)} \int_{na}^{nb} g(t)\, dt\,. \tag{20.10}$$

Пусть m_1 и m_2 такие целые числа (каждое из них может быть положительно, отрицательно или равно нулю), что

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cdot 2\pi &\leqslant na < (m_1+1)\, 2\pi\,, \\ m_2 \cdot 2\pi &\leqslant nb < (m_2+1)\, 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{20.11}$$

Так как

$$\int_{na}^{nb} g(t)\, dt = \int_{m_1\cdot 2\pi}^{m_2\cdot 2\pi} g(t)\, dt + \int_{m_2\cdot 2\pi}^{nb} g(t)\, dt - \int_{m_1\cdot 2\pi}^{na} g(t)\, dt \tag{20.12}$$

и длина интервалов интегрирования в двух последних интегралах формулы (20.12) не превосходит 2π, то

$$\left| \int_{na}^{nb} g(t)\, dt - \int_{2\pi m_1}^{2\pi m_2} g(t)\, dt \right| < 4M\pi, \tag{20.13}$$

Далее

$$\int_{2\pi m_1}^{2\pi m_2} g(t)\, dt = (m_2 - m_1) \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt \tag{20.14}$$

в силу периодичности $g(t)$. Значит, из (20.13) и (20.14)

$$\left| \int_{na}^{nb} g(t)\,dt - (m_2 - m_1) \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt \right| < 4M\pi. \tag{20.15}$$

Но из (20.11)

$$(m_2 - m_1 - 1)\,2\pi < n(b-a) < (m_2 - m_1 + 1)\,2\pi,$$

а потому

$$n(b-a) = (m_2 - m_1 + \theta)\,2\pi, \qquad \text{где } |\theta| < 1.$$

Иначе говоря,

$$m_2 - m_1 = \frac{n(b-a)}{2\pi} - \theta, \tag{20.16}$$

а потому из (20.15) и (20.16)

$$\left| \frac{1}{n(b-a)} \int_{na}^{nb} g(t)\,dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt + \frac{\theta}{n(b-a)} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt \right| < \frac{4M\pi}{n(b-a)}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(b-a)} \int_{na}^{nb} g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt$$

и, принимая во внимание (20.10), видим, что (20.9) доказано и таким образом доказательство леммы закончено.

§ 21. Оценка коэффициентов Фурье через интегральный модуль непрерывности функции

Мы видели в § 19, что для любой суммируемой функции $f(x)$ коэффициенты Фурье a_n, b_n стремятся к нулю при $n \to \infty$. Однако иногда знания одного этого факта недостаточно и приходится оценивать скорость, с которой они стремятся к нулю.

Напомним, что в § 25 Вводного материала мы определили понятие интегрального модуля непрерывности $\omega_1(\delta, f)$ для $f(x)$ и доказали, что для любой $f \in L$ имеем $\omega_1(\delta, f) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Пусть c_n — комплексные коэффициенты Фурье функции $f(x)$, т. е.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{21.1}$$

Заменяя x через $x + \frac{\pi}{n}$ можем написать

$$c_n = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx}\,dx. \tag{21.2}$$

Складывая (21.1) и (21.2) и деля на два, получаем

$$c_n = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right] e^{-inx}\,dx,$$

откуда

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x+\frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx \leqslant \frac{1}{4\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right).$$

Итак, для комплексных коэффициентов Фурье функции $f(x)$ имеем

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{4\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{21.3}$$

В случае действительных коэффициентов Фурье имеем, рассуждая совершенно аналогично,

$$\left.\begin{aligned} |a_n| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \\ |b_n| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \end{aligned} \quad (n = 1, 2, \dots). \right\} \tag{21.4}$$

Формулы (21.4) дают новое доказательство того, что коэффициенты Фурье от любой $f(x) \in L$ стремятся к нулю, но они, кроме того, позволяют судить о скорости этого стремления в зависимости от свойств функции, так как, грубо говоря, чем функция «лучше», тем быстрее стремится к нулю ее интегральный модуль непрерывности.

Если $f(x)$ периодическая и непрерывна на $[-\pi, \pi]$, то из определения модуля непрерывности (см. § 25 Вводного материала) сразу заключаем

$$\omega_1(\delta, f) \leqslant \omega(\delta, f) \cdot 2\pi,$$

а потому для непрерывной $f(x)$ имеем

$$\left.\begin{aligned} |a_n| &\leqslant \omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \\ |b_n| &\leqslant \omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \end{aligned} \quad (n = 1, 2, \dots). \right\} \tag{21.5}$$

§ 22. Коэффициенты Фурье для функций с ограниченным изменением

Пусть $f(x)$ — функция с ограниченным изменением на $[0, 2\pi]$. Если V — ее полное изменение на $[0, 2\pi]$, то мы имеем

$$\sum_{k=1}^{2n} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| \leqslant V. \tag{22.1}$$

Но рассуждая, как в § 21, мы имеем

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x+\frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx,$$

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x+\frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx,$$

а так как в силу периодичности $f(x)$ имеем для любого k

$$\int_0^{2\pi} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| dx = \int_0^{2\pi} \left| f\left(x+\frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| dx,$$

то можно также написать

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1)\frac{\pi}{n}\right) \right| dx.$$

Складывая все такие неравенства для $k = 1, 2, \ldots, 2n$ и деля затем на $2n$, найдем, принимая во внимание (22.1),

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{4\pi n} \cdot \int_0^{2\pi} V\,dx = \frac{V}{2n} \tag{22.2}$$

и аналогично

$$|b_n| \leqslant \frac{V}{2n}. \tag{22.3}$$

Отсюда выводим: *для любой функции с ограниченным изменением*

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{22.4}$$

(обозначение $O\left(\frac{1}{n}\right)$ см. в § 11 Вводного материала).

Если потребовать от $f(x)$, чтобы, кроме ограниченности изменения, она была еще непрерывна, то возникает вопрос, нельзя ли улучшить эту оценку? Оказывается это не так, в чем мы убедимся в § 2 главы II.

§ 23. Формальные операции над рядами Фурье

Мы видели (см. § 11), что тригонометрическая система полна в L, т. е. две суммируемые функции могут иметь одинаковые ряды Фурье, только если они равны почти всюду. Таким образом ряд Фурье, даже если он не является сходящимся, все же тесно связан только с одной функцией. Мы сейчас убедимся, что с рядами Фурье, хотя бы и расходящимися, во многих случаях можно совершать такие же операции, как если бы они сходились к тем функциям, от которых они являются рядами Фурье.

1) Сложение и вычитание рядов Фурье. Если нам нужно составить ряд Фурье от суммы или разности двух функций, то достаточно сложить (или вычесть) ряды Фурье от этих функций. Действительно, если

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$$

и

$$g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \gamma_n e^{inx},$$

то

$$f(x) \pm g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (c_n \pm \gamma_n) e^{inx},$$

так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) \pm g(x)]\, e^{-inx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-inx}\, dx = c_n \pm \gamma_n.$$

Так же, если бы ряд Фурье был записан в действительной форме, мы убедились бы, что если a_n и b_n — коэффициенты Фурье для $f(x)$, а c_n и d_n — коэффициенты Фурье для $g(x)$, то для $f(x) \pm g(x)$ коэффициенты имеют вид $a_n \pm c_n$ и $b_n \pm d_n$.

2) Умножение на постоянную. Сразу видно, что если

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx},$$

то

$$kf(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} kc_n e^{inx},$$

где k — любое постоянное число. Доказательство проводится, как в предыдущем случае.

3) Ряд Фурье для $f(x+a)$. Если a — любое постоянное, то из

$$f(x) \sim \sum c_n e^{inx}$$

следует

$$f(x+a) \sim \sum (c_n e^{ina}) e^{inx} \sim \sum c_n e^{in(x+a)}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-in(t-a)}\, dt = e^{ina}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt.$$

Следовательно, ряд Фурье для $f(x+a)$ выглядит так, как если бы мы просто в ряде Фурье для $f(x)$ подставили вместо x величину $x+a$.

Читатель легко убедится, что такой же результат имеет место, если ряд Фурье задан в действительной форме.

4) Ряд Фурье для $f(x)e^{imx}$, где m — целое. Имеем

$$f(x) e^{imx} \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_{n-m} e^{inx},$$

так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{imx} e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(n-m)x}\, dx.$$

Отсюда снова следует, что коэффициенты Фурье определяются так, как если бы мы имели право оперировать с рядом, как со сходящимся: в этом случае имели бы

$$f(x) e^{imx} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} e^{imx} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{i(n+m)x} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{k-m} e^{ikx}.$$

5) Ряд Фурье для $\overline{f}(x)$. Если

$$f(x) \sim \sum c_n e^{inx},$$

то

$$\overline{f}(x) = \sum \overline{c}_n e^{inx},$$

что проверяется непосредственно по формулам Фурье.

6) Ряд Фурье для «свертки». Допустим, что $f(x)$ и $g(x)$ — две периодические функции,

$$f(x) \in L[-\pi, \pi] \text{ и } g(x) \in L[-\pi, \pi].$$

Рассмотрим произведение $f(x+t)\,g(t)$. Если не налагать на $f(x)$ и $g(x)$ никаких дополнительных ограничений, то оно может оказаться несуммируемой функцией переменного t. Но мы докажем, следуя Юнгу (Young[3]), что это произведение для почти всех x есть суммируемая функция от t на $[-\pi, \pi]$ и, полагая

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\,dt, \tag{23.1}$$

имеем $Q(x) \in L[0, 2\pi]$. Эта функция $Q(x)$ называется *сверткой* для $f(x)$ и $g(x)$.

Достаточно, разумеется, рассмотреть случай $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$.

Положим

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt.$$

Тогда функция

$$\int_{-\pi}^{\pi} [F(x+t) - F(t-\pi)]\,g(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt \left[\int_{-\pi}^{x} f(t+u)\,g(t)\,du\right]$$

существует и конечна для всякого x. Полагаем

$$f(t, u, M) = \begin{cases} f(t+u)\,g(t), & \text{если } f(t+u)\,g(t) \leqslant M, \\ M, & \text{если } f(t+u)\,g(t) > M. \end{cases}$$

Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi}^{x} f(t+u)\,g(t)\,du = \int_{-\pi}^{\pi} dt \lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{x} f(t, u, M)\,du =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi}^{x} f(t, u, M)\,du = \lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{x} du \int_{-\pi}^{\pi} f(t, u, M)\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{x} du \lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, u, M)\,dt. \tag{23.2}$$

Предел $\lim\limits_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, u, M)\,dt$ может оказаться равным $+\infty$, но в силу равенства (23.2) это может иметь место лишь для точек некоторого множества меры нуль. В тех же точках, где он конечен, он равен $\int_{-\pi}^{\pi} f(t+u)\,g(t)\,dt$.

Итак, мы убедились, что свертка $Q(x)$ почти всюду определена и суммируема. Теперь выразим коэффициенты ее ряда Фурье через коэффициенты рядов для $f(x)$ и $g(x)$.

Если

$$f(x) \sim \sum c_n e^{inx},$$
$$g(x) \sim \sum d_n e^{inx},$$

то коэффициенты Фурье μ_n для $Q(x)$ имеют вид

$$\mu_n = c_n d_{-n}. \tag{23.3}$$

Действительно,

$$\mu_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(x)\,e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\,dt\right\} e^{-inx}\,dx.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\mu_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,e^{-inx}\,dx\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\,e^{-in(z-t)}\,dz\right\}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,e^{int}\,c_n\,dt = c_n\,d_{-n}\,.$$

(Перемена порядка интегрирования здесь законна, так как по теореме Фубини (см. § 18 Вводного материала) такую перемену всегда можно производить над неотрицательными суммируемыми функциями, но $e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx$, а $\cos nx$ и $\sin nx$ меняют знак лишь конечное число раз на $[-\pi, \pi]$, поэтому рассматриваемые интегралы распадаются на такие, для которых перестановка порядка законна.)

Итак,

$$Q(x) \sim \sum c_n\,d_{-n}\,e^{inx}\,. \tag{23.4}$$

Полезно отметить здесь же, что если $f(x) \in L^2$ и $g(x) \in L^2$, то $\sum |c_n|^2 < +\infty$ и $\sum |d_n|^2 < +\infty$, а потому и $\sum |c_n d_{-n}| < +\infty$. Теперь покажем, что в сделанных предположениях $Q(x)$ непрерывна. Для этого сначала разобьем $g(t)$ на два слагаемых, $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, так, чтобы $g_1(t)$ была ограничена, а $\int_{-\pi}^{\pi} g_2^2(t)\,dt < \varepsilon^2$, где $\varepsilon > 0$, задано. Имеем

$$Q(x+h) - Q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t+h) - f(x+t)]\,g_1(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t+h) - f(x+t)]\,g_2(t)\,dt = I_1 + I_2\,.$$

Если $|g_1(t)| \leqslant M$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, то

$$|I_1| \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h) - f(x+t)|\,dt =$$

$$= \frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+h) - f(t)|\,dt \leqslant \frac{M}{2\pi}\,\omega_1(\delta, f)$$

для $0 \leqslant |h| \leqslant \delta$, где $\omega_1(\delta, f)$ — интегральный модуль непрерывности функции $f(x)$ и, значит, I_1 может быть сделан как угодно малым, если δ достаточно мало.

Для I_2 находим

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t+h) - f(x+t)]^2\,dt}\;\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} g_2^2(t)\,dt} \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt}\,.$$

Итак, $|Q(x+h) - Q(x)|$ может быть сделано как угодно малым, если h достаточно мало.

Теперь заметим, что раз $Q(x)$ непрерывна и ряд (23.4) сходится абсолютно и равномерно, то этот ряд, в силу теоремы § 12, сходится к $Q(x)$ в каждой точке. В частности, отсюда получаем, полагая $x = 0$,

$$Q(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n d_{-n}. \tag{23.5}$$

7) Ряд Фурье для произведения. Пусть

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}, \qquad g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} d_n e^{inx}.$$

Допустим, что $f(x) \in L^2$ и $g(x) \in L^2$. Тогда $f(x)\, g(x) \in L$. Полагая

$$f(x)\, g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \gamma_n e^{inx},$$

покажем, что

$$\gamma_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k d_{n-k}. \tag{23.5'}$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, e^{-inx}\, dx,$$

а потому, полагая

$$h(x) = g(x)\, e^{-inx}, \tag{23.6}$$

имеем

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, h(x)\, dx.$$

Если обозначить через μ_n коэффициенты Фурье от $h(x)$, то по формуле (23.4)

$$\gamma_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k \mu_{-k}. \tag{23.7}$$

Но так как на основании пункта 4) этого параграфа из (23.6) следует

$$\mu_k = d_{k+n},$$

то

$$\gamma_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k d_{n-k},$$

а это и есть формула (23.5′), которую мы хотели доказать.

Замечание. Напомним, что для числовых рядов доказывается справедливость следующей теоремы: если $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ абсолютно сходится, и сумма его равна u, а $v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots$ абсолютно сходится, и сумма его равна v, то ряд

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + v_0 u_1) + \ldots + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0) + \ldots$$

абсолютно сходится и сумма его есть uv.

Нетрудно проверить, что если бы мы составили ряд для произведения $f(x)\, g(x)$, пользуясь этой формулой умножения рядов, то коэффициенты этого ряда как раз и выражались бы формулой (23.7), т. е. мы видим, что с рядами Фурье здесь можно обращаться так, как если бы они абсолютно сходились.

Следствие. Если мы имеем $\sum |c_n| < +\infty$ и $\sum |d_n| < +\infty$, то и $\sum |\gamma_n| < +\infty$, так как известно, что произведение двух абсолютно сходящихся рядов сходится абсолютно; кроме того, $\sum |\gamma_n| \leqslant \sum |c_n| \sum |d_n|$, так как в абсолютно сходящемся ряде можно члены переставлять как угодно, и от этого его сумма не изменится.

Позже (см. § 61) мы увидим, что абсолютная сходимость тригонометрического ряда на $[-\pi, \pi]$ имеет место тогда и только тогда, когда сходится ряд из абсолютных величин его коэффициентов. Поэтому имеет место

Теорема. *Если $f(x)$ и $g(x)$ разлагаются в абсолютно сходящиеся тригонометрические ряды, то этим свойством обладает и их произведение.*

8) Интегрирование рядов Фурье. Пусть $f(x)$ — периодическая суммируемая функция, а $F(x)$ — ее неопределенный интеграл Лебега

$$F(x) = C + \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

Мы ставим себе целью найти разложение $F(x)$ в ряд Фурье, если ряд для $f(x)$ уже найден:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}\,.$$

Прежде всего заметим, что

$$F(2\pi) - F(0) = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 2\pi c_0\,,$$

а потому если $c_0 \neq 0$, то $F(x)$ не будет периодической. Поэтому рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = F(x) - c_0 x\,. \tag{23.8}$$

Так как

$$\Phi(x + 2\pi) = F(x + 2\pi) - c_0(x + 2\pi) = C + \int_0^{2\pi + x} f(t)\,dt - c_0 x - c_0 2\pi =$$

$$= C + \int_0^x f(t)\,dt - c_0 x = \Phi(x)\,,$$

то $\Phi(x)$ уже периодическая. Она абсолютно непрерывна, как и $F(x)$, и

$$\Phi'(x) = F'(x) - c_0 = f(x) - c_0 \text{ почти всюду}.$$

Найдем коэффициенты Фурье для $\Phi(x)$; имеем для $n \neq 0$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(x)\,e^{-inx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\Phi(x)\,e^{-inx}}{-in}\right\}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx - \frac{c_0}{2\pi in}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\,dx \tag{23.9}$$

(интегрирование по частям было законно в силу абсолютной непрерывности $\Phi(x)$). Так как $\Phi(2\pi) = \Phi(0)$, то отсюда сразу получаем

$$C_n = \frac{c_n}{in}\,,\ (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)\,. \tag{23.10}$$

Мы можем теперь написать

$$\Phi(x) \sim C_0 + \sum{}' \frac{c_n}{in} e^{inx}\,, \tag{23.11}$$

где знак $\sum{}'$ означает, что пропущен член с $n = 0$.

Из (23.8) и (23.11) заключаем

$$F(x) - c_0 x \sim C_0 + \sum{}' \frac{c_n}{in} e^{inx}. \tag{23.12}$$

Ясно, что если бы мы совершенно формально проинтегрировали ряд $\sigma(f)$, то получили бы для $F(x)$ тот же ряд (23.12).

Если бы ряд для $f(x)$ был написан в действительной форме

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то так же получили бы

$$F(x) - \frac{a_0}{2} x \sim C + \sum \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n}.$$

9) Дифференцирование рядов Фурье. Ряды Фурье—Стилтьеса. Пусть $F(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и имеет период 2π. Если

$$F(x) \sim \sum c_n e^{inx},$$

то для ее производной найдем

$$F'(x) \sim \sum in\, c_n e^{inx}. \tag{23.13}$$

Действительно, достаточно применить формулу (23.10), полагая $f(x) = F'(x)$.

Таким образом, ряд Фурье для производной от $F(x)$ получается так, как если бы мы продифференцировали ряд Фурье для $F(x)$.

Аналогично, если

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то

$$F'(x) \sim \sum n(b_n \cos nx - a_n \sin nx).$$

Заметим, однако, что эти формулы верны, лишь если $F(x)$ абсолютно непрерывна, в противном случае она не является неопределенным интегралом Лебега от своей производной, даже если эта производная существует и суммируема.

В случае, когда $F(x)$ есть функция с ограниченным изменением, то, полагая,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots), \tag{23.14}$$

где интеграл в формуле (23.14) есть интеграл Римана—Стилтьеса (см. Вводный материал, § 16), пишут

$$dF \sim \sum c_n e^{inx} \tag{23.15}$$

и называют этот ряд (23.15) *рядом Фурье—Стильтьеса от* dF.

Если мы положим

$$\Phi(x) = F(x) - c_0 x,$$

то $\Phi(x)$ тоже с ограниченным изменением, и притом периодическая. Пусть C_n — коэффициенты Фурье для $\Phi(x)$; тогда при $n \neq 0$, интегрируя по частям, находим

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi in}\int\limits_0^{2\pi} e^{-inx}\, d\Phi = \frac{c_n}{in},$$

так как $d\Phi = dF - c_0\, dx$. Следовательно, если

$$\Phi(x) \sim C_0 + \sum{}' C_n e^{inx},$$

где знак $\sum'$ указывает, что член с $n = 0$ отсутствует, то

$$\Phi(x) \sim C_0 + \sum{}' \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

и

$$F(x) - C_0 x \sim C_0 + \sum{}' \frac{c_n}{in} e^{inx}. \tag{23.16}$$

Из формул (23.15) и (23.16) следует, что *ряд Фурье—Стилтьеса для dF с точностью до константы совпадает с результатом дифференцирования ряда Фурье от $F(x) - c_0 x$.*

§ 24. Ряды Фурье от многократно дифференцируемых функций

Допустим, что $k \geqslant 2$, функция $f(x)$ имеет производные до порядка $k-1$ включительно, и производная $(k-1)$-го порядка абсолютно непрерывна; тогда k-я производная суммируема. Обозначая через $c_n^{(k)}$ коэффициенты Фурье для $f^{(k)}(x)$, находим по формуле (23.10)

$$c_n^{(k-1)} = \frac{c_n^{(k)}}{in}; \qquad c_n^{(k-2)} = \frac{c_n^{(k-1)}}{in} = \frac{c_n^{(k)}}{(in)^2},$$

и т. д., наконец,

$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(in)^k}.$$

Отсюда сразу ясно, что чем больше функция имеет производных, тем быстрее ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю.

В частности, если $f^{(k)}(x)$ почти всюду определена и суммируема, то $c_n^{(k)}$ стремятся к нулю при $n \to \pm\infty$, как коэффициенты Фурье от суммируемой функции, а тогда

$$c_n = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right). \tag{24.1}$$

Такая же оценка, естественно, имеет место, если ряд Фурье имеет действительную форму, т. е.

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ и } b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right). \tag{24.2}$$

§ 25. О коэффициентах Фурье для аналитических функций

Пусть $f(x)$ — функция действительного переменного, аналитическая на отрезке $[-\pi, \pi]$ и периодическая с периодом 2π. Оценим ее коэффициенты Фурье. Мы покажем, что они убывают со скоростью геометрической прогрессии; точнее, найдется такое θ, $0 < \theta < 1$, и такое постоянное A, что

$$|c_n| \leqslant A\,\theta^{|n|} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{25.1}$$

или в действительной форме

$$|a_n| \leqslant A\,\theta^n \quad \text{и} \quad |b_n| \leqslant A\theta^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{25.2}$$

Числа θ и A зависят, вообще говоря, от рассматриваемой функции $f(x)$.

Чтобы доказать это, заметим прежде всего, что в силу условий, наложенных на $f(x)$, имеем

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad \text{и} \quad f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

При вычислении коэффициентов Фурье для функции, имеющей k производных, мы видели (см. § 24), что

$$|c_n| = \frac{1}{|n|^k}\,|c_n^{(k)}|,$$

где $c_n^{(k)}$ — коэффициенты Фурье от $f^{(k)}(x)$. Но

$$c_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)\,e^{-inx}\,dx.$$

Поэтому, если обозначить через M_k максимум модуля $f^{(k)}(x)$, то

$$|c_n| \leqslant \frac{M_k}{|n|^k}.$$

Но для чисел M_k справедливо такое неравенство:

$$M_k < B^k\,k! \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где B — константа *). Поэтому

$$|c_n| \leqslant \frac{B^k\,k!}{|n|^k} \leqslant \left(\frac{B\,k}{|n|}\right)^k \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{25.3}$$

Выберем число p так, чтобы

$$\frac{B}{p} < 1, \tag{25.4}$$

и положим

$$\theta_1 = \frac{B}{p}. \tag{25.5}$$

---

*) В самом деле, из сделанных относительно $f(x)$ предположений вытекает, что ее можно аналитически продолжить на некоторую плоскую область, содержащую отрезок $[-\pi, \pi]$. Если мы обозначим через C произвольный спрямляемый контур, охватывающий отрезок $[-\pi, \pi]$ и лежащий в области аналитичности $f(z)$, то по формуле Коши

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}}\,dz.$$

Если длина контура C есть l, $\max\limits_{C} |f(z)| = M$ и минимум расстояния точек z на C от точек x на $[-\pi, \pi]$ равен δ, то

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant M\,l\,\frac{1}{2\pi}\,k!\,\frac{1}{\delta^{k+1}} < B^k\,k!,$$

если выбрать B так, чтобы $B > \frac{1}{\delta}$ и $B > \frac{M\,l}{8\,\pi\delta^2}$;

Число k в формуле (25.3) находится в нашем распоряжении, так как функция $f(x)$ имеет производные всех порядков. Поэтому при заданных n и p мы можем найти целое k из условия

$$k \leqslant \frac{|n|}{p} < k+1 .$$

Если так, то $|n| \geqslant pk$ и, принимая во внимание (25.3) и (25.5),

$$|c_n| \leqslant \left(\frac{B}{p}\right)^k = \theta_1^k = \frac{\theta_1^{k+1}}{\theta_1} < \frac{\theta_1^{\frac{|n|}{p}}}{\theta_1}, \tag{25.6}$$

так как в силу (25.4) и (25.5) имеем $\theta_1 < 1$; обозначая через θ число, которое удовлетворяет условию

$$\theta_1^{\frac{1}{p}} < \theta < 1, \tag{25.7}$$

и полагая

$$A = \frac{1}{\theta_1},$$

имеем из (25.6) и (25.7)

$$|c_n| < A\,\theta^{|n|} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

а это и требовалось доказать (см. 25.1)).

Если мы берем ряд Фурье в действительной форме, то неравенства принимают вид

$$|a_n| \leqslant A\,\theta^n \qquad \text{и} \qquad |b_n| \leqslant A\,\theta^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Справедливо и обратное предложение, а именно: если у функции $f(x)$ коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенству (25.1), где A постоянно, а $0 < \theta < 1$, то $f(x)$ — функция аналитическая на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Действительно, ряд $\sum |c_n| < +\infty$, и мы имеем тогда

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}.$$

Дифференцируя это равенство k раз, где k любое, получаем

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (i)^k n^k e^{inx}.$$

Дифференцирование почленно законно, так как получаемый ряд сходится абсолютно и равномерно ввиду того, что

$$|c_n (i)^k n^k| \leqslant A\,\theta^{|n|}\,|n|^k,$$

и так как k постоянно, то сходимость ряда $\sum \theta^{(n)}|n^k|$ вытекает хотя бы из применения к нему признака Коши.

Итак, $f(x)$ имеет производные всех порядков. Но, кроме того,

$$M_k = \max |f^{(k)}(x)| \leqslant 2A \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n n^k .$$

Отсюда можно вывести справедливость неравенства

$$M_k < B^k k!$$

при некотором B. Действительно,

$$\int_0^\infty \theta^x x^k\,dx = -\frac{k}{\ln\theta}\int_0^\infty \theta^x x^{k-1}\,dx = \frac{k(k-1)}{\ln^2\theta}\int_0^\infty \theta^x x^{k-2}\,dx = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^k \frac{k!}{\ln^k\theta},$$

откуда и вытекает нужное неравенство.

Пусть теперь x_0 — любая точка $[-\pi, \pi]$. Пусть x — любая другая точка, для которой

$$|x - x_0| < \frac{1}{B}.$$

На основании формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta'(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n,$$

где $0 < \theta' < k$. Но

$$\left|\frac{f^{(n)}(x_0 + \theta'(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n\right| \leqslant \frac{B^n n!}{n!}(x - x_0)^n = (B|x - x_0|)^n.$$

В силу $|x - x_0| < \frac{1}{B}$ правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$ и, значит,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

т. е. $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки x_0; но x_0 — любая точка из $[-\pi, \pi]$, значит, $f(x)$ — аналитическая функция на $[-\pi, \pi]$.

§ 26. Простейшие случаи абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье

Начнем со следующего простого замечания. Рассмотрим тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{26.1}$$

Если

$$\sum |a_n| + |b_n| < +\infty, \tag{26.2}$$

то он сходится абсолютно (и равномерно) на $[-\pi, \pi]$.

Полезно отметить (мы уже указывали на это в § 23), что сходимость ряда (26.2) не только достаточна, но и необходима *) для того, чтобы ряд (26.1) сходился абсолютно на $[-\pi, \pi]$.

Остановимся сейчас на рассмотрении некоторых конкретных случаев, когда ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно. Если это имеет место, то этот ряд имеет суммой ту функцию $f(x)$, для которой он служит рядом Фурье (см. § 12). В частности, отсюда вытекает, что

*) В § 61 будет показано, что для сходимости (26.2) достаточно абсолютной сходимости (26.1) не на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, а лишь на множестве положительной меры.

Если $f(x)$ имеет суммируемую производную второго порядка, то ее ряд Фурье равномерно сходится к $f(x)$.

Действительно (см. § 24) в этом случае

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

В дальнейшем мы увидим, что наложенные на $f(x)$ требования слишком ограничительны и можно получить равномерную сходимость в гораздо более общих предположениях, но пока целесообразно отметить эту теорему, так как даже и в такой форме она оказывается полезной.

Отметим здесь еще один простой, но важный случай, когда легко обнаружить абсолютную и равномерную сходимость ряда Фурье, а именно:

Теорема. *Если $F(x)$ абсолютно непрерывна и ее производная $F'(x) = f(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом, то ряд Фурье от $F(x)$ сходится абсолютно и равномерно.*

Действительно, в этом случае, если коэффициенты Фурье от $f(x)$ обозначить через a_n, b_n, то $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$ (см. § 13), а по формуле (23.10), обозначая через A_n и B_n коэффициенты Фурье от $F(x)$, имеем

$$|A_n| = \left|\frac{b_n}{n}\right| \quad \text{и} \quad |B_n| = \left|\frac{a_n}{n}\right|,$$

а потому

$$|A_n| \leqslant \frac{1}{2}|b_n|^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} \quad \text{и} \quad |B_n| \leqslant \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| + |B_n| < +\infty,$$

и теорема доказана.

В § 3 главы IX эта теорема обобщается, именно вместо гипотезы $f'(x) \subset L^2$ рассматривается случай $f'(x) \subset L^p$ $(p > 1)$ и показывается, что результат сохраняет силу. Там же дается ряд гораздо более сильных теорем об абсолютной сходимости рядов Фурье.

В качестве очень частного случая доказанной теоремы можно сказать, что если $F(x)$ изображается непрерывной ломаной линией, то ее ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно.

В самом деле, в этом случае $F'(x)$ есть функция, которая имеет всюду, кроме конечного числа точек, производную, и эта производная $f(x)$ состоит из конечного числа ступенек, а потому она ограничена, а, стало быть, тем более $f^2(x)$ суммируема.

§ 27. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическими полиномами

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Если мы ее продолжим периодически с периодом 2π, она будет непрерывной на всей оси Ox. Условимся в дальнейшем называть функцию с периодом 2π непрерывной периодической функцией в том и только в том случае, когда она остается непрерывной и после ее периодического продолжения; если же $f(x)$ непрерывна только на некотором отрезке длины 2π, но в его концах имеет разные значения, а следовательно становится разрывной, если ее продолжить периодически (см. рис. 4 на стр. 60), то мы уже не будем называть ее непрерывной периодической функцией.

После этого уточнения мы можем высказать теорему:

Теорема Вейерштрасса. *Для любой непрерывной периодической функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой тригонометрический полином $T(x)$, что*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \qquad (-\infty < x < +\infty). \tag{27.1}$$

Существует очень много доказательств этой важной теоремы. Приведем здесь одно из них.

В силу непрерывности $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ можно найти такое δ, что

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad |x' - x''| \leqslant \delta, \tag{27.2}$$

где x' и x'' — любые две точки на $[-\pi, \pi]$.

Разобьем отрезок $[-\pi, \pi]$ на m равных частей, выбрав m так, чтобы $\frac{2\pi}{m} < \delta$. Обозначим через $\psi(x)$ ломаную линию, совпадающую с $f(x)$ в точках $k\frac{\pi}{m}$, где $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$, и положим $\psi(x + 2\pi) = \psi(x)$ для любых x $(-\infty < x < +\infty)$. Из (27.2) ясно, что

$$|f(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad |x' - x''| \leqslant \delta$$

и в силу периодичности обеих функций это справедливо и для любых x, $-\infty < x < +\infty$.

Так как $\psi(x)$ — ломаная линия, то по доказанному в конце § 26 ее ряд Фурье сходится равномерно к ней. Поэтому, обозначая через $S_n(x)$ сумму первых n членов ее ряда Фурье, можно выбрать n столь большим, чтобы

$$|\psi(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Ясно, что $S_n(x)$ — тригонометрический полином и, обозначая его через $T(x)$, видим, что теорема доказана.

§ 28. Плотность класса тригонометрических полиномов в пространствах $L^p (p \geqslant 1)$

Только что доказанную теорему Вейерштрасса можно рассматривать как доказательство того, что класс тригонометрических полиномов всюду плотен в пространстве C непрерывных периодических функций.

Но отсюда же вытекает, что этот класс всюду плотен в любом пространстве L^p $(p \geqslant 1)$.

Действительно, если $f(x) \in L^p$, то для любого ε (см. Вводный материал, § 21) можно найти такую непрерывную $\varphi(x)$, что

$$\|f - \varphi\|_{L^p} \leqslant \varepsilon,$$

с другой стороны, можно найти тригонометрический полином $T(x)$, для которого

$$|\varphi(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,$$

а потому и

$$\|\varphi - T\|_{L^p} < \varepsilon$$

(предполагается, что норма вычисляется на отрезке длины 2π). Поэтому по неравенству Минковского (см. Вводный материал, § 10).

$$\|f - T\|_{L^p} < 2\varepsilon,$$

и теорема доказана.

§ 29. Ядро Дирихле и сопряженное с ним ядро

При изучении сходимости тригонометрических рядов важную роль играют функции

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos nx \tag{29.1}$$

и

$$\bar{D}_n(x) = \sin x + \ldots + \sin nx\,. \tag{29.2}$$

Функция $D_n(x)$ может быть записана так:

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,. \tag{29.3}$$

Действительно,

$$2\sin\frac{x}{2} D_n(x) = \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx =$$

$$= \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right] = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x\,,$$

откуда после деления на $2\sin\frac{x}{2}$ и получается формула (29.3).

Выражение (29.3) называется *ядром Дирихле*, так как Дирихле впервые стал им пользоваться при изучении сходимости рядов Фурье (см. § 31).

Аналогично $\bar{D}_n(x)$ называется *ядром, сопряженным с ядром Дирихле;* оно имеет вид

$$\bar{D}_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,, \tag{29.4}$$

в чем также легко убедиться непосредственной проверкой.

Из формул (29.3) и (29.4) сразу видно, что если $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, то

$$|D_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \tag{29.5}$$

и

$$|\bar{D}_n(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\,. \tag{29.6}$$

Заметим теперь, что функция $\frac{\sin x}{x}$ убывает на отрезке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (в чем можно убедиться простым дифференцированием), а потому

$$\frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}\,.$$

Значит,

$$\frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{2}{\pi} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{29.7}$$

Применяя (29.5) и (29.6), получаем

$$|D_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2x} \quad \text{для} \quad 0 < |x| \leqslant \pi \tag{29.8}$$

и

$$|\bar{D}_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{x} \quad \text{для} \quad 0 < |x| \leqslant \pi. \tag{29.9}$$

Этими формулами мы будем в дальнейшем часто пользоваться. Чаще всего будет достаточно оценки

$$D_n(x) = O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{и} \quad \bar{D}_n(x) = O\left(\frac{1}{x}\right) \text{при } x \to 0; \tag{29.10}$$

иногда же будет важно, что если $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$, то

$$|D_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2\delta} \quad \text{и} \quad |\bar{D}_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{\delta}. \tag{29.11}$$

В силу периодичности $D_n(x)$ и $\bar{D}_n(x)$ можно также сказать, что (29.11) имеет место, если $\delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$.

§ 30. Ряды по синусам или по косинусам с монотонно убывающими коэффициентами

Прежде чем переходить к изучению случаев, когда проблема сходимости тригонометрического ряда требует тонких исследований, мы рассмотрим некоторые случаи, когда судить о сходимости очень легко.

Начнем с рядов вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{30.1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{30.2}$$

т. е. рядов, состоящих либо только из косинусов, либо только из синусов. Мы прежде всего рассмотрим важный случай, когда эти ряды имеют монотонно убывающие и стремящиеся к нулю коэффициенты, что будем записывать так:

$$a_n \downarrow 0 \quad \text{и} \quad b_n \downarrow 0.$$

При изучении этих рядов мы воспользуемся оценками $D_n(x)$ и $\bar{D}_n(x)$, данными в § 29, и леммой Абеля (см. § 1 Вводного материала). Это позволит нам доказать теорему:

Теорема 1. *Если $a_n \downarrow 0$, то ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$$

сходится всюду, кроме, быть может, точек $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$; при любом $\delta > 0$ он сходится равномерно на $\delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$.

Если $b_n \downarrow 0$, то ряд

$$\sum b_n \sin nx$$

сходится всюду; при любом $\delta > 0$ он сходится равномерно на $\delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$.

Действительно, полагая в лемме Абеля

$$u_n = a_n, \quad v_0 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad v_n(x) = \cos nx \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

имеем

$$V_n(x) = D_n(x),$$

а так как из формулы (29.11) следует равномерная ограниченность функций $D_n(x)$ на $\delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$, то ряд сходится равномерно на этом отрезке. Если $0 < x < 2\pi$, то можно всегда взять δ столь малым, чтобы $\delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$, и, значит, ряд (30.1) сходится в точке x.

При $x = 0$ ряд (30.1) сходится в том и только в том случае, когда $\sum a_n < +\infty$.

Для ряда (30.2) доказательство проходит аналогично; надо только в лемме Абеля положить $u_n = b_n$ и $v_n(x) = \sin nx$; тогда $V_n(x) = \bar{D}_n(x)$ и снова применение неравенства (29.11) дает доказательство равномерной сходимости ряда (30.2) на $\delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$, а следовательно, и его сходимости в каждой точке, кроме точек $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Но в этих последних он также сходится, потому что все члены ряда равны нулю.

Теорема полностью доказана.

Замечание. В силу обобщения леммы Абеля (см. § 1 Вводного материала) ряды (30.1) и (30.2) равномерно сходятся на $\delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$ (а значит и сходятся на $0 < x < 2\pi$) и в том случае, когда вместо $a_n \downarrow 0$ или $b_n \downarrow 0$ мы предполагаем только, что $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$ есть последовательность с ограниченным изменением и притом $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$.

Вернемся к случаю монотонного убывания. Ясно, что если

$$a_n \downarrow 0 \quad \text{и} \quad \sum a_n < +\infty,$$

то ряд $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$ сходится абсолютно и равномерно уже на всем отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ (и даже для $-\infty < x < +\infty$). С другой стороны, если условие $\sum a_n < +\infty$ не соблюдается, то не только равномерной, но и простой сходимости на всей оси быть не может, так как в точках $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ряд (30.1) расходится.

Для ряда $\sum b_n \sin nx$ вопрос о равномерной сходимости решается иначе. Именно, имеет место

Теорема 2. *Если $b_n \downarrow 0$, то для равномерной сходимости ряда $\sum b_n \sin nx$ на $[0, 2\pi]$ необходимо и достаточно, чтобы $nb_n \to 0$.*

Условие необходимо. Если ряд (30.2) равномерно сходится на $[0, 2\pi]$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое m, что

$$\left|\sum_{m+1}^{2m} b_n \sin nx\right| < \varepsilon, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Положим $x = \frac{\pi}{4m}$; тогда при $m+1 \leqslant n \leqslant 2m$ имеем $\frac{\pi}{4} \leqslant nx \leqslant \frac{\pi}{2}$, а потому $\sin nx \geqslant \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m+1}^{2m} b_n < \varepsilon,$$

а так как b_n монотонно убывают, то $\frac{1}{\sqrt{2}} mb_{2m} < \varepsilon$, т. е. $mb_{2m} < \sqrt{2}\,\varepsilon$ и, значит, $mb_m \to 0$ при $m \to \infty$. Необходимость доказана.

Условие достаточно. Мы уже знаем, что ряд (30.2) сходится равномерно на $\delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$ при любом δ (при единственном условии $b_n \downarrow 0$). Значит, если мы докажем, что добавление условия $nb_n \to 0$ влечет равномерную сходимость на $(-a, a)$, где $a > 0$ любое, то все будет доказано. Кроме того, в силу нечетности $\sin x$ достаточно брать $0 \leqslant x \leqslant a$. Мы докажем равномерную сходимость ряда на $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Пусть $\varepsilon_n = \max\limits_{k \geqslant n} kb_k$. Ряд (30.2), как известно, сходится при всяком x; обозначим

$$r_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \sin kx .$$

Мы докажем, что $|r_n(x)| \leqslant K\varepsilon_n$ на $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, где K постоянное, откуда и будет следовать равномерная сходимость ряда (30.2) на $[0, 2\pi]$.

Прежде всего $r_n(0) = 0$, если же $x \neq 0$, то всегда можно найти такое целое N, что $\frac{1}{N} < x \leqslant \frac{1}{N-1}$. Если $N > n$, то мы напишем

$$r_n(x) = \sum_{k=n}^{N-1} b_k \sin kx + \sum_{k=N}^{\infty} b_k \sin kx = r_n^{(1)}(x) + r_n^{(2)}(x) .$$

Если же $N \leqslant n$, то пусть $r_n^{(1)}(x) = 0$, а $r_n^{(2)}(x) = r_n(x)$. Произведем оценку $r_n^{(1)}(x)$ и $r_n^{(2)}(x)$ отдельно.

Имеем, в силу $|\sin kx| \leqslant k|x|$,

$$|r_n^{(1)}(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{N-1} kb_k x \leqslant x\varepsilon_n(N-n) \leqslant \frac{N-n}{N-1}\varepsilon_n \leqslant \varepsilon_n .$$

Для оценки $r_n^{(2)}(x)$ рассмотрим отдельно два случая:

1) Если $n < N$, то, применяя преобразование Абеля (см. Вводный материал, § 1), найдем

$$|r_n^{(2)}(x)| \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) |\bar{D}_k(x)| + b_N |\bar{D}_{N-1}(x)| .$$

Но так как (см. (29.9))

$$|\bar{D}_k(x)| \leqslant \frac{\pi}{x} \quad \text{для} \quad 0 < |x| \leqslant \pi ,$$

то

$$|r_n^{(2)}(x)| \leqslant \frac{2\pi}{x} b_N \leqslant 2\pi N b_N \leqslant 2\pi\varepsilon_n$$

в силу $n < N$ и определения ε_n.

2) Если $N \leqslant n$, то $r_n^{(2)}(x) = r_n(x)$ и тогда те же вычисления показывают, что

$$|r_n(x)| = |r_n^{(2)}(x)| \leqslant 2\pi\varepsilon_n .$$

Поэтому

$$|r_n(x)| \leqslant |r_n^{(1)}(x)| + |r_n^{(2)}(x)| \leqslant (2\pi + 1)\varepsilon_n ,$$

значит нужное неравенство доказано.

Замечание. Из доказанной теоремы мгновенно выводится следствие: *Существуют тригонометрические ряды, сходящиеся равномерно на $[-\pi, \pi]$, без того, чтобы сходиться абсолютно на этом отрезке.*

Действительно, рассмотрим, например, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln n}. \tag{30.3}$$

Так как $b_n = \frac{1}{n \ln n}$, то $n b_n \to 0$ при $n \to \infty$ и, кроме того, $b_n \downarrow 0$. Значит, указанный ряд сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$, но он не сходится абсолютно на $[-\pi, \pi]$, так как иначе должен был бы сходиться ряд $\sum \frac{1}{n \ln n}$, а этот ряд расходится *).

Это небольшое замечание мы делаем потому, что чрезвычайно часто для доказательства равномерной сходимости функциональных рядов применяется критерий Вейерштрасса (сравнение членов данного ряда с членами сходящегося числового ряда), а в этом случае сразу имеет место и абсолютная, и равномерная сходимость.

В частности, для тригонометрического ряда $\sum b_n \sin nx$, где $\sum |b_n| < +\infty$, имеет место и абсолютная и равномерная сходимость на $[-\pi, \pi]$, а в рассматриваемом примере этого нет.

Можно даже построить тригонометрический ряд, сходящийся равномерно на $[-\pi, \pi]$, но не имеющий на этом отрезке ни одной точки абсолютной сходимости (см. об этом в главе IX, § 3).

По поводу рядов вида (30.2), где $b_n \downarrow 0$, полезно отметить еще одну теорему:

Теорема 3. *Если $b_n \downarrow 0$ и числа nb_n ограничены, то частные суммы ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

ограничены в совокупности на $-\infty < x < +\infty$.

В силу периодичности и нечетности всех членов ряда достаточно рассматривать отрезок $[0, \pi]$, а так как при $x = 0$ и $x = \pi$ все члены обращаются в нуль, то можно ограничиться случаем $0 < x < \pi$.

---

*) Из теоремы Лузина—Данжуа, которая будет доказана в § 61, вытекает, что ряд (30.3) может абсолютно сходиться только на множестве меры нуль (потому что $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится). Более того, легко показать, что ряд (30.3) не является абсолютно сходящимся при любом $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Действительно, если бы при таком x имели

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n \ln n} < +\infty,$$

то и

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n \ln n} < +\infty.$$

поэтому

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 - \cos 2nx)}{n \ln n} < +\infty,$$

а так как $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n \ln n}$ сходится, если $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, то отсюда вытекала бы сходимость $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, и мы пришли бы к противоречию.

Мы имеем по условию

$$|kb_k| < M \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{30.4}$$

где M постоянно. Положим

$$\nu = \left[\frac{\pi}{x}\right]. \tag{30.5}$$

Если $n \leqslant \nu$, то

$$|S_n(x)| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |kb_k|\, x \leqslant M x\nu \leqslant M\pi .$$

Если же $n > \nu$, то

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{\nu} b_k \sin kx + \sum_{\nu+1}^{n} b_k \sin kx = S_n^{(1)}(x) + S_n^{(2)}(x),$$

где $S_n^{(1)}(x)$ оценивается, как в предыдущем случае, т. е.

$$|S_n^{(1)}(x)| \leqslant M\pi, \tag{30.6}$$

а к $S_n^{(2)}(x)$ мы применим следствие из преобразования Абеля (см. Вводный материал, § 1). Заметив, что (29.9)

$$|\bar{D}_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{x} \quad \text{для} \quad 0 < |x| \leqslant \pi,$$

мы находим в силу (30.4) и (30.5)

$$|S_n^{(2)}(x)| \leqslant 2\, b_{\nu+1} \frac{\pi}{x} \leqslant 2\, M \frac{\pi}{x(\nu+1)} \leqslant 2M . \tag{30.7}$$

Из (30.6) и (30.7) следует

$$|S_n(x)| \leqslant M\pi + 2\, M = M(\pi + 2),$$

и теорема 3 доказана.

Следствие. *Имеем при любых n и x*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| < C, \tag{30.8}$$

где C — абсолютная константа.

Действительно, здесь мы имеем дело с частными суммами ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \tag{30.9}$$

у которого $b_n = \frac{1}{n}$, т. е. $b_n \downarrow 0$ и $nb_n = 1$.

Ряд (30.9) играет важную роль во многих вопросах теории тригонометрических рядов; в § 41, в частности, мы исследуем его поведение в окрестности точки $x = 0$, так как это даст нам возможность получить некоторые сведения о поведении рядов Фурье от функций с ограниченным изменением в тех точках, где они разрывны.

В этом параграфе мы рассмотрели лишь очень немногие вопросы, касающиеся рядов по синусам и косинусам с монотонными коэффициентами. Детальному изучению этого класса рядов будет посвящена глава X. Здесь же мы хотим, чтобы не отсылать читателя к главе X, доказать еще одну важную теорему, касающуюся таких рядов.

Теорема 4. *Если $a_n \downarrow 0$ и последовательность $\{a_n\}$ выпукла, то ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jx \tag{30.1}$$

сходится всюду, кроме, быть может, $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, к неотрицательной суммируемой функции $f(x)$ и является рядом Фурье от этой функции.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos jx$$

и применим преобразование Абеля; это дает

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a_{j+1})\, D_j(x) + a_n D_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta a_j D_j(x) + a_n D_n(x)\,, \tag{30.10}$$

где $\Delta a_j = a_j - a_{j+1}$. Полагая $\Delta^2 a_j = \Delta a_j - \Delta a_{j+1}$ и снова применяя преобразование Абеля, найдем

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n-2} \Delta^2 a_j \sum_{p=0}^{j} D_p(x) + \Delta a_{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} D_p(x) + a_n D_n(x)\,. \tag{30.11}$$

Выражение вида

$$K_j(x) = \frac{1}{j+1} \sum_{p=0}^{j} D_p(x) \tag{30.12}$$

принято называть *ядром Фейера порядка j*. Мы будем его изучать подробно в § 47. Здесь же сошлемся на то, что $K_j(x) \geqslant 0$ для всех x (см. (47.5)). Из (30.11) и (30.12) сразу следует

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n-2} (j+1)\, \Delta^2 a_j K_j(x) + n\, \Delta a_{n-1} K_{n-1}(x) + a_n D_n(x)\,. \tag{30.13}$$

Если $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, то в силу $a_n \to 0$ последний член правой части (30.13) стремится к нулю при $n \to \infty$. Кроме того, при $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ в силу (30.12) и (29.3) $K_n(x)$ также остается конечным при $n \to \infty$, а $n\, \Delta\, a_{n-1} \to 0$ для выпуклых последовательностей $\{a_n\}$ (см. Вводный материал, § 3), а потому и $n\, \Delta a_{n-1} K_{n-1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда для $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\, \Delta^2 a_j K_j(x)\,. \tag{30.14}$$

Самое существование предела нам доказывать не надо, так как сходимость ряда (30.1) для всех x, кроме $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, была установлена при $a_n \downarrow 0$, без гипотезы выпуклости $\{a_n\}$, в теореме 1 этого параграфа. Таким образом из (30.14) заключаем, что сумма $f(x)$ ряда (30.14) есть неотрицательная функция, поскольку все $\Delta^2 a_j \geqslant 0$ и $K_j(x) \geqslant 0$ для всех x.

Нам осталось доказать, что ряд (30.1) является рядом Фурье от $f(x)$. С этой целью мы заметим, что раз

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{30.15}$$

и в силу $a_n \downarrow 0$ ряд в правой части (30.15) сходится равномерно на (ε, π) при любом $\varepsilon > 0$, то

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{\varepsilon}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}(\pi - \varepsilon) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin n\varepsilon}{n}. \tag{30.16}$$

Из $a_n \downarrow 0$ в силу теоремы 2 следует, что ряд $\sum a_n \frac{\sin nx}{n}$ сходится равномерно на $[0, 2\pi]$, значит, его сумма непрерывна на этом отрезке, и потому ряд в правой части (30.16) имеет сумму, стремящуюся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Отсюда следует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\pi. \tag{30.17}$$

Но так как $f(x) \geqslant 0$, то из существования предела, стоящего в левой части (30.17), следует суммируемость $f(x)$ на $[0, \pi]$, а поскольку $f(x)$ четная, то это дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\pi,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Теперь докажем, что при любом $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

С этой целью, умножая обе части (30.15) на $\cos kx$ и интегрируя по отрезку $[\varepsilon, \pi]$, находим

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{\varepsilon}^{\pi}\cos kx\,dx + \sum_{n=1}^{k-1} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx +$$

$$+ a_k\int_{\varepsilon}^{\pi}\cos^2 kx\,dx + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx. \tag{30.18}$$

При $\varepsilon \to 0$ каждый из интегралов $\int_{\varepsilon}^{\pi}\cos kx\,dx$ и $\int_{\varepsilon}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx$ $(n = 1, 2, \ldots, k-1)$ стремится к нулю.
Далее

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = \int_{0}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Наконец,

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\cos(k+n)x + \cos(n-k)x}{2}\,dx =$$

$$= \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \left[\frac{\sin(k+n)\varepsilon}{2(k+n)} + \frac{\sin(n-k)\varepsilon}{2(n-k)}\right] \tag{30.19}$$

и, рассуждая аналогично предыдущему, мы видим, что при $\varepsilon \to 0$ правая часть (30.19) стремится к нулю.

Таким образом, из (30.18) получаем при $\varepsilon \to 0$

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = a_k \frac{\pi}{2}$$

и, учитывая четность $f(x)$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

Итак, ряд (30.1) есть ряд Фурье от $f(x)$, и доказательство, таким образом, закончено.

Следствие. Так как последовательность $\frac{1}{\ln n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ выпукла, то из доказанной теоремы, в частности, следует: *ряд*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n} \tag{30.20}$$

есть ряд Фурье.

Между тем ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ заведомо не есть ряд Фурье (см. § 40), поэтому мы видим, что ряд, сопряженный к ряду Фурье, не обязан быть рядом Фурье.

Замечание. Для дальнейшего нам будет полезно отметить, что *у ряда* (30.20) *частные суммы удовлетворяют условию*

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)| \, dx < C, \tag{30.21}$$

где C — абсолютная константа.

Действительно, из формулы (30.13) получаем

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \Delta^2 a_j \int_0^{2\pi} K_j(x) \, dx + n \Delta a_{n-1} \int_0^{2\pi} K_{n-1}(x) \, dx + a_n \int_0^{2\pi} |D_n(x)| \, dx.$$

Но так как $\int_0^{2\pi} |D_n(x)| \, dx < A \ln n$, где A — постоянно (см. § 35), а

$$\int_0^{2\pi} K_j(x) \, dx = \frac{1}{j+1} \sum_{p=0}^{j} \int_0^{2\pi} D_p(x) \, dx = \pi,$$

то

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)| \, dx \leqslant \pi \left[\sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \Delta^2 a_j + n \Delta a_{n-1} \right] + A a_n \ln n.$$

Эта формула справедлива при любых $a_n \downarrow 0$ и образующих выпуклую последовательность. Поэтому, учитывая, что для таких последовательностей $\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\Delta^2 a_j < +\infty$ (см. § 3 Вводного материала), имеем

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)|\,dx < A\,a_n \ln n + B,$$

где A и B — постоянные. Для рассматриваемого нами случая, когда $a_n = \frac{1}{\ln n}$, следовательно, полагая $A + B = C$, видим, что (30.21) справедливо, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{\ln k} \right| dx \leqslant C \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{30.22}$$

§ 31. Интегральные выражения для частных сумм ряда Фурье и сопряженного ряда

Чтобы изучить вопрос о сходимости ряда Фурье на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ или в какой-либо его точке, оказывается очень удобным представить частную сумму этого ряда в той форме, которую ей придал Дирихле.

Пусть

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{31.1}$$

и

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx\,. \tag{31.2}$$

Подставляя в (31.2) выражения a_k и b_k из формул Фурье, находим

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\right)\cos kx +$$

$$+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right)\sin kx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x)\,dt, \tag{31.3}$$

где $D_n(u)$ — ядро Дирихле (см. § 29), а потому

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}. \tag{31.4}$$

Полагая $t - x = u$, мы из (31.3) и (31.4) получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\,D_n(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du. \qquad (31.5)$$

Если нам будет нужно одновременно рассматривать ряды Фурье от нескольких функций, например, f, g, ψ, мы будем, чтобы отличать их частные суммы, писать $S_n(x, f)$, $S_n(x, g)$, $S_n(x, \psi)$. Приняв это обозначение, заметим сразу, что из (31.5) непосредственно вытекает

$$\left.\begin{aligned} S_n(x, f_1 + f_2) &= S_n(x, f_1) + S_n(x, f_2),\\ S_n(x, Cf) &= CS_n(x, f), \end{aligned}\right\} \qquad (31.6)$$

и если $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, где ряд равномерно сходится, то

$$S_n(x, f) = \sum_{k=1}^{\infty} S_n(x, f_k) \qquad (31.7)$$

(потому что равномерно сходящиеся ряды можно интегрировать почленно).

Заметим еще, что так как

$$|D_n(x)| \leqslant n + \frac{1}{2}$$

при любых x, то во всяком случае

$$|S_n(x, f)| \leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt, \qquad (31.8)$$

и хотя эта оценка в большинстве случаев груба, но иногда и этого бывает достаточно.

Обычно для исследования проблем сходимости формулу (31.5) подвергают ряду преобразований, но прежде чем перейти к этому вопросу, отметим здесь же, что аналогично можно записать частную сумму ряда, сопряженного к (31.1), т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} - b_n \cos nx + a_n \sin nx.$$

Именно, полагая

$$\bar{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} - b_k \cos kx + a_k \sin kx,$$

находим, рассуждая аналогично предыдущему,

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\bar{D}_n(t-x)\,dt, \qquad (31.9)$$

где

$$\bar{D}_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \sin\ ku.$$

Ядро $\bar{D}_n(u)$, сопряженное к ядру Дирихле, как мы видели (см. § 29), имеет вид

$$\bar{D}_n(x) = \frac{\cos\frac{u}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}, \qquad (31.10)$$

следовательно,

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos\frac{t-x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt \tag{31.11}$$

или

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\frac{\cos\frac{u}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du. \tag{31.12}$$

Теперь для преобразования формул (31.5) и (31.12) к более удобному виду, докажем одну важную лемму.

Лемма. *Если $f(x)$ суммируема, $g(x)$ ограничена и обе имеют период 2π, то интегралы*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\cos nt\,dt \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\sin nt\,dt \tag{31.13}$$

стремятся к нулю равномерно при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть

$$\psi_x(t) = f(x+t)\,g(t).$$

Если x фиксировано, то $\psi_x(t)$ есть суммируемая функция переменного t, и поэтому ясно, что рассматриваемые интегралы лишь на постоянный множитель $\frac{1}{\pi}$ отличаются от коэффициентов Фурье этой функции. Таким образом для каждого x интегралы (31.13) стремятся к нулю при $n \to \infty$. Но смысл леммы — доказать равномерность этого стремления.

Рассуждая так же, как в § 21, имеем

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\psi_x(t)\cos nt\,dt\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left|\psi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \psi_x(t)\right|dt$$

и аналогично для $\sin nt$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\psi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \psi_x(t)\right|dt \tag{31.14}$$

стремится к нулю равномерно относительно x при $n \to \infty$. Но

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\psi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \psi_x(t)\right|dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right)g\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - f(x+t)\,g(t)\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right) - f(x+t)\right|\left|g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|dt +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+t)\right|\left|g\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - g(t)\right|dt. \tag{31.15}$$

Замечая, что $g(t)$ ограничена и имеет период 2π, следовательно $|g(t)| \leqslant M$ для любого t, а также вспоминая, что и $f(t)$ имеет период 2π, находим для первого из интегралов правой части (31.15)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right)-f(x+t)\right|\left|g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant M\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right)-f(x+t)\right|dt \leqslant M\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-f(t)\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant M\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \qquad (31.16)$$

где $\omega_1(\delta, f)$ — интегральный модуль непрерывности $f(x)$ (см. Вводный материал, § 25); мы уже знаем, что $\omega_1(\delta, f)$ стремится к нулю при $\delta \to 0$ для любой суммируемой $f(x)$. Заметив, что в правой части неравенства (31.16) x уже больше не фигурирует, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right)-f(x+t)\right|\left|g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|dt \to 0$$

равномерно относительно x при $n \to \infty$.

Что касается второго интеграла формулы (31.15), то для его оценки мы возьмем любое $\varepsilon > 0$ и разложим $f(x)$ на сумму двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, из которых первая ограничена, например, $|f_1(x)| \leqslant K$, а для второй

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f_2(t)|\,dt < \varepsilon.$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\left|g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-g(t)\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant K\int_{-\pi}^{\pi}\left|g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-g(t)\right|dt+\int_{-\pi}^{\pi}|f_2(x+t)|\left|g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-g(t)\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant K\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right)+2M\int_{-\pi}^{\pi}|f_2(x+t)|\,dt \leqslant K\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right)+2M\varepsilon. \qquad (31.17)$$

Так как $\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right) \to 0$, число ε произвольно и в правую часть (31.17) x не входит, то левая часть (31.17) стремится к нулю равномерно и доказательство закончено.

З а м е ч а н и е 1. Наша лемма сохраняет силу, если вместо интегралов (31.13) рассмотреть интегралы

$$\int_a^b f(x+t)\,g(t)\cos nt\,dt \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x+t)\,g(t)\sin nt\,dt,$$

где a и b — любые две точки на $[-\pi, \pi]$. Действительно, достаточно положить

$$g_1(t)=\begin{cases} g(t) & \text{на} \quad [a,b], \\ 0 & \text{вне} \quad [a,b], \end{cases}$$

чтобы свести этот случай к предыдущему.

Замечание 2. В проведенном доказательстве мы нигде не пользовались тем, что n целое. Поэтому лемма сохраняет силу, если $n \to \infty$, пробегая все действительные значения.

Замечание 3. Для будущего полезно отметить, что наша лемма сохраняет силу, если вместо $g(t)$ рассмотреть функцию $g_x(t)$, для которой выполнены условия

а) $|g_x(t)| \leqslant M$ для $\begin{array}{l} -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \\ -\pi \leqslant t \leqslant \pi \end{array}$

и, кроме того, при $h \to 0$

б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g_x(t+h) - g_x(t)|\, dt \to 0$

равномерно относительно x на $[-\pi, \pi]$.

Действительно, в этом случае доказательство леммы проходит слово в слово.

Замечание 4. Если $f(x)$ — непрерывная функция, то из проведенного доказательства получим

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, g(t) \cos nt\, dt \right| \leqslant A\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) + B\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right),$$

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, g(t) \sin nt\, dt \right| \leqslant A\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) + B\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right),$$

где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности $f(x)$, а A и B — постоянные.

Действительно, в формуле (31.16) в случае непрерывности $f(x)$ можно $\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right)$ заменить через $2\pi\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)$, а второй интеграл формулы (31.15) ввиду ограниченности $f(x)$ не превосходит $B\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right)$, где B — постоянно.

§ 32. Упрощение выражений для $S_n(x)$ и $\bar{S}_n(x)$

Мы сейчас применим доказанную в § 31 лемму для упрощения выражений для $S_n(x)$ и $\bar{S}_n(x)$ (см. (31.5) и (31.11)).

Прежде всего заметим, что

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{\sin nu \cos\frac{u}{2} + \cos nu \sin\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{\sin nu}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}} + \frac{1}{2}\cos nu. \tag{32.1}$$

Далее заметим, что функция

$$g(u) = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}} - \frac{1}{u} \tag{32.2}$$

непрерывна на $[-\pi, \pi]$. Действительно, могла бы вызвать сомнение лишь точка $u = 0$; но, применяя правило Лопиталя, легко находим, что

$\lim\limits_{u\to 0} g(u)=0$. Потребуем еще, чтобы $g(u+2\pi)=g(u)$; тогда $g(u)$ ограничена на $(-\infty, +\infty)$.

Из (32.1) и (32.2) получаем

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{\sin nu}{u} + g(u)\sin nu + \frac{1}{2}\cos nu. \tag{32.3}$$

Поэтому из (31.5) получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\frac{\sin nu}{u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\,g(u)\sin nu\,du + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\cos nu\,du. \tag{32.4}$$

Два последних интеграла формулы (32.4) стремятся к нулю равномерно при $n\to\infty$ на основании леммы § 31 и ограниченности $g(u)$. Поэтому

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\frac{\sin nu}{u}\,du + o(1), \tag{32.5}$$

где $o(1)$ — величина, стремящаяся к нулю равномерно. Этим фактом мы будем часто пользоваться.

Замечание. Иногда важно оценить величину $o(1)$ более точно; поэтому укажем здесь же, что если $f(x)$ непрерывна, то, в силу замечания 4, сделанного в конце § 31, каждый из двух последних интегралов в (32.4) по модулю не превосходит

$$A\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right) + B\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right), \tag{32.6}$$

где A и B постоянные. Но так как $g(u)$ есть функция с ограниченным изменением, а для таких функций интегральный модуль непрерывности $\omega_1(\delta)$ имеет порядок $O(\delta)$ (см. Вводный материал, § 25), то (32.6) есть величина порядка

$$O\left[\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{32.7}$$

Наконец, заметив, что для любой непрерывной функции $f(x)$ модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ не может превзойти $O(\delta)$, мы заключаем, что в (32.7) второй член либо того же порядка, как первый, либо бесконечно малое более высокого порядка. Поэтому окончательно, полагая

$$\tilde{S}_n(x, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\frac{\sin nu}{u}\,du, \tag{32.8}$$

находим из (32.5) для непрерывной $f(x)$

$$S_n(x, f) = \tilde{S}_n(x, f) + O\left[\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)\right]. \tag{32.9}$$

В случае $f(x)$ любой суммируемой иногда бывает полезна оценка

$$|S_n(x, f) - \tilde{S}_n(x, f)| \leqslant C\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx, \tag{32.10}$$

где C — абсолютная константа. Эта оценка получается непосредственно из (32.4) и (32.8), если учесть ограниченность функции $g(u)$.

После этого замечания, которое будет использовано позже, вернемся к упрощению формул для частных сумм. Мы хотим еще упростить выражение для $\bar{S}_n(x)$. С этой целью заметим, что (см. (31.10))

$$\bar{D}_n(u) = \frac{\cos\frac{u}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{\cos\frac{u}{2} - \cos\frac{u}{2}\cos nu}{2\sin\frac{u}{2}} + \frac{\sin nu}{2} =$$

$$= \frac{1 - \cos nu}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}} + \frac{\sin nu}{2}. \tag{32.11}$$

Отсюда, если воспользоваться леммой § 31, сразу получим

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u + x)\, \frac{1 - \cos nu}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\, du + o(1).$$

Если снова воспользоваться функцией $g(u)$, то можно получить другое выражение для $\bar{S}_n(x)$. Именно, если написать

$$\bar{D}_n(u) = \frac{1 - \cos nu}{u} + g(u)(1 - \cos nu) + \frac{\sin nu}{2},$$

то, снова применяя лемму § 31, получим

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u + x)\, \frac{1 - \cos nu}{u}\, du - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u + x)\, g(u)\, du + o(1),$$

а так как второй интеграл есть $O(1)$, то

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u + x)\, \frac{1 - \cos nu}{u}\, du + O(1) \tag{32.12}$$

или

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x + u) - f(x - u)]\, \frac{1 - \cos nu}{u}\, du + O(1). \tag{32.13}$$

Для дальнейшего будет также полезно заметить, что, если $\delta > 0$ любое, а $f(x)$ ограничена, то можно (32.13) переписать в виде

$$\bar{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} [(f\, x + u) - f(x - u)]\, \frac{1 - \cos nu}{u}\, du + O(1), \tag{32.14}$$

так как отброшенный интеграл $\int_{\delta}^{\pi}$ есть $O(1)$.

§ 33. Принцип локализации Римана

В § 32 мы нашли удобное выражение для частной суммы ряда Фурье, из которого можно легко вывести одно важное следствие. Прежде всего, взяв произвольное $\delta > 0$ и обозначив через $g(u)$ функцию, определяемую так:

$$g(u) = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad (-\delta, \delta), \\ \dfrac{1}{u} & \text{на} \quad (-\pi, -\delta) \text{ и } (\delta, \pi), \end{cases}$$

$$g(u + 2\pi) = g(u),$$

мы можем на основании (32.5) написать

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(u + x)\frac{\sin nu}{u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u + x)\,g(u)\sin nu\,du + o(1),$$

а так как $g(u)$ ограниченная и периодическая, то отсюда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(u + x)\frac{\sin nu}{u}\,du + o(1), \tag{33.1}$$

где снова $o(1)$ равномерно стремится к нулю *). Эта формула позволяет уже высказать следующее весьма важное предложение, носящее название *принципа локализации Римана.*

Теорема Римана. *Сходимость или расходимость ряда Фурье в точке x зависит только от поведения функции $f(x)$ в окрестности точки x.*

В самом деле, значения функции $f(x)$ вне интервала $(x - \delta, x + \delta)$ совершенно не фигурируют в формуле (33.1), а потому вопрос о том, стремится ли $S_n(x)$ к пределу при $n \to \infty$, зависит только от поведения $f(x)$ на этом интервале. Более того, так как в формуле (33.1), как было доказано, $o(1)$ равномерно стремится к нулю, можно и о равномерной сходимости $S_n(x)$ на каком-либо интервале судить по тому, стремится ли равномерно к пределу интеграл, стоящий в правой части (33.1).

Этот же результат удобно высказать в такой форме:

Теорема. *Если две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ совпадают на некотором отрезке $[a, b]$, то во всяком отрезке $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, их ряды Фурье являются равномерно равносходящимися, т. е. разность этих рядов равномерно сходится к нулю.*

Действительно, пусть

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

---

*) Обращаем внимание читателя на работу Hille and Klein [1], где доказывается, что

$$\left| S_n(x, f) - \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x + t)\frac{\sin nt}{t}\,dt \right| \leqslant \frac{K}{\delta}\left[\int_{0}^{2\pi} |f(x)|\,dx + 1\right]\omega_1\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Здесь $\omega_1(\delta, f)$ — интегральный модуль непрерывности $f(x)$, а K — абсолютная константа.

Тогда $f(x)=0$ на $[a, b]$. Пусть число $\delta>0$ выбрано так, что $\delta \leqslant \varepsilon$ и x — любая точка отрезка $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$. Тогда $u+x \in [a, b]$ для $-\delta \leqslant u \leqslant \delta$, а потому $f(u+x)=0$ и по формуле (33.1):

$$S_n(x)=o(1) \qquad \text{на} \quad [a+\varepsilon, b-\varepsilon],$$

где $o(1)$ равномерно стремится к нулю на $[0, 2\pi]$. Значит, ряд Фурье от $f(x)$ равномерно сходится к нулю на $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$.

§ 34. Теорема Штейнгауза

Из предыдущих результатов можно вывести одно полезное следствие. Оно принадлежит Штейнгаузу (см. Steinhaus [3]) и может быть высказано в следующей форме:

Если $\lambda(x)$ — периодическая функция, удовлетворяющая условию Липшица порядка 1, *то ряды $\sigma(\lambda f)$ и $\lambda(x)\,\sigma(f)$ являются равномерно равносходящимися на $[-\pi, \pi]$.*

В самом деле, имеем

$$S_n(\lambda f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\lambda(x+t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt+o(1),$$

$$\lambda(x)S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\lambda(x)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt+o(1).$$

Следовательно, полагая

$$g_x(t)=\frac{\lambda(x+t)-\lambda(x)}{t},$$

имеем

$$S_n(\lambda f)-\lambda(x)\,S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g_x(t)\sin nt\,dt+o(1). \tag{34.1}$$

Чтобы убедиться в том, что правая часть (34.1) равномерно стремится к нулю, достаточно применить лемму § 31, вернее замечание 3 к ней, проверив только, что выполнены наложенные там на $g_x(t)$ ограничения. Но условие

$$|g_x(t)| \leqslant M$$

равномерно по x и t есть результат того, что $g_x(t)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, остается доказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g_x(t+h)-g_x(t)|\,dt=o(1)$$

равномерно относительно x при $h \to 0$.

Для этого, задав $\varepsilon>0$, возьмем интервал длины $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$; на нем имеем

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g_x(t+h)-g_x(t)|\,dt \leqslant 4M\varepsilon.$$

Если же $t \in (-\pi, -\varepsilon)$ или $t \in (\varepsilon, \pi)$, то для любого η можно найти такое h, что подынтегральное выражение для всех t в рассматриваемом интервале будет меньше η, а тогда соответствующий интеграл меньше $\pi\eta$. Этим заканчивается доказательство теоремы.

§ 35. Интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Константы Лебега

Прежде чем идти дальше в изучении вопроса о сходимости ряда Фурье, нам необходимо отметить некоторые свойства выражения

$$D_n^*(t) = \frac{\sin nt}{t}, \tag{35.1}$$

которое мы будем называть *упрощенным ядром Дирихле*. Заметим сначала, что из формулы (33.1), принимая во внимание четность упрощенного ядра Дирихле, сразу находим

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\delta [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \tag{35.2}$$

Если мы рассмотрим случай $f(x) \equiv 1$, то $S_n(x) \equiv 1$ при любом n, а потому

$$1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\delta \frac{\sin nu}{u} du + o(1). \tag{35.3}$$

Полагая $nu = t$, находим отсюда

$$1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{n\delta} \frac{\sin t}{t} dt + o(1),$$

а потому

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{n\delta} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда сразу следует

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \tag{35.4}$$

т. е. этот несобственный интеграл имеет смысл, и мы даже знаем его величину.

Заметим теперь же, что из существования этого интеграла вытекает: если $\delta > 0$ и $\delta' > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\delta^{\delta'} \frac{\sin nt}{t} dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{n\delta}^{n\delta'} \frac{\sin t}{t} dt = 0. \tag{35.5}$$

Эта формула нам понадобится позже.

Заметим, что существование интеграла (35.4) необходимо ясно понимать геометрически, поэтому мы несколько остановимся на этом вопросе, хотя он и должен быть известен читателю из курса анализа.

Сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ можно было бы доказать и иначе. Полагая (рис. 5)

$$u_k=\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

мы видим, что

$$u_k=\int\limits_0^\pi \frac{\sin(t+k\pi)}{t+k\pi}\,dt=(-1)^k\int\limits_0^\pi\frac{\sin t}{t+k\pi}\,dt,$$

откуда следует, что ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty u_k$ знакочередующийся, причем члены его моно-

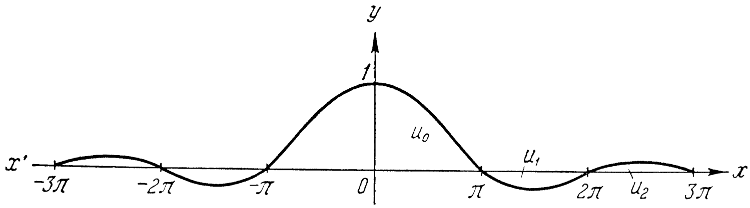

Рис. 5

тонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю, так как

$$|u_k|=\int\limits_0^\pi\frac{\sin t}{t+k\pi}\,dt<\frac{1}{k\pi}\pi=\frac{1}{k} \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Но по известной теореме Лейбница такой ряд должен сходиться. С другой стороны ясно, что когда сумма $\sum u_k$ имеет смысл, то она есть интеграл (35.4). Итак,

$$\sum_{k=0}^\infty u_k=\int\limits_0^\infty\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}.$$

Теперь заметим, что

$$\sum_{k=0}^\infty u_k<u_0,$$

откуда

$$\frac{\pi}{2}<u_0=\int\limits_0^\pi\frac{\sin u}{u}\,du<\pi. \tag{35.6}$$

Так же, пользуясь монотонностью u_n и чередованием их знаков, видим, что если A и B — любые два числа, лишь бы $0\leqslant A<B$, то

$$\left|\int\limits_A^B\frac{\sin t}{t}\,dt\right|<\pi. \tag{35.7}$$

В силу четности $\frac{\sin t}{t}$ это же верно, если $A<B\leqslant 0$.

Наконец, если A и B разных знаков, то, разбивая интеграл на два, именно от A до 0 и от 0 до B, находим

$$\left|\int\limits_A^B\frac{\sin t}{t}\,dt\right|<2\pi.$$

Это простое замечание будет для нас в дальнейшем очень важно, так как из него вытекает, что для любых a и b имеем

$$\left|\int_a^b \frac{\sin nt}{t}\,dt\right| < 2\pi, \tag{35.8}$$

потому что

$$\left|\int_a^b \frac{\sin nt}{t}\,dt\right| = \left|\int_{na}^{nb} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| < 2\pi \tag{35.9}$$

в силу (35.7).

Заметим теперь, что ограниченность интеграла (35.8) обязана исключительно интерференции положительных и отрицательных волн синусоиды. Если подынтегральное выражение взять по модулю, то результат будет совершенно другой. Докажем, что

$$\int_0^\pi \left|\frac{\sin nt}{t}\right| dt$$

неограниченно возрастает с ростом n и даже оценим точно порядок его роста. Это нам будет очень важно для дальнейшего.

Пусть

$$I_n = \int_0^\pi \left|\frac{\sin nt}{t}\right| dt = \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du. \tag{35.10}$$

Ясно, что тогда

$$I_{n+1} - I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du = \int_0^\pi \frac{\sin v}{v + n\pi}\,dv$$

и так как при $0 \leqslant v \leqslant \pi$ имеем

$$\frac{1}{\pi(n+1)} \leqslant \frac{1}{v+n\pi} \leqslant \frac{1}{n\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

а

$$\int_0^\pi \sin v\,dv = 2,$$

то

$$\frac{2}{\pi(n+1)} \leqslant I_{n+1} - I_n \leqslant \frac{2}{n\pi}. \tag{35.11}$$

Заставляя n пробегать значения $1, 2, \ldots, m-1$ и складывая равенства (35.11), найдем

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{n=1}^{m-1}(I_{n+1} - I_n) \leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n}$$

или

$$I_1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n} \leqslant I_m \leqslant I_1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n}.$$

Но, принимая во внимание, что

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} \approx \ln m,$$

где $\approx$ означает асимптотическое равенство (см. Вводный материал, § 11), находим $I_m \approx \ln m$. Итак, находим

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin u|}{u} du = I_n \approx \frac{2}{\pi} \ln n. \tag{35.12}$$

Таким образом I_n не только бесконечно возрастает с ростом n, но мы видим точно порядок этого роста.

Заметим, что из (35.12) сразу следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du = +\infty,$$

т. е. интеграл

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty, \tag{35.13}$$

значит, интеграл (35.4) заведомо сходится только условно, но не абсолютно.

Из формулы (35.12) выведем одно следствие, которое будет играть в дальнейшем важную роль.

Условимся называть *константами Лебега* выражения

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt, \tag{35.14}$$

где $D_n(t)$ — ядро Дирихле.

Так как $D_n(t)$ — функция четная, то

$$L_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)|\, dt.$$

Но мы знаем (см. § 32), что

$$D_n(t) = \frac{\sin nt}{t} + O(1),$$

а потому

$$L_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin nt}{t} \right| dt + O(1),$$

откуда

$$L_n = \frac{2}{\pi} I_n + O(1)$$

и в силу (35.12)

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2} \ln n.$$

Итак,

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt \approx \frac{4}{\pi^2} \ln n. \tag{35.15}$$

Аналогично можно доказать, что и для ядра, сопряженного с ядром Дирихле, интеграл от модуля имеет тот же порядок роста, т. е. растет как $\ln n$.

Чтобы убедиться в этом, вычислим один вспомогательный интеграл, именно

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t}\, dt. \tag{35.16}$$

Так как

$$\frac{\sin^2 nt}{\sin t} = \sum_{k=1}^{n} \sin (2k-1)\, t$$

(что проверяется непосредственно умножением обеих частей на $\sin t$ и заменой произведения синусов на разность косинусов), то

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2k-1)\, t\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \sim \ln n \tag{35.17}$$

(здесь и в дальнейшем мы не будем подсчитывать точно констант, а писать просто $u_n \sim v_n$, если $A < \frac{u_n}{v_n} < B$, где A и B — положительные постоянные).

Рассмотрим теперь

$$\varrho_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \overline{D}_n(t) \right| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \overline{D}_n(t) \right| dt.$$

Так как (см. (32.11))

$$\overline{D}_n(t) = \frac{1-\cos nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} + \frac{\sin nt}{2},$$

то мы имеем

$$\overline{D}_n(t) = \frac{1-\cos nt}{2 \sin \frac{t}{2}} + O(1) = \frac{\sin^2 \frac{n}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} + O(1)$$

(потому что

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left[\cos \frac{t}{2} - 1 \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{t}{4} \Big).$$

Следовательно,

$$\varrho_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 n \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\, dt + O(1) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nu}{\sin u}\, du + O(1) = \frac{4}{\pi} J_n + O(1),$$

а потому

$$\varrho_n \sim \ln n.$$

Итак,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{D}_n(t)|\, dt \sim \ln n, \tag{35.18}$$

а это мы и хотели доказать.

§ 36. Оценка частных сумм ряда Фурье от ограниченной функции

Из результатов предыдущего параграфа мгновенно получаем следующую теорему:

Теорема Лебега. *Если $f(x)$ — ограниченная функция*

$$|f(x)|\leqslant M,$$

то для $n=2, 3, \ldots$

$$|S_n(x)|\leqslant CM \lg n, \qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi \tag{36.1}$$

и

$$|\overline{S}_n(x)|\leqslant CM \ln n, \qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi, \tag{36.2}$$

где C — абсолютная константа.

Действительно (см. (31.3) и (35.15)),

$$\left|S_n(x)\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t-x)\,dt\right| \leqslant M\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t-x)|\,dt = ML_n < CM \ln n$$

и аналогично (см. (31.9) и (35.18))

$$|\overline{S}_n(x)| < CM \ln n.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Можно было бы подумать, что формула (36.1) чересчур груба; в самом деле, может показаться, что для ограниченной функции частные суммы ряда Фурье должны быть ограниченными. Однако это неверно даже для непрерывных функций. Если бы ряд Фурье от непрерывной функции равномерно сходился к ней, то такая ограниченность должна была бы иметь место; но мы увидим дальше, что для непрерывных функций ряды Фурье могут сходиться неравномерно, а также могут расходиться и даже на бесконечном множестве точек иметь неограниченные частные суммы.

Замечание 2. Если $f(x)\in L[0, 2\pi]$ и $|f(x)|\leqslant M$ на некотором $[a, b]\subset[0, 2\pi]$, то на любом $[a', b']$, $a<a'<b'<b$, имеем

$$|S_n(x)|\leqslant AM \ln n + \frac{1}{\delta}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt \qquad (n=2, 3, \ldots), \tag{36.3}$$

где A — абсолютная константа, а $\delta=\min(a'-a, b-b')$.

Действительно, так как

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\, D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(t+x)\, D_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{[-\pi,\,\pi]-(-\delta,\,\delta)} f(x+t)\, D_n(t)\,dt, \tag{36.4}$$

то, выбрав δ так, чтобы $\delta=\min(a'-a, b-b')$, видим, что при $x\in[a', b']$ аргумент $t+x$ в первом интеграле не выходит из $[a, b]$ и, значит,

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(t+x)\, D_n(t)\,dt\right| \leqslant M\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_n(t)\right|dt \leqslant AM \ln n, \tag{36.5}$$

где A — абсолютная константа.

Но так как вне $(-\delta, \delta)$ имеем $|D_n(t)| \leqslant \frac{\pi}{\delta}$, то для второго интеграла в (36.4) находим

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]-(-\delta,\delta)} f(x+t) D_n(t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{\delta} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) \right| dt. \tag{36.6}$$

Соединяя (36.4), (36.5) и (36.6), получаем (36.3). Вместо (36.3) можно также написать

$$|S_n(x)| \leqslant CM \ln n \quad \text{при} \quad n \geqslant N,$$

где N зависит от M, δ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$, так как, если N достаточно велико, то при $n \geqslant N$ второй член формулы (36.3) станет меньше первого.

§ 37. Критерий сходимости ряда Фурье

Вернемся к вопросу о сходимости рядов Фурье. Мы хотим найти условия, при которых $\sigma(f)$ сходится в некоторой точке x к какому-то числу S.

С этой целью прежде всего заметим, что из (33.1) следует

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\delta} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin nt}{t}\, dt + o(1), \tag{37.1}$$

где $o(1)$ означает величину, равномерно стремящуюся к нулю на $[-\pi, \pi]$. Кроме того, умножая на S обе части равенства (35.3), имеем

$$S = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\delta} S \frac{\sin nu}{u}\, du + o(1). \tag{37.2}$$

Из (37.1) и (37.2) теперь находим

$$S_n(x) - S = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2s] \frac{\sin nu}{u}\, du + o(1). \tag{37.3}$$

Отсюда ясно, что для сходимости $\sigma(f)$ к числу S в точке x необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2S] \frac{\sin nu}{u}\, du = 0. \tag{37.4}$$

Если же мы хотим, чтобы в точке x ряд $\sigma(f)$ имел «естественную сумму», т. е. сумму, равную $f(x)$, то для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\delta} [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)] \frac{\sin nu}{u}\, du = 0. \tag{37.5}$$

Полагая

$$\varphi_x(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x), \tag{37.6}$$

мы можем, следовательно, сформулировать такое предложение:

Для того чтобы в некоторой точке x ряд $\sigma(f)$ сходился к $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \varphi_x(u)\frac{\sin nu}{u}\,du=0, \tag{37.7}$$

где $\delta>0$, а $\varphi_x(u)$ определено формулой (37.6).

Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале (a, b), то можно ставить вопрос о равномерной сходимости ряда $\sigma(f)$ к $f(x)$.

Пусть $\varepsilon>0$ любое. Из непрерывности $f(x)$ на интервале (a, b) следует ее непрерывность, а значит, и ограниченность на отрезке $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$. Поэтому, если умножить (35.3) на $f(x)$, то имеем

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\delta f(x)\frac{\sin nt}{t}\,dt+o(1), \tag{37.8}$$

где $o(1)$ стремится к нулю равномерно на $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$. Из (37.1) и (37.8) выводим тогда

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\frac{\sin nu}{u}\,du+o(1). \tag{37.9}$$

Здесь δ можно брать любым. Поэтому, если мы возьмем $\delta<\varepsilon$, то при $x\in[a+\ \varepsilon, b-\varepsilon]$ и $|u|\leqslant\delta$ будем иметь $u+x\in(a,b)$ и $u-x\in(a,b)$, а тогда $\varphi_x(u)$, определяемая формулой (37.6), будет все еще непрерывна на (a, b). Отсюда, пользуясь (37.9), можно заключить:

Если $f(x)$ непрерывна на (a, b) и $\varepsilon>0$ любое, то для равномерной сходимости ряда $\sigma(f)$ на $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \varphi_x(u)\frac{\sin nu}{u}\,du=0$$

равномерно на $[a, b]$; здесь δ любое, удовлетворяющее неравенству $0<\delta<\varepsilon$, а $\varphi_x(u)$ — функция, определяемая равенством (37.6) *и непрерывная для*

$$a+\varepsilon\leqslant x\leqslant b-\varepsilon,\quad |u|\leqslant\delta.$$

§ 38. Признак Дини

Полученные условия сходимости (и равномерной сходимости) хотя и являются необходимыми и достаточными, однако их очень трудно применять. Поэтому мы выведем из них ряд признаков, которые хотя и будут лишь достаточными для сходимости (или для равномерной сходимости), но в простых и важных случаях часто оказываются очень полезны.

Прежде чем выводить эти признаки, введем одно определение.

Определение. Следуя Лебегу, назовем точку x_0 *регулярной*, если $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ существуют и если

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Ясно, что всякая точка непрерывности есть регулярная; регулярными будут и те точки разрыва 1-го рода, в которых величина функции есть среднее арифметическое ее пределов слева и справа.

Докажем следующую теорему:

Признак Дини. *Ряд $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ во всякой регулярной точке x, где интеграл*

$$\int_0^\delta |f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|\frac{du}{u}$$

имеет смысл.

Действительно, если этот интеграл имеет смысл, то можно для любого $\varepsilon>0$ выбрать η столь малым, что

$$\int_0^\eta |f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|\frac{du}{u}<\varepsilon.$$

Тогда при любом n, в силу $|\sin nu|\leqslant 1$, имеем

$$\left|\int_0^\eta [f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\frac{\sin nu}{u}\,du\right|<\varepsilon.$$

Но в силу замечания 1 к лемме § 31

$$\int_\eta^\delta \left[\frac{f(x+u)+f(x-u)-2f(x)}{u}\right]\sin nu\,du\to 0 \quad \text{при}\; n\to\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\frac{\sin nu}{u}\,du=0$$

и из (37.9) следует, что сходимость доказана.

В частности, если снова положить

$$\varphi_x(u)=f(x+u)+f(x-u)-2f(x),$$

то критерий Дини дает: если в точке x функция $f(x)$ непрерывна и

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi_x(t)|}{t}\,dt \tag{38.1}$$

имеет смысл, то $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$ в точке x.

Отсюда можно вывести ряд следствий. Например, если $f(x)$ в окрестности точки x удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha>0$, т. е. если

$$|f(x+u)-f(x)|\leqslant K|u|^\alpha$$

для $|u|\leqslant\delta$, то интеграл (38.1) имеет смысл, а значит, $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$. Если функция $f(x)$ имеет в точке x конечную производную, то в окрестности этой точки она удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha=1$, а потому:

В точке x, где $f(x)$ имеет конечную производную, ее ряд Фурье сходится к ней.

В частности, *если $f(x)$ дифференцируема всюду на $(-\pi,\pi)$, то ее ряд Фурье сходится всюду на этом интервале.*

§ 39. Признак Жордана

Как известно, всякая функция с ограниченным изменением есть разность двух неубывающих ограниченных функций. Если функция монотонна, то она имеет только разрывы 1-го рода. Кроме того, если функция с ограниченным изменением непрерывна, то ее можно представить как разность двух непрерывных неубывающих функций.

Этим мы воспользуемся при доказательстве следующей теоремы:

Теорема Жордана. *Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение на некотором интервале (a, b), то ее ряд Фурье сходится в каждой точке этого интервала. Его сумма есть $f(x)$ в точке непрерывности и $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в точке разрыва. Наконец, если (a', b') лежит целиком внутри интервала (a, b), где $f(x)$ непрерывна, то ряд Фурье сходится равномерно на (a', b').*

В силу сделанных ранее замечаний ясно, что достаточно доказать теорему для случая неубывающей $f(x)$. В этом случае, полагая

$$S = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

мы видим из

$$f(x+u)+f(x-u)-2S = [f(x+u)-f(x+0)]+[f(x-u)-f(x-0)],$$

что при фиксированном x каждая из скобок есть монотонная функция от u. Оценим теперь

$$\int_0^\delta [f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin nu}{u}\,du. \tag{39.1}$$

Здесь δ выбирается так, чтобы $x \pm \delta \in (a, b)$. Но каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно взять $\delta_1 < \delta$ столь малым, чтобы

$$|f(x+u)-f(x+0)| < \varepsilon \qquad 0 \leqslant u \leqslant \delta_1.$$

Так как $f(x+u)-f(x+0)$ не убывает и неотрицательна, то, применяя вторую теорему о среднем, видим, что

$$\int_0^{\delta_1} [f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin nu}{u}\,du = [f(x+\delta_1)-f(x+0)]\int_{\delta_2}^{\delta_1}\frac{\sin nu}{u}\,du, \tag{39.2}$$

где $0 < \delta_2 < \delta_1$. Но так как (см. (35.7))

$$\left|\int_{\delta_2}^{\delta_1}\frac{\sin nu}{u}\,du\right| < \pi$$

при любых положительных δ_1 и δ_2, то интеграл (39.2) по модулю не превосходит $\pi\varepsilon$.

На основании леммы § 31 тогда

$$\left|\int_0^\delta [f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin nu}{u}\,du\right| < 2\pi\varepsilon,$$

если n достаточно велико.

Точно также оценивается

$$\int_0^\delta [f(x-u)-f(x-0)]\frac{\sin nu}{u}\,du.$$

Поэтому для достаточно больших n

$$\left|\int_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)-2S]\frac{\sin nu}{u}\,du\right| \leqslant 4\pi\varepsilon,$$

где ε как угодно мало, а тогда на основании критерия сходимости § 37 мы видим, что ряд сходится в точке x к числу S.

Пусть теперь $f(x)$ непрерывна на некотором интервале $[a, b]$, и $[a', b']$ — любой отрезок, лежащий строго внутри (a, b).

Можно выбрать δ_1 столь малым, чтобы

$$|f(x+u)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{и} \quad |f(x-u)-f(x)|<\varepsilon,$$

если $a' \leqslant x \leqslant b'$ и $0 \leqslant u \leqslant \delta_1$. Если так, то в предыдущих оценках интегралов x может быть взято любым из (a', b') и, следовательно,

$$\left|\int_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\frac{\sin nu}{u}\,du\right| \leqslant 4\pi\varepsilon$$

для $a' \leqslant x \leqslant b'$, а это в силу критерия § 37 и значит, что ряд сходится равномерно на (a', b').

Теорема Жордана доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, вытекает, что *если $f(x)$ имеет ограниченное изменение на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ и непрерывна на нем, причем $f(-\pi)=f(\pi)$, то ее ряд Фурье сходится равномерно на $-\infty < x < +\infty$.*

Следовательно: *ряд Фурье для всякой периодической абсолютно-непрерывной функции сходится равномерно к ней на $-\infty < x < +\infty$.*

Замечание. Важный частный случай доказанной теоремы был рассмотрен Дирихле. Он изучал случай, когда функция $f(x)$ ограничена и имеет лишь конечное число максимумов и минимумов и не более чем конечное число точек разрыва. Для этих функций он доказал сходимость ряда Фурье в каждой точке. Ясно, что эти функции все имеют ограниченное изменение.

§ 40. Интегрирование рядов Фурье

Пусть $f(x)$ суммируема и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Обозначим через $F(x)$ примитивную от $f(x)$. Тогда

$$F(x) = \frac{a_0}{2}x + C + \sum \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n}, \tag{40.1}$$

причем ряд в правой части сходится равномерно.

Эта теорема принадлежит Лебегу. Чтобы ее доказать, достаточно заметить, что $F(x) - \frac{a_0}{2}x$ есть примитивная от $f(x) - \frac{a_0}{2}$, она абсолютно непрерывна и имеет период 2π (см. § 23, n° 8).

Следовательно, ряд Фурье от $F(x) - \frac{a_0}{2}x$ сходится равномерно к ней. Но он имеет вид (см. § 23, n° 8)

$$\sum \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n}.$$

Это и заканчивает доказательство.

Как следствие, получаем для любых a и b

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left.\frac{a_0 x}{2}\right|_a^b + \left.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n}\right|_a^b,$$

т. е. *ряды Фурье (даже расходящиеся) можно интегрировать почленно по любому интервалу.*

Следствие. В формуле (40.1) ряд сходится для всех x; в частности при $x = 0$; но это означает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Итак: *для всякого ряда Фурье—Лебега ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ *сходится.*

Эта теорема дает возможность в некоторых случаях сразу установить, что заданный ряд не является рядом Фурье—Лебега. Так, например, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

не есть ряд Фурье—Лебега, хотя в силу теоремы 1 § 30 он сходится в каждой точке.

Напротив, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ может и расходиться, в частности ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n},$$

для которого ряд $\sum \frac{a_n}{n} = \sum \frac{1}{n \ln n}$ расходится, все же является рядом Фурье—Лебега (это было доказано в § 30).

§ 41. Явление Гиббса

Мы доказали в § 39, что у функции с ограниченным изменением ряд Фурье сходится в каждой точке, и в частности в точках разрыва. Мы хотим изучить более детально поведение частных сумм ряда $\sigma(f)$ в тех точках, где $f(x)$ разрывна. Начнем с изучения одного специального случая, а затем перейдем к общему.

Пусть $f(x) = x$ на $(-\pi, \pi)$ и $f(x)$ имеет период 2π. Так как $f(x)$ нечетная, то ее ряд Фурье состоит из одних синусов и (см. § 8)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx.$$

Интегрируя по частям, находим

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left.\frac{-x \cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\,dx = 2(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Итак,

$$f(x) \sim 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right].$$

Так как $f(x)$ имеет ограниченное изменение, то ее ряд Фурье всюду сходится и притом к $f(x)$ в ее точках непрерывности и к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в точках разрыва 1-го рода. Поэтому мы имеем для $x \neq \pm\pi$

$$x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots \pm \frac{\sin nx}{n} \mp \ldots\right],$$

если же $x = \pm\pi$, то ряд сходится к 0 (что очевидно и непосредственно, ибо все его члены тогда равны нулю).

Если мы сделаем замену переменного $x = \pi - t$, то когда x пробегает отрезок $[-\pi, \pi]$, переменное t будет пробегать отрезок $[0, 2\pi]$, откуда следует

$$\frac{\pi - t}{2} = \frac{\sin(\pi - t)}{1} - \frac{\sin 2(\pi - t)}{2} + \frac{\sin 3(\pi - t)}{3} - \ldots \pm \frac{\sin n(\pi - t)}{n} \mp \ldots =$$

$$= \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \ldots + \frac{\sin nt}{n} + \ldots, \qquad (41.1)$$

если $t \neq 0$ и $t \neq 2\pi$. В этих же точках ряд в правой части (41.1) сходится к нулю.

Мы уже говорили в § 30, что этот ряд будет играть большую роль во многих вопросах теории тригонометрических рядов. В § 30 было доказано, что частные суммы ряда (41.1) ограничены в совокупности, т. е. существует такая константа C, для которой

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant C, \qquad \begin{array}{l} -\infty < x < +\infty, \\ n = 1, 2, \ldots \end{array}$$

Однако для дальнейшего нам нужно изучить более детально поведение этих частных сумм в окрестности точки $x = 0$.

Имеем

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) dt = \int_0^x \left[D_n(t) - \frac{1}{2}\right] dt,$$

где, как всегда, $D_n(t)$ — ядро Дирихле. Следовательно,

$$S_n(x) = \int_0^x D_n(t)\, dt - \frac{x}{2}. \qquad (41.2)$$

Но мы знаем, что (см. (32.3))

$$D_n(t) = \frac{\sin nt}{t} + g(t) \sin nt + \frac{1}{2} \cos nt,$$

где $g(t)$ ограничена.

Полагая

$$\psi_x(t) = \begin{cases} g(t) & \text{для } 0 \leqslant t \leqslant x, \\ 0 & \text{для } x < t \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

$$\psi_x(t + 2\pi) = \psi_x(t)$$

и, пользуясь замечанием 3 к лемме § 31, заключаем отсюда, что

$$\int_0^x D_n(t)\,dt = \int_0^x \frac{\sin nt}{t}\,dt + o(1) \tag{41.3}$$

равномерно на $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; поэтому из (41.2) и (41.3)

$$S_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin nt}{t}\,dt + o(1)$$

или

$$S_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^{nx} \frac{\sin t}{t}\,dt + o(1). \tag{41.4}$$

Если

$$\psi(x) = \frac{\pi - x}{2} \qquad \text{на } 0 < x < 2\pi, \tag{41.5}$$

$$\psi(x + 2\pi) = \psi(x),$$

то функция $\psi(x)$ имеет вид, указанный на рис. 6. Мы уже видели, что ряд

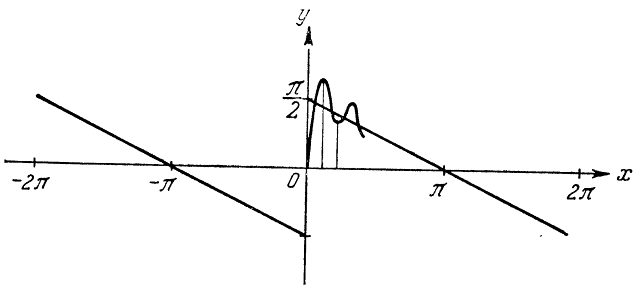

Рис. 6

(41.1) есть $\sigma(\psi)$ и он сходится всюду к $\psi(x)$, кроме точек $x = 0$ и $x = 2\pi$, где он сходится к нулю.

Заставляя x принимать значения

$$x = \frac{\pi}{n}, \ x = \frac{2\pi}{n}, \ldots, x = \pi,$$

мы видим из (41.4), что

$$\left.\begin{aligned} S_n\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{2n} &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + o(1), \\ S_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + o(1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_n\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \frac{k\pi}{2n} &= \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + o(1). \end{aligned}\right\} \tag{41.6}$$

Учитывая то, что говорилось в § 35 по поводу поведения кривой $y=\frac{\sin x}{x}$, сразу видим, что кривые $y=S_n(x)$ проходят через начало координат, колеблются около прямой $y=\psi(x)$ и хотя при любом x, $0<x<\pi$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\psi(x),$$

однако из (41.6) видно, что кривые $y=S_n(x)$ справа от точки $x=0$ сгущаются около отрезка $(0, l)$, где

$$l=\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Такая же картина наблюдается и слева от $x=0$, так как все $S_n(x)$ нечетные функции. Поэтому около точки $x=0$ кривые колеблются не между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, как можно было думать, а сгущаются около отрезка $[-l, l]$. Но вычисления показывают, что $l=1{,}8519\ldots$, а так как $\frac{\pi}{2}=1{,}57\ldots$, то длина отрезка $[-l, l]$ превосходит длину $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Это обстоятельство впервые было отмечено Гиббсом (см. Gibbs [1]) почему его принято называть *явлением Гиббса*, а отношение l к $\frac{\pi}{2}$ *константой Гиббса*; эта константа равна 1,17...

Покажем, что явление Гиббса наблюдается и для любой функции с ограниченным изменением около ее точек разрыва, если только они изолированы. Действительно, у функции с ограниченным изменением точки разрыва бывают только 1-го рода.

Пусть $f(x)$ — такая функция и x_0 — изолированная точка разрыва. Если $f(x_0+0)-f(x_0-0)=d$, то функция

$$\varrho(x)=f(x)-\frac{d}{\pi}\psi(x-x_0)$$

непрерывна в достаточно малой окрестности точки x_0, так как $\varrho(x_0\pm 0)=$ $=f(x_0\pm 0)-\frac{d}{\pi}\psi(\pm 0)$, а потому

$$\varrho(x_0+0)-\varrho(x_0-0)=d-\frac{d}{\pi}\left[\psi(+0)-\psi(-0)\right]=0.$$

Так как других точек разрыва у $f(x)$ в рассматриваемой окрестности нет, если эта окрестность была выбрана достаточно малой, то $\varrho(x)$ непрерывна в этой окрестности и имеет ограниченное изменение на $[0, 2\pi]$. Значит, ее ряд Фурье равномерно сходится в достаточно малой окрестности x_0, а потому поведение частных сумм ряда Фурье для $f(x)$ около x_0 будет такое же, как у $\frac{d}{\pi}\psi(x-x_0)$, т. е. как у $\frac{d}{\pi}\psi(x)$ около $x=0$; следовательно, явление Гиббса здесь также должно быть налицо.

В силу принципа локализации Римана (см. § 33) это же справедливо, если $f(x)\in L[-\pi, \pi]$ имеет ограниченное изменение на $[a, b]$ и x_0 — изолированная точка разрыва $f(x)$ на $[a, b]$.

§ 42. Определение величины скачка функции по ее ряду Фурье

Допустим, что в некоторой точке x функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода, причем

$$f(x+0)-f(x-0)=d. \tag{42.1}$$

Величину этого скачка можно определить из следующей формулы (см. Lukács [1]):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{S}_n(x)}{\ln n}=-\frac{d}{\pi}. \tag{42.2}$$

В самом деле, имеем

$$f(x+t)-f(x-t)=d+\varepsilon(t),\quad \text{где } \varepsilon(t)\to 0 \quad \text{при } t\to 0.$$

Но из формулы (31.9) в силу нечетности $\overline{D}_n(t)$ имеем

$$\overline{S}_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)-f(x-t)]\,\overline{D}_n(t)\,dt,$$

поэтому

$$\overline{S}_n(x)=-\frac{d}{\pi}\int_0^\pi \overline{D}_n(t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varepsilon(t)\,\overline{D}_n(t)\,dt. \tag{42.3}$$

Докажем прежде всего, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^\pi \overline{D}_n(t)\,dt=1. \tag{42.4}$$

Действительно, полагая $\nu=\left[\frac{n-1}{2}\right]$, имеем

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \overline{D}_n(t)\,dt&=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kt}{k}\Bigg|_0^\pi=2\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2\nu+1}\right)=\\&=2\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2\nu}+\frac{1}{2\nu+1}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}\right)\right]\approx\\&\approx 2\left[\ln\nu-\frac{1}{2}\ln\nu\right]=\ln\nu\approx\ln n.\end{aligned} \tag{42.5}$$

Итак, формула (42.4) доказана.

Докажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^\pi \varepsilon(t)\,\overline{D}_n(t)\,dt=0. \tag{42.6}$$

Для этого возьмем $\eta>0$ произвольно и выберем $\delta>0$ так, чтобы

$$|\varepsilon(t)|<\eta \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant\delta.$$

Тогда

$$\left|\int_0^\delta \varepsilon(t)\,\overline{D}_n(t)\,dt\right|<\eta\int_0^\delta\left|\overline{D}_n(t)\right|dt<C\eta\ln n \tag{42.7}$$

(в силу (35.18)), где C постоянно. Кроме того, так как

$$\left|\overline{D}_n(t)\right| \leqslant \frac{\pi}{\delta} \quad \text{при} \quad \delta \leqslant t \leqslant \pi \tag{42.8}$$

в силу (29.11), то

$$\int_{\delta}^{\pi} \varepsilon(t)\overline{D}_n(t)\,dt = O(1),$$

а потому из (42.7) и (42.8) следует (42.6). Из (42.3), (42.4) и (42.6) теперь следует справедливость формулы (42.2).

Следствие 1. *Во всякой точке разрыва 1-го рода ряд, сопряженный к ряду Фурье для $f(x)$, расходится.*

Действительно, в этой точке

$$\overline{S}_n(x, f) = -\frac{d}{\pi}\ln n + \varepsilon_n \ln n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$.

Следствие 2. *Если $f(x)$ непрерывна в точке x, то $\overline{S}_n(f, x) = o(\ln n)$; если $\overline{S}_n(x, f) = o(\ln n)$, то точка x не может быть точкой разрыва 1-го рода.*

Следствие 3. *Если у функции $f(x)$ коэффициенты Фурье имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, то у нее не может быть точек разрыва первого рода.*

Действительно, тогда

$$\overline{S}_n(f, x) = o\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = o(\ln n)$$

(см. Вводный материал, § 11).

Отсюда, в частности, заключаем:

Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение и коэффициенты Фурье порядка $o\left(\frac{1}{n}\right)$, то она непрерывна.

Действительно, у функции $f(x)$ с ограниченным изменением точки разрыва могут быть только 1-го рода; но в силу следствия 3 таких точек быть не может, а потому $f(x)$ непрерывна.

Однако нельзя утверждать, что если $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченное изменение, то ее коэффициенты Фурье имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$. В этом мы убедимся в § 2 главы II.

§ 43. Особенности рядов Фурье от непрерывных функций. Полиномы Фейера

Мы хотим показать, что если на функцию $f(x)$ не налагать никаких ограничений, кроме непрерывности, то ее ряд Фурье может и расходиться в некоторой точке, и сходиться неравномерно около некоторой точки, хотя он сходится всюду. Первые примеры такого рода были даны Дю-Буа-Реймоном *) и Лебегом, поэтому принято называть эти факты *особенностью Дю-Буа-Реймона* (для случая расходимости) и *особенностью Лебега* (для случая неравномерной сходимости).

Мы построим здесь, следуя Фейеру (см. Fejer [2]), некоторые тригонометрические полиномы, из которых будут строиться функции, обладающие либо одной, либо другой из этих особенностей. Впоследствии (в главе IV) те же

*) Du Bois-Reymond [1].

полиномы Фейера будут служить для построения значительно более сложных примеров, а именно: непрерывных функций, у которых ряд Фурье расходится на всюду плотном множестве, или на множестве мощности континуума, а также непрерывных функций, у которых ряд всюду сходится, но неравномерно на любом интервале δ, лежащем на $[-\pi, \pi]$.

Элементы построения. Рассмотрим два тригонометрических полинома

$$Q(x,n)=\frac{\cos nx}{n}+\frac{\cos(n+1)x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)x}{1}-$$
$$-\left[\frac{\cos(2n+1)x}{1}+\frac{\cos(2n+2)x}{2}+\ldots+\frac{\cos 3nx}{n}\right], \tag{43.1}$$
$$\bar{Q}(x,n)=\frac{\sin nx}{n}+\frac{\sin(n+1)x}{n-1}+\ldots+\frac{\sin(2n-1)x}{1}-$$
$$-\left[\frac{\sin 2n+1)x}{1}+\frac{\sin(2n+2)x}{2}+\ldots+\frac{\sin 3nx}{n}\right]. \tag{43.2}$$

Отметим следующие их свойства:

а) Существует такая константа C, что

$$\left|Q(x,n)\right|\leqslant C \quad \text{и} \quad \left|\bar{Q}(x,n)\right|\leqslant C \tag{43.3}$$

для любых x и n.

Действительно,

$$Q(x,n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2n-k)x-\cos(2n+k)x}{k}=2\sin 2nx\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k},$$
$$\bar{Q}(x,n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2n-k)x-\sin(2n+k)x}{k}=-2\cos 2nx\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}.$$

Но, как известно (см. (30.8)), мы имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant M \qquad (-\infty<x<+\infty,\ n=1,2,\ldots).$$

Поэтому, полагая $C=2M$, видим, что свойство а) доказано.

б) Если через $\varphi(x, Q)$ или $\varphi(x, \bar{Q})$ обозначим любую частную сумму полинома $Q(x)$ или $\bar{Q}(x)$ (т. е. сумму любого числа первых слагаемых в этом полиноме), то

$$\left.\begin{array}{l} |\varphi(x,Q)|\leqslant 2(1+\ln n) \\ \text{и} \\ |\varphi(x,\bar{Q})|\leqslant 2(1+\ln n), \end{array}\right\} \tag{43.4}$$

потому что

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<1+\ln n.$$

в) Если $\delta\leqslant x\leqslant\pi$, то

$$|\varphi(x,Q)|\leqslant M_\delta \quad \text{и} \quad |\varphi(x,\bar{Q})|\leqslant M_\delta, \tag{43.5}$$

где M_δ — константа, зависящая только от δ.

Действительно, всякая сумма $\varphi(x, Q)$ либо имеет вид

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{\cos(n+k)x}{n-k} \quad \text{для} \quad p \leqslant n-1,$$

либо вид

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(n+k)x}{n-k} - \sum_{k=1}^{p} \frac{\cos(2n+k)x}{k} \quad \text{для} \quad p \leqslant n.$$

Значит, каждая из сумм, входящих в выражение $\varphi(x, Q)$, имеет вид $\Sigma a_k \cos(n+k)x$, где числа a_k положительны, монотонно убывают или монотонно возрастают и притом не превосходят 1; поэтому, применяя следствие из преобразования Абеля (см. Вводный материал, § 1), мы видим, что каждая такая сумма не превосходит константы, зависящей только от δ. Это же рассуждение справедливо для $\varphi(x, \overline{Q})$, так как там все сохраняет силу, только косинусы заменены синусами.

г) Наконец, положим

$$P(x, n) = \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{1}, \tag{43.6}$$

$$\overline{P}(x, n) = \frac{\sin nx}{n} + \frac{\sin(n+1)x}{n-1} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{1}, \tag{43.7}$$

т. е. $P(x, n)$ — сумма первых n членов $Q(x, n)$, а $\overline{P}(x, n)$ — сумма первых n членов $\overline{Q}(x, n)$. Тогда мы имеем

$$P(0, n) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln n, \tag{43.8}$$

$$\overline{P}\left(\frac{\pi}{4n}, n\right) = \frac{\sin n\frac{\pi}{4n}}{n} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{4n}}{1} >$$
$$> \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}}\ln n,$$

следовательно,

$$\overline{P}\left(\frac{\pi}{4n}, n\right) > \frac{\ln n}{\sqrt{2}}. \tag{43.9}$$

Этими фактами мы воспользуемся для построения нужных примеров.

§ 44. Непрерывная функция с рядом Фурье, сходящимся всюду, но неравномерно

Пусть $a > 1$ целое, которое мы подберем позже. Положим

$$n_k = a^{k^2} \tag{44.1}$$

и обозначим

$$\overline{Q}_k(x) = \overline{Q}(x, n_k), \tag{44.2}$$

где $\overline{Q}(x, n)$ — тригонометрический полином, определенный формулой (43.2).

Положим

$$g(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \overline{Q}_k(x) \tag{44.3}$$

и докажем, что если a подобрано надлежащим образом, то $g(x)$ есть функция со свойствами, указанными в заглавии параграфа.

Действительно, в силу (43.3) для всех x и k

$$|\overline{Q}_k(x)| < C, \tag{44.4}$$

а потому ряд (44.3) сходится абсолютно и равномерно, значит $g(x)$ непрерывна. Так как при любом $a > 1$ и при $k \geqslant 2$ имеем

$$a^{k^2} > 3a^{(k-1)^2},$$

т. е. (см. (44.1))

$$n_k > 3n_{k-1},$$

то, в силу (44.2) ни при каком n член, содержащий $\sin nx$, не входит одновременно в два разных $\overline{Q}_k(x)$, поэтому в ряде (44.3) все синусы, как в обычном тригонометрическом ряде, расположены в порядке возрастания множителя n при x.

На основании леммы § 12 ряд (44.3) есть ряд Фурье от $g(x)$, поскольку его частные суммы с номерами $3n_k$ сходятся равномерно к $g(x)$.

Докажем, что частные суммы $S_n(x, g)$ ряда Фурье для $g(x)$ ограничены в своей совокупности.

Действительно, каждая такая сумма имеет вид

$$S_n(x, g) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \overline{Q}_k(x) + \frac{1}{(m+1)^2} \varphi(x, \overline{Q}_{m+1}) \tag{44.5}$$

(в частных случаях второе слагаемое суммы (44.5) может отсутствовать). Но тогда на основании (44.2) и (43.3) имеем

$$\left| \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k^2} \overline{Q}_k(x) \right| \leqslant C \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k^2} < A, \tag{44.6}$$

где A — абсолютная константа. Далее, на основании (44.2), (43.2) и (43.4) имеем

$$\left| \frac{1}{(m+1)^2} \varphi(x, \overline{Q}_{m+1}) \right| \leqslant \frac{1}{(m+1)^2} 2(1 + \ln a^{(m+1)^2}) < 2(1 + \ln a) \tag{44.7}$$

и, следовательно, из (44.5), (44.6) и (44.7)

$$|S_n(x, g)| \leqslant B \quad (n = 0, 1, \ldots; 0 \leqslant x \leqslant 2\pi), \tag{44.8}$$

где B — абсолютная константа.

Кстати заметим (это нам понадобится в главе IV), что, полагая

$$S_n(x, g) - g(x) = R_n(x, g),$$

имеем

$$|R_n(x, g)| \leqslant K \qquad (n = 1, 2, \ldots; -\pi \leqslant x \leqslant \pi), \tag{44.9}$$

где K — абсолютная константа, что вытекает из ограниченности $g(x)$ и из (44.8).

Перейдем к изучению сходимости ряда $\sigma(g)$.

Заметим сначала, что для любого $\delta > 0$ на отрезке $\delta \leqslant x \leqslant \pi$ (а значит, и $-\pi \leqslant x \leqslant -\delta$) ряд Фурье от $g(x)$ сходится равномерно.

Действительно, из той же формулы (44.5) видно, что

$$R_n(x, g) = \frac{1}{(m+1)^2} \varphi(x, \overline{Q}_{m+1}) - \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \overline{Q}_k(x),$$

а тогда из (43.3) и (43.5) следует

$$|R_n(x, g)| \leqslant C \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{M_\delta}{(m+1)^2} < \varepsilon,$$

если n, а следовательно и m, достаточно велико.

Мы видим таким образом, что ряд Фурье от $g(x)$ сходится при любом $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Но для $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ он также должен сходиться, так как состоит из одних синусов.

Нам остается доказать, что ряд $\sigma(g)$ сходится неравномерно около $x = 0$.

С этой целью рассмотрим его частные суммы с номерами

$$\nu_m = 2n_m - 1.$$

Каждая такая сумма имеет вид

$$S_{\nu_m}(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^2} \overline{Q}_k(x) + \frac{1}{m^2} \overline{P}(x, n_m),$$

поэтому

$$R_{\nu_m}(x) = S_{\nu_m}(x) - g(x) = \frac{1}{m^2} \overline{P}(x, n_m) - \sum_{m}^{\infty} \frac{1}{k^2} \overline{Q}_k(x).$$

Полагая

$$x_m = \frac{\pi}{4n_m},$$

находим из (43.3) и (43.9)

$$R_{\nu_m}(x_m) > \frac{1}{m^2} \overline{P}\left(\frac{\pi}{4n_m}, n_m\right) - C \sum_{m}^{\infty} \frac{1}{k^2} > \frac{1}{m^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln a^{m^2} - \frac{C}{m} = \frac{\ln a}{\sqrt{2}} - C > 1,$$

если только выбрать a так, чтобы

$$\ln a > \sqrt{2}(1 + C).$$

Итак,

$$R_{\nu_m}(x_m) > 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{44.10}$$

для некоторой последовательности точек x_m, стремящихся к 0, а это и значит, что ряд Фурье от $g(x)$ сходится неравномерно около $x = 0$.

Теорема доказана.

§ 45. Непрерывная функция с рядом Фурье, расходящимся в одной точке (пример Фейера)

Мы рассмотрим полиномы Фейера $Q(x, n)$, введенные в § 43, и, пользуясь ими, будем строить ряды Фурье от непрерывных функций, расходящиеся при $x = 0$; при этом будем получать по желанию ряды, имеющие либо ограниченные, либо неограниченные частные суммы. Те и другие примеры будут позже (в главе IV) использованы для построений более сложного характера.

Возьмем сначала, как и в предыдущем параграфе,

$$n_k = a^{k^2},$$

где a — целое и $a \geqslant 2$; положим

$$Q_k(x) = Q(x, n_k) \tag{45.1}$$

и пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_k(x). \tag{45.2}$$

Мы видим снова, как в предыдущем параграфе, что $f(x)$ непрерывна, и ряд (45.2), если в нем рассматривать каждый член всякого полинома $Q_k(x)$ отдельно (а не группировать их в суммы), есть ее ряд Фурье.

Мы видим, так же как при доказательстве (44.8), что

$$|S_n(x, f)| \leqslant B \tag{45.3}$$

для любых n и x и что ряд $\sigma(f)$ сходится равномерно на $(-\pi \leqslant x \leqslant -\delta)$ и $(\delta \leqslant x \leqslant \pi)$, т. е. сходится при любом $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Но при $x = 0$ он расходится, так как, полагая

$$\nu_m = 2n_m - 1, \quad \mu_m = 3n_{m-1},$$

имеем

$$S_{\nu_m}(0) - S_{\mu_m}(0) = \frac{P(0, n_m)}{m^2} > \frac{\ln n_m}{m^2} = \frac{m^2 \ln a}{m^2} = \ln a > 0, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, не выполнен критерий сходимости Коши.

Итак, $\sigma(f)$ расходится при $x = 0$, хотя его частные суммы ограничены в своей совокупности в силу (45.3).

Если бы вместо $n_k = a^{k^2}$ мы положили бы

$$n_k = a^{k^3} \qquad (a > 2),$$

то получили бы

$$S_{\nu_m}(0) - S_{\mu_m}(0) = \frac{P(0, n_m)}{m^2} > \frac{m^3 \ln a}{m^2} = m \ln a,$$

т. е. ряд не только расходился бы в точке $x = 0$, но и имел бы в этой точке неограниченные частные суммы.

§ 46. Расходимость в одной точке (пример Лебега)

Предыдущие примеры Фейера (см. § 45) хотя и удобны для дальнейших построений, но они обладают одним недостатком: так как соответствующие функции построены чисто аналитическим путем, при помощи формул, то не удается их изобразить кривыми и понять геометрически, почему произошла расходимость ряда Фурье.

Поэтому мы изложим здесь пример Лебега (лишь слегка измененный для сокращения доказательства), где функцию уже можно, хотя бы приблизительно, изобразить графически.

Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ — последовательность целых чисел, которые мы подберем позже. Положим

$$a_0 = 1, \quad a_k = n_1 n_2 \ldots n_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Обозначим

$$I_k = \left(\frac{\pi}{a_k}, \frac{\pi}{a_{k-1}}\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Выберем позже последовательность чисел c_k, пока будем предполагать только $c_k \downarrow 0$.

Пусть

$$f(x) = c_k \sin a_k x \qquad \text{на} \qquad I_k,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(-x) = f(x).$$

Ясно, что $f(x)$ определена всюду на $[-\pi, \pi]$, она непрерывна на каждом I_k и обращается в 0 в его концах, т. е. не имеет разрывов и в конечных точках; наконец, $f(x) \to 0$ при $x \to 0$ (рис. 7) в силу $c_k \downarrow 0$, и,значит, $f(x)$ непрерывна всюду.

Покажем, что ее ряд Фурье сходится всюду на $[-\pi, \pi]$, кроме $x = 0$. Так как $f(x)$ имеет лишь конечное число максимумов и минимумов на $[\delta, \pi]$, то она имеет ограниченное изменение на этом отрезке (также и на

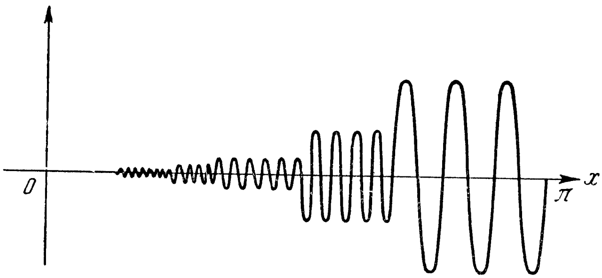

Рис. 7

$[-\pi, -\delta]$). Значит, ее ряд Фурье сходится в каждой точке $[-\pi, \pi]$, кроме $x = 0$.

Покажем, что при надлежащем подборе чисел c_k и n_k ряд $\sigma(f)$ расходится при $x = 0$.

Как известно, для любой $f(x)$ имеем

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1),$$

значит, при $x = 0$

$$S_n(0, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1).$$

Наша $f(x)$ четная, поэтому

$$S_n(0, f) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1). \tag{46.1}$$

Покажем, что при надлежащем подборе c_k и n_k имеем

$$J_k = \int_{0}^{\pi} f(t) \frac{\sin a_k t}{t} dt \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{46.2}$$

Если так, то $S_{a_k}(0, f) \to +\infty$ при $k \to \infty$ (как видно из (46.1)), и тогда ряд $\sigma(f)$ расходится при $x = 0$.

Чтобы оценить J_k, мы разобьем его на три слагаемых

$$J_k = \int_{0}^{\frac{\pi}{a_k}} f(t) \frac{\sin a_k t}{t} dt + \int_{\frac{\pi}{a_k}}^{\frac{\pi}{a_{k-1}}} f(t) \frac{\sin a_k t}{t} dt + \int_{\frac{\pi}{a_{k-1}}}^{\pi} f(t) \frac{\sin a_k t}{t} dt = J_k' + J_k'' + J_k'''. \tag{46.3}$$

Имеем

$$\left| \frac{\sin a_k t}{t} \right| \leqslant a_k.$$

Значит,

$$(J_k') \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{a_k}} |f(t)|\, a_k \frac{\pi}{a_k} = \pi c_{k+1} = o(1), \tag{46.4}$$

так как $c_k \downarrow 0$.

До сих пор мы не определелили еще чисел c_k и n_k. Мы предположим теперь, что $n_1 = 2$, $c_1 = 1$. Если $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ и $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ уже определены, то $f(t)$ определена на $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}$, т. е. на $\left(\frac{\pi}{a_{k-1}}, \pi\right]$. Она на этом полуинтервале непрерывна, а $t \geqslant \frac{\pi}{a_{k-1}}$, поэтому $\frac{f(t)}{t}$ ограничена. Следовательно, если n достаточно велико, то

$$\int_{\frac{\pi}{a_{k-1}}}^{\pi} \frac{f(t)}{t} \sin nt\, dt$$

может быть сделан как угодно малым (см. § 19).

Так как $a_k = n_1 n_2 \ldots n_k$, то при $n_1, \ldots, n_{k-1}$ уже фиксированных, n_k еще в нашем распоряжении и, значит, увеличивая его, мы можем сделать a_k как угодно большим, в частности таким, что

$$\left| J_k''' \right| \leqslant \left| \int_{\frac{\pi}{a_{k-1}}}^{\pi} f(t) \frac{\sin a_k t}{t} dt \right| < \frac{1}{k}, \tag{46.5}$$

откуда следует, что $J_k''' = o(1)$ при $k \to \infty$.

Остается оценить J_k''. Имеем

$$J_k'' = \int_{\frac{\pi}{a_k}}^{\frac{\pi}{a_{k-1}}} c_k \sin a_k t \frac{\sin a_k t}{t} dt = \frac{c_k}{2} \int_{\frac{\pi}{a_k}}^{\frac{\pi}{a_{k-1}}} \frac{1 - \cos 2a_k t}{t} dt =$$

$$= \frac{c_k}{2} \ln n_k - \frac{c_k}{2} \int_{\frac{\pi}{a_k}}^{\frac{\pi}{a_{k-1}}} \frac{\cos 2a_k t}{t} dt.$$

Но по второй теореме о среднем, учитывая, что $\frac{1}{t}$ положительно и монотонно убывает на интервале интегрирования, находим

$$\left| \int_{\frac{\pi}{a_k}}^{\frac{\pi}{a_{k-1}}} \frac{\cos 2a_k t}{t} dt \right| \leqslant \frac{a_k}{\pi} \left| \int_{\frac{\pi}{a_k}}^{\xi} \cos 2a_k t\, dt \right| \leqslant \frac{a_k}{\pi} \frac{2}{2a_k} = \frac{1}{\pi}.$$

Поэтому из $c_k \to 0$ следует

$$J_k'' = \frac{1}{2} c_k \ln n_k + o(1),$$

откуда, в силу (46.4) и (46.5),

$$J_k = \frac{1}{2} c_k \ln n_k + o(1).$$

Мы можем теперь положить хотя бы $c_k = \frac{1}{\sqrt{\ln n_k}}$, тогда $c_k \downarrow 0$ и

$$J_k = \frac{1}{2}\sqrt{\ln n_k} + o(1) \qquad \text{при} \quad k \to \infty .$$

Таким образом, доказательство завершено.

Из рис. 7 видно, что функция $f(x)$ по мере приближения x к нулю совершает все более и более частые колебания; таким образом, наглядно обнаруживается, что расходимость ряда $\sigma(f)$ при $x = 0$ вызвана тем, что $f(x)$ имеет в окрестности этой точки неограниченное изменение.

З а м е ч а н и е. Впоследствии (в главе V, § 22) нам будет нужен пример непрерывной функции, у которой ряд Фурье сходится к нулю всюду на $[0, 2\pi]$, вне некоторого отрезка $[a, b]$, сходится в каждой точке (a, b) и расходится либо только в a, либо только в b, либо в обоих концах интервала (a, b), и притом имеет в точках расходимости неограниченные частные суммы (будем говорить кратко: неограниченно расходится). Все такие примеры легко получить, отправляясь от построенного примера Лебега.

Действительно, если положить

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad [-\pi, 0], \\ f(x) & \text{на} \quad [0, \pi], \end{cases}$$

то

$$S_n(0, \varphi) = \frac{1}{2} S_n(0, f),$$

а потому $\sigma(\varphi)$ неограниченно расходится при $x = 0$; кроме того, $\sigma(\varphi)$ сходится на $0 < x \leqslant \pi$ и сходится к нулю на $(-\pi, 0)$, что вытекает из принципа локализации (см. § 33). Если положить

$$\varphi_a(x) = \varphi(x - a),$$

то получим функцию, для которой $\sigma(\varphi_a)$ расходится при $x = a$, сходится к нулю на $[a - \pi, a]$ и сходится на $(a, a + \pi]$.

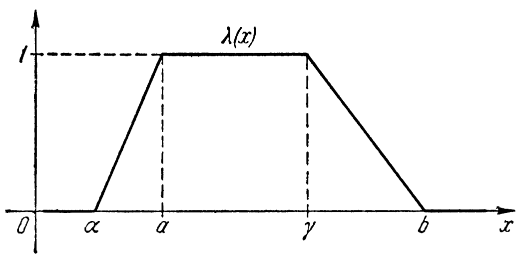

Рис. 8

Функция $\Psi(x) = \varphi(-x)$ имеет ряд Фурье, сходящийся всюду, кроме $x = 0$, где он неограниченно расходится, и, кроме того, этот ряд сходится к нулю при $0 < x \leqslant \pi$.

Поэтому

$$\Psi_b(x) = \Psi(x - b)$$

имеет ряд, сходящийся всюду, кроме $x = b$, где он неограниченно расходится, причем он сходится к нулю на $(b, b + \pi)$.

Пусть теперь $0 < a < b < 2\pi$. Построим $\lambda(x)$ следующим образом. Выберем точки α и γ так, чтобы $0 < \alpha < a < \gamma < b$ и пусть

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{на} \quad (a, \gamma), \\ 0 & \text{вне} \quad (\alpha, b), \end{cases}$$

$\lambda(x)$ интерполируется линейно на (α, a) и (γ, b) (рис. 8).

По теореме Штейнгауза (§ 34) ряд $\sigma(\lambda\varphi_a)$ является равносходящимся с $\lambda(x)\,\sigma(\varphi_a)$, а потому он сходится всюду, кроме $x = a$, где он неограниченно расходится, причем вне $[a, b)$ он всюду сходится к нулю (либо в силу $\lambda(x) = 0$, либо в силу $\varphi_a(x) = 0$).

Совершенно также, если через $\lambda^*(x)$ обозначить функцию, равную 1 на (γ, b), равную 0 вне (α, β) и интерполируемую линейно на (α, γ) и (b, β), где

$$0 < \alpha < \gamma < b < \beta < 2\pi,$$

то мы увидим, что $\sigma(\lambda^*\Psi_b)$ является равносходящимся с $\lambda^*(x)\sigma(\Psi_b(x))$, а потому он расходится неограниченно при $x = b$, сходится всюду, кроме $x = b$ и сходится к нулю вне $(\alpha, b]$.

Наконец, полагая

$$F(x) = \lambda\varphi_a(x) + \lambda^*\Psi_b(x),$$

мы увидим, что $F(x)$ непрерывна и $\sigma(f)$ расходится неограниченно при $x = a$ и $x = b$, а всюду в других точках сходится, и притом сходится к нулю всюду вне $[a, b]$.

Замечание. Коэффициенты Фурье у тех рядов, которые мы строили в §§ 45 и 46, стремились к нулю по довольно сложному закону. В связи с решением некоторых задач из теории интегральных уравнений возникла проблема: можно ли найти такую непрерывную четную функцию $f(x)$, у которой

$$\sigma(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{где} \quad |a_n| \downarrow 0$$

и притом $\sigma(f)$ расходится при $x = 0$. Салем (см. Salem [14]) дал утвердительный ответ на этот вопрос. Мы не будем приводить здесь доказательства, так как оно основано на изучении некоторых теоретико-числовых неравенств, которые увели бы нас слишком далеко от материала этой книги.

§ 47. Суммирование ряда Фурье методом Фейера

Мы видели, что даже ряды Фурье от непрерывных функций имеют точки расходимости (§§ 45 и 46). Возникает вопрос, в какой мере ряд Фурье может тогда быть использован для вычисления значений функции $f(x)$? Здесь естественно, как всегда, когда встречаются с расходящимися рядами, прибегнуть к тем или иным методам суммирования.

Напомним (см. Вводный материал, § 6), что функциональный ряд называется *суммируемым методом* $(C, 1)$, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x),$$

где

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x), \tag{47.1}$$

а $S_n(x)$ — частные суммы ряда.

Применение этого метода к рядам Фурье принято называть *суммированием методом Фейера*, так как Фейер первый обратил внимание на целесообразность использования чезаровских сумм в этом случае и доказал основную теорему. Позже она была обобщена Лебегом.

Мы знаем (см. (31.3)), что частная сумма $S_n(x)$ ряда Фурье от функции $f(x)$ выражается формулой

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t-x)\, dt,$$

где $D_n(u)$ — ядро Дирихле. Поэтому чезаровская сумма, определяемая (47.1), должна иметь вид

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_n(t-x)\,dt, \tag{47.2}$$

где

$$K_n(u) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(u). \tag{47.3}$$

Следовательно,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,K_n(u)\,du. \tag{47.4}$$

Функция $K_n(u)$ называется *ядром Фейера;* мы сейчас найдем для нее удобное выражение.

Так как

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{\cos nu - \cos(n+1)u}{4\sin^2\frac{u}{2}},$$

то

$$K_n(u) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos ku - \cos(k+1)u}{4\sin^2\frac{u}{2}} = \frac{1-\cos(n+1)u}{(n+1)\,4\sin^2\frac{u}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2.$$

Итак,

$$K_n(u) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2. \tag{47.5}$$

Из этого выражения выведем сразу ряд свойств ядра.

1) $K_n(u) \geqslant 0$.

Это свойство в дальнейшем играет существенную роль.

2) Имеем

$$K_n(u) \leqslant \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{u}{2}} \leqslant \frac{\pi^2}{2(n+1)u^2} \quad \text{для} \quad 0 < |u| \leqslant \pi, \tag{47.6}$$

а потому

$$K_n(u) = O\left(\frac{1}{nu^2}\right) \quad \text{для} \quad 0 < |u| \leqslant \pi \tag{47.7}$$

и

$$K_n(u) \leqslant \frac{\pi^2}{2(n+1)\delta^2} \quad \text{для} \quad 0 < \delta \leqslant |u| \leqslant \pi, \tag{47.8}$$

откуда при любом $\delta > 0$, полагая

$$M_n(\delta) = \max_{\delta \leqslant u \leqslant \pi} K_n(u),$$

имеем

$$\lim_{n\to\infty} M_n(\delta) = 0. \tag{47.9}$$

3) Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(u)\,du = 1. \tag{47.10}$$

Это вытекает из (47.3) и из

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_k(u)\,du = 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

4) Если $\delta > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(u)\,du = 1. \tag{47.11}$$

Это сразу следует из (47.9) и (47.10).

Опираясь на эти свойства, мы сможем доказать следующую теорему, касающуюся суммирования рядов Фурье методом Фейера.

Теорема Фейера. *Если x есть точка непрерывности функции $f(x)$ или точка разрыва первого рода, то в этой точке $\sigma(f)$ суммируется методом Фейера соответственно к $f(x)$ или к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$; если (a, b) есть интервал, где $f(x)$ непрерывна, то $\sigma(f)$ равномерно суммируем методом Фейера к $f(x)$ во всяком отрезке $[\alpha, \beta]$, лежащем внутри интервала (a, b).*

Наконец, если $f(x)$ всюду непрерывна, то ее ряд Фурье равномерно суммируем методом Фейера на $[-\pi, \pi]$, т. е. $\sigma_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на этом отрезке.

Для доказательства этой теоремы мы будем опираться на лемму, которая окажется полезной и в других случаях.

Лемма. *Пусть*

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\Psi_n(t)\,dt, \tag{47.12}$$

где функция $\Psi_n(t)$ обладает следующими свойствами:

1) $\Psi_n(t)$ — *четная функция;*

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Psi_n(t)|\,dt \leqslant C \qquad (n = 1, 2, \ldots)$, *где C — постоянно;*

3) *полагая для $\delta > 0$*

$$M_n(\delta) = \sup_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} |\Psi_n(t)|,$$

имеем

$$\lim_{n\to\infty} M_n(\delta) = 0;$$

4) $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(t)\,dt = 1.$

Тогда: если x — точка разрыва первого рода для $f(x)$, то

$$f_n(x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

$f_n(x) \to f(x)$ в каждой точке непрерывности $f(x)$.

Если $f(x)$ непрерывна на (a, b), то $f_n(x) \to f(x)$ равномерно на $[\alpha, \beta]$ для любого $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Для доказательства леммы заметим сначала, что из свойства 4) функции $\Psi_n(t)$ имеем

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\Psi_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+0)+f(x-0)]\,\Psi_n(t)\,dt \tag{47.13}$$

в силу четности $\Psi_n(t)$. Из (47.12) и четности $\Psi_n(t)$ заключаем

$$f_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\,\Psi_n(t)\,dt. \tag{47.14}$$

Поэтому из (47.13) и (47.14)

$$f_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]\,\Psi_n(t)\,dt. \tag{47.15}$$

Покажем, что интеграл в правой части (47.15) стремится к нулю при $n\to\infty$ и притом, если $f(x)$ непрерывна в (a, b), то стремится равномерно на $[\alpha, \beta]$ при $a<\alpha<\beta<b$. С этой целью выберем число δ так, чтобы

$$\left.\begin{aligned}&|f(x+t)-f(x+0)|<\varepsilon,\\&|f(x-t)-f(x-0)|<\varepsilon\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant\delta. \tag{47.16}$$

Это возможно для всякого фиксированного x; если же $f(x)$ непрерывна на (a, b) (в этом случае $f(x+0)=f(x-0)=f(x)$), то можно выбрать δ так, чтобы оно не зависело от x, $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ и неравенства (47.16) были справедливы. Выбрав так δ, разобьем интеграл формулы (47.15) на два: интеграл I_1 по интервалу $(0, \delta)$ и интеграл I_2 по интервалу (δ, π). Имеем на основании (47.16)

$$|I_1|<2\varepsilon\int_0^{\pi}|\Psi_n(t)|\,dt<2\varepsilon C$$

в силу свойства 2) функции $\Psi_n(t)$.

Для I_2 находим

$$|I_2|\leqslant M_n(\delta)\int_{\delta}^{\pi}\{|f(x+t)|+|f(x+0)|+|f(x-t)|+|f(x-0)|\}\,dt. \tag{47.17}$$

При постоянном x интеграл в (47.17) конечен, а множитель перед ним стремится к нулю в силу свойства 3) функций $\Psi_n(t)$, значит, $I_2\to 0$. Кроме того, если $x\in[\alpha, \beta]\subset(a, b)$, то интеграл в (47.17) при любом x не превосходит

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt+2\pi|f(x)|,$$

а так как $f(x)$ непрерывна на (a, b) и, следовательно, ограничена на $[\alpha, \beta]$, то $I_2\to 0$ равномерно. Лемма полностью доказана.

Для того чтобы вывести из этой леммы сформулированную выше теорему Фейера, достаточно доказать, что ядро Фейера удовлетворяет свойствам, указанным в лемме; тогда, полагая $f_n(x) = \sigma_n(x)$, придем к нужному заключению.

Но свойство 1) для ядер Фейера выполнено; 3) и 4) нами были доказаны (см. (47.9) и (47.10)), а 2) следует из того, что для ядер Фейера

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = \pi$$

в силу $K_n(t) \geqslant 0$ и свойства 3). Итак, теорема Фейера полностью доказана.

§ 48. Следствия теоремы Фейера

Из теоремы Фейера можно вывести ряд интересных следствий. Прежде всего она дает новое доказательство классической теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции тригонометрическим полиномом (см. § 27).

Действительно, так как мы убедились, что для непрерывной $f(x)$ функции $\sigma_n(x)$ равномерно стремятся к $f(x)$, то, выбрав n достаточно большим, можем утверждать, что

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Но $\sigma_n(x)$ есть, очевидно, тригонометрический полином, а потому теорема доказана.

Далее заметим, что метод $(C, 1)$ регулярен (см. Вводный материал, § 6), т. е. сходимость ряда к числу S влечет его суммируемость методом $(C, 1)$ к тому же числу S. Отсюда сразу следует, что:

Если $\sigma(f)$ сходится в точке непрерывности функции $f(x)$, то он сходится именно к $f(x)$; аналогично, в точке разрыва 1-го рода, если $\sigma(f)$ сходится, то непременно к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Наконец, фейеровские суммы позволяют в некоторых случаях составить суждение и об обыкновенных частных суммах ряда Фурье. Так, например, можно доказать теорему:

Для функции $f(x)$ с ограниченным изменением частные суммы ряда $\sigma(f)$ ограничены в своей совокупности.

Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что, если

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \tag{48.1}$$

то для фейеровских сумм имеем также

$$m \leqslant \sigma_n(x) \leqslant M, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi. \tag{48.2}$$

Действительно, принимая во внимание положительность ядра Фейера, мы из формулы (47.4) и из (48.1) сразу находим, что

$$m\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt \leqslant \sigma_n(x) \leqslant M\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt,$$

а тогда формула (47.10) сразу показывает справедливость нашего утверждения.

Заметив это, сравним теперь $\sigma_n(x)$ и $S_n(x)$. Мы имеем (см. Вводный материал, § 6)

$$S_n(x) - \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k\,(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{48.3}$$

Отсюда следует

$$|S_n(x)-\sigma_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k(|a_k|+|b_k|).$$

Но если $f(x)$ с ограниченным изменением, то, как мы знаем (см. § 22),

$$|a_k|\leqslant\frac{V}{K}\quad\text{и}\quad|b_k|\leqslant\frac{V}{K},$$

где V — полное изменение $f(x)$; поэтому

$$|S_n(x)-\sigma_n(x)|\leqslant 2V,$$

откуда

$$2V-M\leqslant S_n(x)\leqslant 2V+M. \tag{48.4}$$

Формула (48.4) не только доказывает ограниченность в совокупности частных сумм ряда Фурье для функции с ограниченным изменением, но и указывает границы, в которых они заключены, в зависимости от границ этой функции и ее полного изменения.

Замечание. Мы видели (см. (48.1) и (48.2)), что если $f(x)$ заключена между m и M на отрезке длины 2π, то и $\sigma_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ на этом отрезке заключены между m и M. Для дальнейшего нам будет полезно оценить $\sigma_n(x)$, зная только границы $f(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$. Докажем, что

Если

$$m\leqslant f(x)\leqslant M\quad\textit{на}\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

то для любого $\delta>0$ найдется такое N_0 (зависящее от δ), что

$$m-\delta\leqslant\sigma_n(x)\leqslant M+\delta\quad\textit{при}\quad n\geqslant N_0(\delta),\quad a+\delta\leqslant x\leqslant b-\delta. \tag{48.5}$$

Действительно, из (47.4) находим

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}f(x+u)K_n(u)\,du+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+u)K_n(u)\,du+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}f(x+u)K_n(u)\,du=I_n'+I_n''+I_n'''. \tag{48.6}$$

В силу (47.7)

$$I_n'=O\left(\frac{1}{n}\right)\int_{-\pi}^{-\delta}|f(x+u)|\,du=O\left(\frac{1}{n}\right)\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|\,du=o(1) \tag{48.7}$$

и такое же заключение имеет место для I_n'''.

Для оценки I_n'' заметим, что если $a+\delta\leqslant x\leqslant b-\delta$ и $|u|\leqslant\delta$, то $x+u\in[a, b]$, а тогда

$$m\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(u)\,du\leqslant I_n''\leqslant M\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(u)\,du.$$

Но мы знаем (47.11), что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(u)\,du=1.$$

Значит, можно выбрать N_0 (зависящее от δ) столь большим, чтобы, например, иметь

$$m-\frac{\delta}{3}\leqslant I_n''\leqslant M+\frac{\delta}{3},\quad n\geqslant N_0,$$

и, кроме того (см. (48.7)),

$$|I_n'| \leqslant \frac{\delta}{3} \quad \text{и} \quad |I_n'''| < \frac{\delta}{3},$$

откуда в силу (48.6) видим, что (48.5) доказано.

§ 49. Теорема Фейера—Лебега

Теорема Фейера, доказанная в § 47, дает возможность судить о суммируемости ряда $\sigma(f)$ лишь в тех точках, где $f(x)$ либо непрерывна, либо имеет разрывы 1-го рода. Однако произвольная суммируемая функция может не иметь ни одной точки указанного типа. Лебег обобщил результат Фейера и доказал следующую теорему.

Теорема Фейера — Лебега. *Для любой суммируемой функции $f(x)$ ряд $\sigma(f)$ суммируется почти всюду методом Фейера к $f(x)$.*

Для доказательства теоремы положим

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \tag{49.1}$$

и

$$\Phi_x(t) = \int_0^t |\varphi_x(u)|\, du. \tag{49.2}$$

Докажем, что ряд $\sigma(f)$ суммируется методом Фейера к $f(x)$ во всякой точке x, где

$$\Phi_x(t) = o(t). \tag{49.3}$$

Для этого заметим (см. § 47), что

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]\, K_n(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_x(t)\, K_n(t)\, dt \tag{49.4}$$

и докажем, что при выполнении (49.3) интеграл в правой части (49.4) стремится к нулю. С этой целью заметим, что

$$|K_n(t)| \leqslant 2n \quad (n \geqslant 1), \tag{49.5}$$

так как

$$|D_k(t)| \leqslant k + \frac{1}{2} < 2n \qquad \text{для любого} \quad k \leqslant n,$$

а

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t).$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi_x(t)\, K_n(t)\, dt\right| \leqslant \frac{2n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \left|\varphi_x(t)\right| dt = \frac{2n}{\pi}\,\Phi_x\left(\frac{1}{n}\right) = o(1) \tag{49.6}$$

в силу (49.3).

Далее, в силу (47.6)

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \varphi_x(t)\, K_n(t)\, dt\right| \leqslant \frac{\pi}{2n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \left|\varphi_x(t)\right| \frac{dt}{t^2}. \tag{49.7}$$

В интеграле правой части (49.7) произведем интегрирование по частям; получим, опять опираясь на (49.3) (см. Вводный материал, § 11),

$$\frac{\pi}{2n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}|\varphi_x(t)|\,\frac{dt}{t^2}=\frac{\pi}{2n}\left[\frac{\Phi_x(\pi)}{\pi^2}-\frac{\Phi_x\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right]+\frac{2\pi}{2n}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}\Phi_x(t)\,\frac{dt}{t^3}=$$

$$=o(1)+\frac{1}{n}\,o\left(\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{dt}{t^2}\right)=o(1). \qquad (49.8)$$

Из (49.6) и (49.8) в силу (49.4) вытекает

$$\sigma_n(x)-f(x)=o(1)$$

в каждой точке, где выполнено (49.3).

Нам остается убедиться, что условие (49.3) имеет место почти всюду. Но в § 15 Вводного материала было отмечено, что это соотношение выполняется во всякой точке Лебега, следовательно, почти всюду.

Теорема Фейера—Лебега доказана.

В качестве следствия получаем следующую важную теорему.

Если $\sigma(f)$ сходится на некотором множестве E, $mE>0$, то его сумма равна $f(x)$ почту всюду на E.

Действительно, мы знаем, что метод $(C, 1)$ регулярен. Поэтому в точке, где $\sigma(f)$ имеет некоторую сумму S, он должен суммироваться к тому же числу S методом Фейера. Но так как методом Фейера он суммируется к $f(x)$ почти всюду, то множество точек из E, где сумма ряда $\sigma(f)$ отлична от $f(x)$, имеет меру нуль.

Замечание. Мы видели, что ряд $\sigma(f)$ суммируется методом Фейера во всякой точке Лебега. Известно, что в этих точках $f(x)$ есть производная своего неопределенного интеграла. Можно поставить вопрос, должен ли ряд $\sigma(f)$ суммироваться методом Фейера в такой точке, где это последнее условие выполнено. Лебег (см. Lebesgue [1]) показал, что это уже не должно иметь места, однако здесь имеет место суммируемость $(C, 2)$.

§ 50. Оценка частных сумм ряда Фурье

В § 49 мы показали, что в точках, где выполнено условие

$$\Phi_x(h)=\int\limits_0^h|f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|\,du=o(h) \qquad (50.1)$$

ряд $\sigma(f)$ суммируется методом Фейера. Было также отмечено, что условие (50.1) выполняется почти всюду. Сейчас мы хотим оценить рост частных сумм $S_n(x)$ в этих точках.

Покажем, что во всякой точке x, где выполнено (50.1), имеем

$$S_n(x)=o(\ln n). \qquad (50.2)$$

Следовательно, оценка (50.2) также справедлива почти всюду.

Мы видели (см. (37.9)), что

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}[f(x+u)+f(x-u)-2f(x)]\,\frac{\sin nu}{u}\,du+o(1), \qquad (50.3)$$

где $o(1)$ стремится к нулю, а δ — любое положительное фиксированное число. Полагая $\varphi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)$, имеем

$$\int_0^\delta |\varphi(x)| \left| \frac{\sin nu}{u} \right| du = \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(u)| \frac{\sin nu}{u} du + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\varphi(u)| \left| \frac{\sin nu}{u} \right| du \leqslant$$

$$\leqslant n \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(u)| du + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\varphi(u)| \frac{1}{u} du. \qquad (50.4)$$

Но из (50.1)

$$\Phi_x(h) = \int_0^h |\varphi(u)| du, \qquad (50.5)$$

поэтому (индекс x пока, для краткости, опускаем)

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(u)| du = \Phi\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (50.6)$$

и

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\varphi(u)| \frac{du}{u} = \left. \frac{\Phi(t)}{t} \right|_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\Phi(t)}{t^2} dt. \qquad (50.7)$$

Из (50.4), (50.6) и (50.7) следует

$$\int_0^\delta |\varphi(u)| \left| \frac{\sin nu}{u} \right| du \leqslant$$

$$\leqslant n\Phi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\Phi(\delta)}{\delta} + n\Phi\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\Phi(t)}{t^2} dt = O(1) + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\Phi(t)}{t^2} dt. \qquad (50.8)$$

Если при заданном $\varepsilon > 0$ выбрать δ так, чтобы $\Phi(t) < \varepsilon t$ для $0 \leqslant t \leqslant \delta$, что возможно в силу (50.1), то

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\Phi(t)}{t^2} dt < \varepsilon \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t} = \varepsilon \ln n\delta = o(\ln n), \qquad (50.9)$$

поскольку ε как угодно мало. Но $o(1)$ также есть $o(\ln n)$, поэтому из (50.3), (50.8) и (50.9) находим

$$|S_n(x) - f(x)| = o(\ln n).$$

Но так как x фиксировано, то $f(x)$ постоянно, т. е. $|f(x)| = o(\ln n)$ и окончательно

$$S_n(x) = o(\ln n),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. В § 36 было доказано, что для ограниченной функции, а значит для непрерывной, имеем при всех x и $n > 1$

$$|S_n(x)| \leqslant CM \ln n \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

если $|f(x)| \leqslant M$ (C — абсолютная константа). Если $f(x)$ непрерывна, то условие (50.1) выполняется, и даже равномерно, а потому для непрерывных функций ранее найденная оценка заменяется более сильной: вместо $O(\ln n)$ появляется $o(\ln n)$.

§ 51. Множители сходимости

Принято говорить, что числа $\{\mu_n\}$ являются *множителями сходимости* для некоторого ряда

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

на отрезке $[a, b]$, если ряд

$$\sum u_n(x)\,\mu_n$$

сходится почти всюду на $[a, b]$.

Результаты §§ 49 и 50 позволяют доказать, что в качестве множителей сходимости для ряда Фурье на $[-\pi, \pi]$ могут быть выбраны числа

$$\mu_n = \frac{1}{\ln n}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

(μ_0 и μ_1 можно взять как угодно), т. е. имеет место

Теорема. *Если a_k и b_k — коэффициенты Фурье ($k = 1, 2, \ldots$), то ряд*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{\ln k}$$

сходится почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Для доказательства заметим, что в § 50 было доказано $S_n(x) = o(\ln n)$ почти всюду. Поэтому в силу того, что последовательность μ_n выпукла (определение и свойства выпуклых последовательностей даны в § 3 Вводного материала), то остается, полагая $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, применить теорему 6 (см. Добавления, § 12).

§ 52. Сравнение ядер Дирихле и Фейера

Мы знаем (см. §§ 45 и 46), что существуют непрерывные функции, у которых ряд Фурье расходится в некоторой точке. С другой стороны, для любой непрерывной функции $f(x)$ ряд $\sigma(f)$ суммируется к $f(x)$ во всякой точке (см. § 47).

Мы хотим объяснить, почему происходит такое явление, а для этого сравним ядра Дирихле и Фейера. Как известно,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t - x)\, dt \tag{52.1}$$

и

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, K_n(t - x)\, dt, \tag{52.2}$$

где $D_n(u)$ — ядро Дирихле, а $K_n(u)$ — ядро Фейера.

Если в точке x_0 ряд $\sigma(f)$ сходится к $f(x)$, то это значит, что $S_n(x_0) \to f(x_0)$; если он суммируется методом Фейера к $f(x)$, то $\sigma_n(x_0) \to f(x_0)$.

Естественно поэтому поставить вопрос так: пусть $f(x)$ непрерывна и

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\Phi_n(t-x)\,dt, \tag{52.3}$$

где $\Phi_n(u)$ — некоторая функция, которую мы также будем называть ***ядром***; спросим себя, от каких свойств этого ядра зависит равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

или существование таких точек x_0, где $f_n(x_0)$ не стремится к $f(x_0)$ или вообще не стремится ни к какому пределу?

Прежде чем ответить на этот вопрос, покажем, что и проблема сходимости ряда Фурье по произвольной ортогональной системе приводит к задаче того же типа, а потом будем решать обе эти задачи вместе.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — некоторая ортонормированная система на (a, b). Желая изучить сходимость ряда Фурье от некоторой функции $f(x)$ по этой системе, мы рассматриваем частную сумму этого ряда, т. е.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

иначе говоря,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) \int_a^b f(t)\,\varphi_k(t)\,dt = \int_a^b f(t)\left[\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\,\varphi_k(x)\right] dt.$$

Полагая

$$\Phi_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\,\varphi_k(x),$$

мы назовем функцию $\Phi_n(t, x)$ ядром системы $\{\varphi_n(x)\}$. Мы имеем

$$S_n(x) = \int_a^b f(t)\,\Phi_n(t, x)\,dt. \tag{52.4}$$

Лебег первый обратил внимание на важность изучения поведения функций вида

$$\varrho_n(x) = \int_a^b |\Phi_n(t, x)|\,dt, \tag{52.5}$$

которые теперь обычно называют «*функциями Лебега*» для заданной системы. Роль этих функций в вопросе о сходимости ряда Фурье станет совершенно ясной, если доказать теорему (см. Lebesgue[2]).

Т е о р е м а. *Если для некоторой точки x_0 последовательность $\varrho_n(x_0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ неограничена, то существует непрерывная функция $f(x)$, для которой ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ неограниченно расходится в точке x_0.*

Эта теорема будет мгновенно доказана, если мы установим справедливость следующего более общего предложения:

Л е м м а. *Пусть*

$$f_n(x, f) = \int_a^b f(t)\,\Phi_n(t, x)\,dt, \tag{52.6}$$

где $\Phi_n(t, x)$ при каждом фиксированном x суммируема по переменному t, а $f(t)$ ограничена. Тогда, если

$$\varlimsup_{n\to\infty} \varrho_n(x_0) = +\infty, \tag{52.7}$$

то найдется непрерывная функция $f(x)$, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x_0, f)| = +\infty. \tag{52.8}$$

Действительно, прежде всего, полагая при заданном n

$$g(t) = \operatorname{sign} \Phi_n(t, x_0),$$

имеем

$$f_n(x_0, g) = \int_a^b g(t)\, \Phi_n(t, x_0)\, dt = \int_a^b |\Phi_n(t, x_0)|\, dt = \varrho_n(x_0). \tag{52.9}$$

Значит, существует для всякого n такая функция $g(t)$, что $|g(t)| \leqslant 1$ и для нее

$$f_n(x_0, g) = \varrho_n(x_0). \tag{52.10}$$

Если бы это была одна и та же функция $g(t)$ для всех n и если бы она была непрерывна, то теорема была бы уже доказана, так как в силу (52.7) мы имели бы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x_0, g)| = +\infty.$$

Поэтому прежде всего позаботимся о том, чтобы заменить $g(t)$ непрерывной функцией $g^*(t)$, для которой $f_n(x_0, g^*)$ «велико», а затем будем переходить от разных функций для разных n к одной функции.

Подберем сначала для заданного n непрерывную $g^*(t)$ так, чтобы для $f_n(x, g^*)$ иметь

$$f_n(x_0, g^*) \geqslant \frac{1}{2} \varrho_n(x_0). \tag{52.11}$$

Для этого достаточно взять такое ε, что

$$\int_E |\Phi_n(t, x_0)|\, dt \leqslant \frac{1}{4} \varrho_n(x_0), \tag{52.12}$$

если $mE < \varepsilon$, что возможно, так как при фиксированных n и x_0 функция под знаком интеграла есть суммируемая функция от t, а потому ее интеграл как угодно мал, если множество, по которому интегрируют, имеет достаточно малую меру. В силу C-свойства мы можем найти непрерывную функцию $g^*(t)$, совпадающую с $g(t)$ на совершенном множестве P, $mP > (b - a) - \varepsilon$, и такую, что $|g^*(t)| \leqslant 1$. Тогда для нее в силу (52.6)

$$f_n(x_0, g^*) = \int_a^b g^*(t)\, \Phi_n(t, x_0)\, dt.$$

Из (52.12) следует, что

$$\begin{aligned} |f_n(x_0, g^*) - f_n(x_0, g)| &= \left| \int_{CP} [g^*(t) - g(t)]\, \Phi_n(t, x_0)\, dt \right| \leqslant \\ &\leqslant 2 \int_{CP} |\Phi_n(t, x_0)|\, dt \leqslant \frac{1}{2} \varrho_n(x_0) \end{aligned} \tag{52.13}$$

и, значит, из (52.9) и (52.13) вытекает (52.11).

Обозначим для каждого n через $g_n(t)$ функцию, которая обладает свойствами:

а) $g_n(t)$ непрерывна,

б) $|g_n(t)| \leqslant 1$,

в) $f_n(x_0, g_n) > \frac{1}{2} \varrho_n(x_0)$.

Мы уже видели, что такую функцию для каждого n построить можно. Пусть теперь ε_n — последовательность чисел таких, что

$$\varepsilon_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty, \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k \leqslant \frac{1}{6} \varepsilon_n \tag{52.14}$$

(например, можно взять $\varepsilon_n = \frac{1}{7^n}$); пусть n_k — возрастающая последовательность целых чисел, которые мы подберем позже. Тогда, полагая

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k g_{n_k}(x), \tag{52.15}$$

мы видим, что $f(x)$ непрерывна, так как $g_n(x)$ непрерывны и все $|g_n(x)| \leqslant 1$ и $\sum \varepsilon_k < +\infty$, а значит, ряд (52.15) сходится равномерно. Ясно, что

$$f_n(x_0, f) = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k g_{n_k}(t) \Phi_n(t, x_0)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \int_a^b g_{n_k}(t) \Phi_n(t, x_0)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k f_n(x_0, g_{n_k}).$$

Здесь почленное интегрирование законно в силу равномерной сходимости ряда (52.15).

Покажем теперь, что при разумном подборе чисел n_k будем иметь

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x_0, f)| = +\infty. \tag{52.8}$$

Если хотя бы для одной из функций $g_m(x)$ имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x_0, g_m)| = +\infty,$$

то теорема уже доказана. Допустим, что этого нет. Обозначим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x_0, g_m)| = \gamma_m. \tag{52.16}$$

Выберем по индукции числа n_k так, чтобы

$$\varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0) \to \infty \tag{52.17}$$

и

$$\sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p \gamma_{n_p} \leqslant \frac{1}{12} \varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0). \tag{52.18}$$

Это возможно, так как $\{\varrho_n(x_0)\}$ неограничена в силу (52.7) и, значит, числа n_k можно подобрать так, чтобы $\varrho_{n_k}(x_0) \to \infty$ и притом достаточно быстро для того, чтобы условия (52.17) и (52.18) были удовлетворены. Так как

$$\left| f_n\left(x_0, \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p g_{n_p}\right) \right| = \left| \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p f_n(x_0, g_{n_p}) \right| < 2 \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p \gamma_{n_p}$$

при $n \to \infty$ в силу (52.16), то можно взять n_k столь большим, что

$$\left| f_{n_k}\left(x_0, \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p g_{n_p}\right) \right| < 2 \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p \gamma_{n_p} \leqslant \frac{1}{6} \varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0) \tag{52.19}$$

в силу (52.18).

С другой стороны,

$$\left| f_{n_k}\left(x_0, \sum_{p=k+1}^{\infty} \varepsilon_p g_{n_p}\right) \right| < \sum_{p=k+1}^{\infty} \varepsilon_p \varrho_{n_k}(x_0) \leqslant \frac{1}{6} \varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0), \tag{52.20}$$

потому что $|g_{n_p}(x)| \leqslant 1$, а значит,

$$\left|\int_a^b g_{n_p}(t)\,\Phi_{n_k}(t, x_0)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |\Phi_{n_k}(t, x_0)|\,dt = \varrho_{n_k}(x_0)$$

и, кроме того, имеем (52.14).

Отсюда в силу свойства в) функций $g_n(x)$, (52.19) и (52.20)

$$\left|f_{n_k}(x_0, f)\right| \geqslant f_{n_k}(x_0, \varepsilon_k g_{n_k}) - \left|f_{n_k}\left(x_0, \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p g_{n_p}\right)\right| - \left|f_{n_k}\left(x_0, \sum_{k+1}^{\infty} \varepsilon_p g_{n_p}\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0) - \frac{1}{6}\varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0) - \frac{1}{6}\varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0) \geqslant \frac{1}{6}\varepsilon_k \varrho_{n_k}(x_0),$$

а это стремится к $+\infty$ при $k \to \infty$ в силу (52.17). Значит, (52.8) справедливо и лемма доказана*).

Отсюда немедленно вытекает и справедливость формулированной выше теоремы Лебега. Действительно, если в доказанной лемме роль $\Phi_n(t, x)$ играет ядро заданной ортогональной системы, то $f_n(t, f)$ превращается в частную сумму ряда Фурье от $f(x)$ по этой системе (в силу (52.4)) и (52.3)), а потому, если в некоторой точке выполнено (52.7), то найдется непрерывная $f(x)$ с расходящимся в этой точке рядом Фурье. Таким образом теорема Лебега доказана.

Рассмотрим теперь специально случай тригонометрической системы. Если ее нормировать, т. е. взять систему

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots,$$

то роль ее ядра должна играть функция

$$\Phi_n(t, x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt}{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) = \frac{1}{\pi} D_n(t-x),$$

а потому функции Лебега (см. (52.5)) имеют вид

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t-x)|\,dt.$$

Но в силу периодичности $D_n(u)$ имеем

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt,$$

т. е. функции Лебега не зависят от x и превращаются в ранее рассмотренные нами константы Лебега L_n (см. § 35). Но мы знаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = +\infty$

*) Так как при умножении $f(t)$ на некоторую константу $f_n(x, f)$ умножится на ту же константу в силу (52.6), то можно всегда найти $f(x)$, удовлетворяющую условиям леммы, и такую, что $|f(t)| \leqslant 1$. Это замечание не понадобится для теоремы Лебега, но будет использовано позже в главе IV.

(потому что $L_n \approx \frac{4}{\pi^2} \ln n$), и поэтому теперь мы видим, что существование непрерывных функций с рядами Фурье, расходящимися в некоторой точке, объясняется именно тем, что константы Лебега неограниченно растут с ростом n. Заметим еще, что так как

$$\varrho_n(x) = L_n$$

при любом x, то можно для любой точки x найти непрерывную $f(x)$ с рядом Фурье, расходящимся в этой точке.

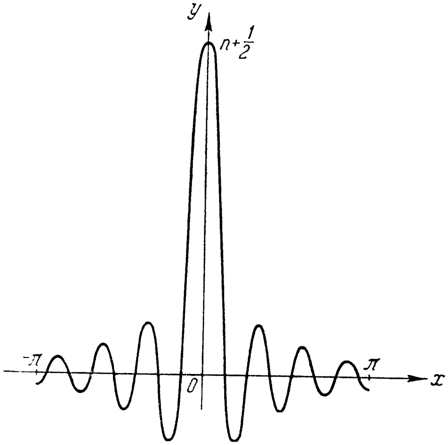

Рис. 9

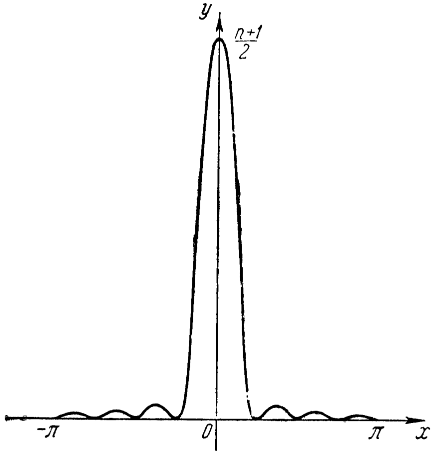

Рис. 10

Теперь вернемся к вопросу о суммируемости ряда Фурье методом Фейера. Сравнивая формулы (52.5) и (52.2), мы видим, что если бы для

$$\varrho_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t-x)|\, dt$$

хотя бы при одном значении x_0 было выполнено (52.7), то можно было бы найти непрерывную $f(x)$, для которой $\sigma_n(x, f)$ не стремилось бы ни к какому конечному пределу при $n \to \infty$, т. е. $\sigma(f)$ был бы несуммируем методом Фейера в этой точке. Но в силу периодичности $K_n(u)$ и его положительности имеем

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt,$$

а тогда в силу свойства 3) ядер Фейера (см. § 47)

$$\varrho_n(x) \equiv 1$$

для всех n и x. Таким образом, для ядра Фейера выполнение (52.7) ни в какой точке невозможно.

В § 2 главы VII мы увидим, почему метод Фейера применим почти всюду (теорема Фейера—Лебега, § 49), тогда как существуют всюду расходящиеся ряды Фурье (глава V, § 20) — это также результат разного поведения ядер Фейера и Дирихле.

Заканчивая этот параграф, мы считаем целесообразным изобразить геометрически ядра Дирихле и Фейера (см. рис. 9 и 10).

§ 53. Суммирование рядов Фурье методом Абеля—Пуассона

Укажем здесь еще один классический и очень важный метод суммирования рядов Фурье. Для этого напомним (см. Вводный материал, § 7), что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ называется суммируемым методом Абеля в точке x_0 к числу S, если при всяком r, $0 \leqslant r < 1$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0) r^n$ сходится и, полагая

$$S(x_0, r) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0) r^n,$$

имеем

$$\lim_{r \to 1} S(x_0, r) = S.$$

Пуассон применил этот метод суммирования к рядам Фурье, поэтому указанный метод, когда его прилагают к тригонометрическим рядам, обычно называют *методом Пуассона или Абеля—Пуассона*.

Так как мы знаем (см. Вводный материал, § 7), что метод Абеля сильнее метода $(C, 1)$, то из теорем Фейера и Фейера—Лебега (см. §§ 47 и 49) мгновенно следует

Теорема. *Для любой суммируемой $f(x)$ ряд $\sigma(f)$ суммируется почти всюду методом Абеля—Пуассона к этой функции $f(x)$; он суммируется к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ во всякой точке разрыва 1-го рода и к $f(x)$ во всякой точке непрерывности.*

Может показаться, что после этих теорем уже больше нечего сказать о суммировании рядов Фурье методом Пуассона; однако мы увидим в § 55 и § 56, что можно получить гораздо более глубокие результаты. Сначала выведем те вспомогательные формулы, которые нам будут для этого нужны.

Для произвольного тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{53.1}$$

назовем «пуассоновскими суммами» функции

$$f(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n, \tag{53.2}$$

когда ряд в правой части (53.2) сходится. В случае, когда ряд (53.1) есть ряд Фурье от некоторой функции $f(x)$, эти функции можно выразить через $f(x)$ в интегральной форме, подобно тому, как это делалось для частных сумм и фейеровских сумм ряда Фурье. Этим мы займемся в следующем параграфе. Далее в § 57 воспользуемся полученными результатами для решения одной важной задачи, называемой проблемой Дирихле.

§ 54. Ядро Пуассона и интеграл Пуассона

Прежде всего найдем удобное выражение для $f(r, x)$, если (53.1) есть $\sigma(f)$. Имеем

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt,$$

а потому

$$f(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t - x)\, dt.$$

Но так как $0 \leqslant r < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(t - x)$ при фиксированном r сходится равномерно относительно t, а потому по теореме Лебега (Вводный материал, § 14) его можно почленно интегрировать даже после умножения на $f(x)$; поэтому

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(t - x)\right] dt. \tag{54.1}$$

Найдем теперь более простое выражение для ряда, стоящего в квадратных скобках в (54.1). Пусть

$$P(r, \alpha) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\alpha.$$

Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

и положим $z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$. Если $|z| = r < 1$, то этот ряд сходится и

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} + \frac{z}{1 - z} = \frac{1 + z}{2(1 - z)} = \frac{1 - r^2 + 2ir \sin\alpha}{2[1 - 2r\cos\alpha + r^2]}.$$

Но, с другой стороны,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Поэтому, отделяя действительные и чисто мнимые части, найдем

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\alpha = \frac{1 - r^2}{2[1 - 2r\cos\alpha + r^2]}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\alpha = \frac{r \sin\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2}.$$

Итак, мы установили, что

$$P(r, \alpha) = \frac{1 - r^2}{2[1 - 2r\cos\alpha + r^2]}. \tag{54.2}$$

Это выражение принято называть *ядром Пуассона*, а выражение

$$Q(r, \alpha) = \frac{r \sin\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2} \tag{54.3}$$

сопряженным с ним ядром.

Для всего дальнейшего будет очень важен тот факт, что ядро Пуассона при $0 \leqslant r < 1$ есть положительная величина (как и ядро Фейера). В самом деле, так как

$$1 - r^2 > 0 \text{ и } 1 - 2r\cos\alpha + r^2 = (1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\alpha}{2} > 0,$$

то $P(r, \alpha) > 0$ при $0 \leqslant r < 1$.

Вернемся к формуле (54.1). Имеем

$$f(r,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,P(r,t-x)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\,dt. \quad (54.4)$$

Интеграл в правой части (54.4) называется *интегралом Пуассона*.

Очень важно уяснить себе геометрический смысл ядра Пуассона (см. рис. 11). С этой целью возьмем на плоскости круг с центром в начале координат и радиусом 1; если через точку M с полярными координатами (r, ω) провести радиус и взять перпендикуляр к нему, то, обозначая через Q одну из точек его пересечения с окружностью, найдем

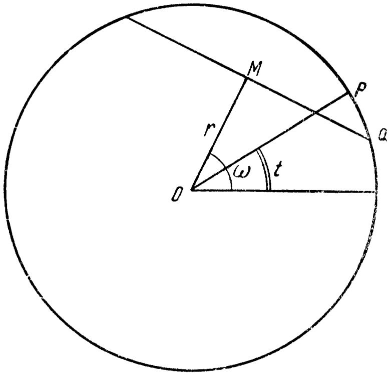

Рис. 11

$$\overline{MQ}^2 = 1 - r^2.$$

Если P — точка с полярными координатами $(1, t)$, то

$$\overline{MP}^2 = 1 - 2r\cos(\omega - t) + r^2,$$

а потому

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\omega-t)+r^2}=\left(\frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}\right)^2.$$

Таким образом, мы снова видим, что ядро Пуассона есть положительная величина, а интеграл Пуассона можно записать в виде

$$f(r,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}\right)^2 dt.$$

Теорему § 53 можно было бы высказать так: если точка $M(r, \omega)$ стремится к точке $P(1, \omega)$, т. е. к точке окружности, лежащей на одном радиусе с ней, то почти для всех значений ω имеем

$$f(r,\omega)\to f(\omega) \quad \text{при} \quad r\to 1$$

и это верно, в частности, для всех тех ω, где $f(\omega)$ непрерывна. Но мы хотим показать, что имеет место значительно более общее предложение. К этому сейчас и переходим.

§ 55. Поведение интеграла Пуассона в точках непрерывности функции

Докажем следующую теорему Фату (см. Fatou[1]).

Т е о р е м а. *Если $f(\omega)$ непрерывна в некоторой точке $P(1, \omega_0)$, то для интеграла Пуассона*

$$f(r,\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,P(r,\omega-t)\,dt \quad (55.1)$$

имеем

$$f(r,\omega)\to f(\omega_0)$$

как бы точка $M(r, \omega)$ ни стремилась к $P(1, \omega_0)$, лишь бы она оставалась внутри окружности радиуса 1.

Прежде всего отметим следующие свойства ядра Пуассона:
а) $P(r, t) \geqslant 0$ при любом t и $0 \leqslant r < 1$.
б) Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, t)\, dt = 1 .$$

Действительно, из (54.4), полагая $f(t) \equiv 1$, найдем

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, t-\omega)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, t)\, dt. \tag{55.2}$$

в) Если $|t| \geqslant \delta$, то имеем

$$m(r, \delta) = \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} P(r, t) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 1. \tag{55.3}$$

Действительно,

$$1 - 2r\cos t + r^2 \geqslant 1 - 2r\cos\delta + r^2 \qquad \text{при} \qquad \delta \leqslant |t| \leqslant \pi,$$

а потому

$$0 \leqslant P(r, t) \leqslant \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\delta + r^2)},$$

что и доказывает наше утверждение.

Отсюда и из б) сразу следует для любого $\delta > 0$

г)
$$\lim_{r\to 1}\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} P(r, t)\, dt = 1. \tag{55.4}$$

Действительно, в силу четности $P(r, t)$ имеем из б)

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} P(r, t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} P(r, t)\, dt + \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} P(r, t)\, dt,$$

а последний интеграл не превосходит $\frac{2}{\pi}\, m(r, \delta)$.

Теперь для доказательства теоремы заметим сначала, что, умножив (55.2) на $f(\omega_0)$, имеем

$$f(\omega_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega_0)\, P(r, t-\omega)\, dt.$$

Вычитая это равенство из (55.1), находим

$$f(r, \omega) - f(\omega_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(\omega_0)]\, P(r, t-\omega)\, dt. \tag{55.5}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем δ так, чтобы

$$|f(t) - f(\omega_0)| < \varepsilon \qquad \text{при} \qquad |t - \omega_0| < \delta, \tag{55.6}$$

и разобьем интеграл (55.5) на три: по интервалу $\omega_0 - \delta < t < \omega_0 + \delta$ и по интервалам $(-\pi < t < \omega_0 - \delta)$ и $(\omega_0 + \delta < t < \pi)$. Имеем в силу положительности ядра Пуассона, (55.6) и (55.2)

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta} [f(t) - f(\omega_0)]\, P(r, t-\omega)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta} P(r, t-\omega)\, dt < \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t-\omega)\, dt = \varepsilon .$$

Что же касается интегралов по остальным интервалам, то на них $|t - \omega| \geqslant \delta$, а потому в силу (55.3) можно добиться, чтобы

$$P(r, t-\omega) < \varepsilon ,$$

если только r взять достаточно близко к 1. Тогда каждый из этих интегралов по модулю не превосходит

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\, |f(t)| + |f(\omega_0)|\,]\, dt ,$$

т. е. может быть сделан как угодно малым.

Теорема доказана.

§ 56. Поведение интеграла Пуассона в общем случае

Мы убедились в § 55, что если $f(\omega)$ непрерывна при $\omega = \omega_0$, то интеграл Пуассона стремится к $f(\omega_0)$ каким бы путем точка $M(r, \omega_0)$ ни стремилась к точке $P(1, \omega_0)$ (оставаясь внутри единичной окружности).

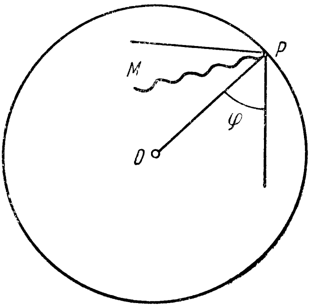

Рис. 12

В случае, когда $f(\omega)$ не является непрерывной при $\omega = \omega_0$, дело обстоит сложнее. Однако и здесь можно получить хорошие результаты, если только устремлять M к P не по каким угодно, а только по некасательным к окружности путям. Это значит, что мы разрешаем точке M двигаться к P, оставаясь все время внутри некоторого угла величины $2\varphi < \pi$ с биссектрисой, совпадающей с OP (см. рис. 12).

Прежде чем изучать поведение интеграла Пуассона в общем случае, докажем одну теорему Фату, касающуюся поведения частной производной от $f(r, \omega)$ по ω.

Т е о р е м а 1. *Если $f(\omega)$ имеет в точке $P(1, \omega_0)$ конечную производную, то*

$$\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega} \to f'(\omega_0) ,$$

если точка $M(r, \omega) \to P(1, \omega_0)$ по любому некасательному пути.

Чтобы убедиться в этом, докажем сначала лемму:

Л е м м а 1. *Пусть $f(u)$ имеет ограниченную производную $f'(\omega)$ на некотором интервале (ω', ω'') и пусть $f'(\omega)$ непрерывна в некоторой точке ω_0 этого интервала. Тогда*

$$\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega} \to f'(\omega_0) ,$$

когда $M(r, \omega) \to P(1, \omega_0)$ как угодно, лишь бы она оставалась внутри единичной окружности.

Мы имеем из (55.1)

$$\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\partial P(r, t-\omega)}{\partial \omega} dt. \tag{56.1}$$

Так как

$$\frac{\partial P(r, u)}{\partial u} = \frac{-(1-r^2)\, 2r \sin u}{[1 - 2r\cos u + r^2]^2}, \tag{56.2}$$

то $\frac{\partial P(r, u)}{\partial u}$ есть нечетная функция, отрицательная или равная нулю на $[0, \pi]$, причем для любого $\delta > 0$ имеем

$$\max_{\delta \leqslant |u| \leqslant \pi} \left| \frac{\partial P(r, u)}{\partial u} \right| \leqslant \frac{2(1-r^2)}{[1 - 2r\cos\delta + r^2]^2} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 1. \tag{56.3}$$

Выберем δ так, чтобы $(\omega_0 - \delta, \ \omega_0 + \delta)$ содержался внутри (ω', ω'') и разобьем интеграл (56.1) на два по интервалу $(\omega_0 - \delta, \ \omega_0 + \delta)$ и по оставшейся части окружности. Во втором интеграле при любом $\varepsilon > 0$, как только M станет достаточно близкой к P, множитель $\frac{\partial P(r, t-\omega)}{\partial \omega}$ в силу (56.3) станет по модулю меньше ε, а значит, весь этот интеграл будет не превосходить $\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$. Что же касается первого интеграла, то, интегрируя по частям, имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta} f(t) \frac{\partial P(r, t-\omega)}{\partial \omega} dt = -\frac{1}{\pi} \int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta} f(t) \frac{\partial P(r, t-\omega)}{\partial t} dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi} [f(t) P(r, t-\omega)] \Big|_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta} + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta} f'(t) P(r, t-\omega)\, dt.$$

Здесь обынтегрированный член стремится к нулю, когда $M \to P$, потому что ядро Пуассона стремится к 0, а $f(t)$ ограничена, что же касается интеграла, то его можно рассматривать как интеграл Пуассона от функции, равной $f'(t)$ на $(\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta)$ и нулю на оставшейся части окружности; эта функция, по предположению, непрерывна при $\omega = \omega_0$, а потому, на основании результатов предыдущего параграфа, этот интеграл стремится к $f'(\omega_0)$, как бы M ни стремилось к P.

Таким образом наше утверждение относительно $\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega}$ справедливо, и лемма 1 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1. Следовательно, мы теперь откажемся от гипотезы, что $f'(\omega)$ непрерывна в ω_0, а ограничимся тем, что она существует и конечна; зато будем рассматривать движение по некасательным путям.

Для простоты рассуждений предположим $\omega_0 = 0$ и $f(0) = f'(0) = 0$ (это не уменьшает общности, так как можно было бы рассмотреть вместо $f(\omega)$ функцию $f_1(\omega) = f(\omega) - f(0) - \omega f'(0)$ и изучить для нее поведение интеграла Пуассона).

Итак, мы должны доказать, что если $f(0) = f'(0) = 0$, то

$$\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega} \to 0, \tag{56.4}$$

если $M(r, \omega) \to P(1, 0)$ по любому некасательному пути.

Прежде всего заметим, что в силу наших условий имеем $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$, а потому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что

$$\left| \frac{f(t)}{t} \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |t| \leqslant \delta \tag{56.5}$$

Для дальнейшего удобно считать $\delta < \frac{\pi}{2}$.

Пусть $\Psi(t) = 0$ на $(-\delta, \delta)$, $\Psi(t) = f(t)$ на $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$ и $\Psi(t + 2\pi) = \Psi(t)$. Ясно тогда, что, обозначая через $\Psi(r, \omega)$ ее интеграл Пуассона, имеем

$$\frac{\partial \Psi(r, \omega)}{\partial \omega} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(t) \frac{\partial P(r, t - \omega)}{\partial \omega} dt. \tag{56.6}$$

С другой стороны, так как $\Psi(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1 на $(-\delta, \delta)$ и $\Psi'(0) = 0$, то $\frac{\partial \Psi(r, \omega)}{\partial \omega} \to 0$, когда $M(r, \omega) \to P(1, 0)$ как угодно. Отсюда следует, что интеграл в правой части (56.6) стремится к нулю, а потому из (56.1) следует, что (56.4) будет иметь место, если мы убедимся, что интеграл

$$I = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(t) \frac{\partial P(r, t - \omega)}{\partial \omega} dt$$

может быть сделан меньше $C\varepsilon$, где C постоянное. Но в силу (56.5) имеем

$$|I| < \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| t \frac{\partial P(r, t - \omega)}{\partial \omega} \right| dt.$$

Мы сейчас докажем, что выражение

$$Q = t \frac{\partial P(r, t - \omega)}{\partial \omega} \tag{56.7}$$

остается ограниченным на $-\delta \leqslant t \leqslant \delta$, когда точка $M(r, \omega) \to P(1, 0)$ по любому некасательному пути.

Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что на основании (56.2)

$$|Q| = |t| \frac{|2r \sin(t - \omega)\ (1 - r^2)|}{|e^{it} - re^{i\omega}|^2} \leqslant \frac{2|t|\,|\sin(t - \omega)|}{|e^{it} - re^{i\omega}|^2}.$$

Так как

$$|e^{it} - re^{i\omega}| = |e^{i(t-\omega)} - r| \geqslant |\sin(t - \omega)|,$$

потому что модуль комплексного числа не меньше модуля его мнимой части, то

$$|Q| \leqslant \frac{2|t|}{|e^{it} - re^{i\omega}|}.$$

Кроме того, заметим, что $\delta \leqslant \frac{\pi}{2}$, а потому $|t| \leqslant \frac{\pi}{2} |\sin t|$, откуда

$$|Q| \leqslant \pi \frac{|\sin t|}{|e^{it} - re^{i\omega}|}. \tag{56.8}$$

Мы можем ограничиться рассмотрением случая $-\frac{\pi}{2} \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}$, поскольку $M(r, \omega) \to P(1, 0)$. Рис. 13 выполнен для $\omega > 0$, но случай $\omega < 0$ рассматривается совершенно аналогично.

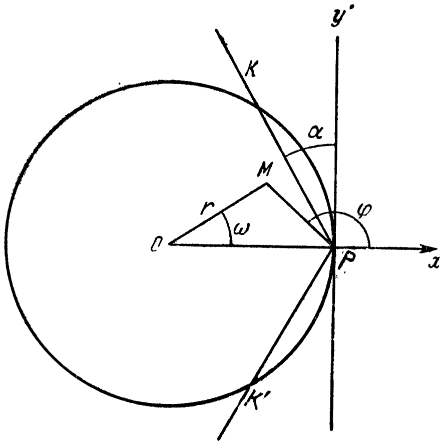

Рис. 13

Так как речь будет идти о некасательных путях, то существует угол KPK' с вершиной в P и биссектрисой OP такой, что точка M при своем приближении к P не может выйти из этого угла. Обозначая $\alpha = KPy'$, где Py' параллель к оси Oy, проходящая через P, видим, что вектор PM образует с положительным направлением оси абсцисс угол φ, где $\varphi \geqslant \frac{\pi}{2} + \alpha$ (если $\omega < 0$, то будем иметь $\varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi - \alpha$). Отсюда ясно, что $re^{i\omega} = 1 + \varrho e^{i\varphi}$, где ϱ — длина вектора MP и $\frac{\pi}{2} + \alpha \leqslant \varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi - \alpha$, т. е. $\alpha \leqslant \varphi - \frac{\pi}{2} \leqslant \pi - \alpha$.

Таким образом,

$$\varrho e^{i\varphi} = \varrho e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = i\varrho e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = i\varrho e^{i\Psi},$$

где $\alpha \leqslant \Psi \leqslant \pi - \alpha$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left| e^{it} - re^{i\omega} \right| &= \left| e^{it} - 1 - i\varrho e^{i\Psi} \right| = \left| \frac{e^{it} - 1}{i} e^{-i\Psi} - \varrho \right| = \\ &= \left| \frac{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}{2i} \, 2e^{i\left(\frac{t}{2} - \Psi\right)} - \varrho \right| = \left| 2\sin\frac{t}{2} e^{i\left(\frac{t}{2} - \Psi\right)} - \varrho \right| \geqslant \\ &\geqslant 2 \left| \sin\frac{t}{2} \sin\left(\frac{t}{2} - \Psi\right) \right|. \end{aligned} \tag{56.9}$$

(Здесь снова пользуются тем, что модуль комплексного числа не меньше модуля его мнимой части.)

Теперь из (56.8) и (56.9) заключаем

$$|Q| \leqslant \pi \frac{|\sin t|}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right| \left|\sin\left(\frac{t}{2} - \Psi\right)\right|} \leqslant \frac{\pi}{\left|\sin\left(\frac{t}{2} - \Psi\right)\right|}.$$

Если $|t| < \alpha$, то $\left|\sin\left(\frac{t}{2} - \Psi\right)\right| \geqslant \sin\frac{\alpha}{2}$ и тогда

$$|Q| \leqslant \frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

т. е. Q ограничено. Если же $\delta \geqslant |t| \geqslant a$, то при $M(r, \omega) \to P(1, 0)$ знаменатель в (56.8) ограничен снизу, значит $|Q|$ снова ограничено. Этим заканчивается доказательство теоремы 1.

Пользуясь доказанной теоремой 1, мы можем теперь получить результат, касающийся поведения интеграла Пуассона для любой суммируемой функции $f(x)$. Именно мы докажем следующую теорему, также принадлежащую Фату:

Теорема 2. *Во всякой точке ω_0, где $f(\omega)$ является производной от своего неопределенного интеграла, интеграл Пуассона $f(\omega, r) \to f(\omega_0)$, если точка $M(r, \omega)$ стремится к точке $P(1, \omega_0)$, следуя по любому некасательному пути.*

В частности, отсюда следует, что *ряд Фурье от любой суммируемой функции суммируется методом Пуассона к этой функции почту всюду**).

Чтобы убедиться в этом, положим

$$F(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} f(t)\, dt.$$

Имеем, интегрируя по частям

$$f(r, \omega) = \frac{1}{\pi}\left[F(t) P(r, t - \omega)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \frac{\partial}{\partial t}\left[P(r, t - \omega)\right] dt.$$

Обынтегрированный член стремится к нулю, когда $M \to P(1, \omega_0)$, если только $\omega \neq -\pi$ и $\omega \neq \pi$. Что касается интеграла, то его можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) P(r, t - \omega)\, dt\right\} = \frac{\partial}{\partial \omega} F(r, \omega), \tag{56.10}$$

а потому на основании только что полученного результата, если $M(r, \omega) \to P(1, \omega_0)$ по некасательному пути, то выражение (56.10) стремится к $F'(\omega_0)$ всюду, где $F'(x)$ существует и конечна. Следовательно, во всякой точке, где $f(\omega_0) = F'(\omega_0)$, имеем $f(r, \omega) \to f(\omega_0)$, а это и требовалось доказать.

Так как из теории интеграла Лебега известно, что равенство $F'(\omega) = f(\omega)$ имеет место почти всюду, то отсюда, в частности, вытекает, что почти для всех значений ω

$$f(r, \omega') \to f(\omega),$$

когда $M(r, \omega') \to P(1, \omega)$ по любому некасательному пути. Тем более это имеет место, когда $M(r, \omega) \to P(1, \omega)$ при $r \to 1$, откуда видно, что теорема § 53 есть следствие теоремы Фату.

Мы теперь укажем на роль, которую играет интеграл Пуассона при решении знаменитой проблемы Дирихле.

§ 57. Проблема Дирихле

Эта проблема была поставлена Дирихле в следующей форме: дан замкнутый контур и функция $f(x)$, непрерывная на нем. Требуется найти функцию, гармоническую**) внутри этого контура и стремящуюся к заданным на

*) Более того, он суммируется почти всюду к $f(x)$ методом A^* (см. определение A^* в § 7 Вводного материала).

**) То есть удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

контуре значениям, когда точка любым способом стремится изнутри к периферии.

Рассмотрим тот частный случай, когда рассматриваемый контур есть окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Если обозначим через x и y декартовы координаты точки $M(r, \omega)$, то будем иметь

$$F(x, y) = f(r, \omega) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega) r^n,$$

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье для $f(x)$, и, следовательно, $F(x, y)$ есть действительная часть аналитической внутри круга радиуса 1 функции, определяемой степенным рядом

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) z^n, \quad z = re^{i\omega}.$$

Но известно, что действительная (и мнимая) часть всякой аналитической функции есть функция гармоническая, значит, теорема § 55 позволяет утверждать, что функция $F(x, y)$ дает решение задачи Дирихле для круга.

Если расширить постановку задачи Дирихле, не требуя уже того, чтобы значения функции, заданные на границе, определяли непрерывную функцию, но при этом позволять точке стремиться изнутри к периферии лишь по некасательным путям, то $F(x, y)$ стремится к $f(\omega)$ почти всюду и, таким образом, дает решение обобщенной проблемы Дирихле.

§ 58. Суммирование методом Пуассона продифференцированного ряда Фурье

Пусть

$$\sigma(F) = \frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos nx + B_n \sin nx. \tag{58.1}$$

Мы знаем, что ряд

$$\sum n (B_n \cos nx - A_n \sin nx), \tag{58.2}$$

полученный от дифференцирования (58.1), вовсе не должен быть рядом Фурье, так как его коэффициенты

$$a_n = nB_n \quad \text{и} \quad b_n = -nA_n$$

даже не должны стремиться к нулю. Поэтому к ряду (58.2) нельзя применять предыдущие теоремы. Но имеет место следующая

Теорема Фату. *Если в некоторой точке x функция $F(x)$ имеет симметрическую производную, равную числу l, то, продифференцировав ряд $\sigma(F)$, получим ряд, который в точке x суммируется к числу l методом Пуассона.*

Так как симметрической производной называется $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$, если этот предел существует, то по условию теоремы

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = l. \tag{58.3}$$

Полагая, как всегда

$$F(r, x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) r^n,$$

можем написать

$$\frac{\partial F(r,x)}{\partial x}=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos nx-A_n\sin nx)\,r^n. \tag{58.4}$$

Здесь почленное дифференцирование законно, так как при $r<1$ ряд (58.4) сходится равномерно относительно x. Нам надо доказать, что

$$\frac{\partial F(r,x)}{\partial x}\to l \quad \text{при} \quad r\to 1.$$

Но

$$\frac{\partial F(r,x)}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\,\frac{\partial P(r,t-x)}{\partial x}\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\,\frac{\partial P(r,t-x)}{\partial t}\,dt, \tag{58.5}$$

а так как $\dfrac{\partial P(r,u)}{\partial u}$ есть функция нечетная (см. (56.2)), то

$$\frac{\partial F(r,x)}{\partial x}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x+u)\,\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\,du=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[F(x+u)-F(x-u)]\,\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\,du.$$

В силу (56.3) для любых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ можно выбрать $r_0<1$ так, чтобы $\left|\dfrac{\partial P(r,u)}{\partial u}\right|<\varepsilon$ для $\delta\leqslant u\leqslant\pi$ и $r_0\leqslant r<1$. Поэтому

$$\frac{\partial F(r,x)}{\partial x}=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[F(x+u)-F(x-u)]\,\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\,du+I_1, \tag{58.6}$$

где

$$|I_1|\leqslant\frac{2\varepsilon}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t)|\,dt<C\varepsilon, \tag{58.7}$$

где C — постоянно. В силу (58.3) число δ можно, кроме того, предположить столь малым, чтобы

$$\left|\frac{F(x+u)-F(x-u)}{2u}-l\right|<\varepsilon. \tag{58.8}$$

Тогда из (58.6), (58.7) и (58.8)

$$\frac{\partial F(r,x)}{\partial x}=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\frac{F(x+u)-F(x-u)}{2u}\,2u\,\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\,du+I_1=$$

$$=I_1-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left[\frac{F(x+u)-F(x-u)}{2u}-l\right]2u\,\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\,du-$$

$$-\frac{l}{\pi}\int_{0}^{\delta}2u\,\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\,du=I_1+I_2+I_3. \tag{58.9}$$

В силу (58.8) имеем

$$|I_2|<\frac{2\varepsilon}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left|u\,\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\right|du<C_1\varepsilon, \tag{58.10}$$

где C_1 постоянно. Действительно, из (56.2) видим, что

$$\left|u\,\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\right|\leqslant\left|\frac{2u\sin u}{\sin^2 u}\right|\leqslant\pi, \quad \text{для} \quad 0\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Для I_3, интегрируя по частям, находим

$$I_3 = -\frac{2l}{\pi}\int_0^\delta u\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\,du = -\frac{2l}{\pi}\,\delta P(r,\delta) + \frac{2l}{\pi}\int_0^\delta P(r,u)\,du \to l. \qquad (58.11)$$

в силу того, что $P(r, \delta) \to 0$ и формулы (55.4).

Теперь из (58.7), (58.10) и (58.11) получаем

$$\frac{\partial F(r,x)}{\partial x} \to l \quad \text{при} \quad r \to 1,$$

и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Так как наличие обыкновенной производной в некоторой точке обеспечивает существование симметрической производной в той же точке и их равенство, то отсюда, в частности, следует:

Если в некоторой точке x производная $F'(x)$ существует и конечна, то $\frac{\partial F(r,x)}{\partial x} \to F'(x)$ *при $r \to 1$, т. е. там, где $F(x)$ имеет конечную производную, продифференцированный ряд Фурье суммируется к этой производной методом Пуассона.*

В § 56 мы, в сущности, уже получили этот результат (только формулировали его в других терминах). Теперь мы видим, что требование существования $F'(x)$ можно заменить более слабым — требованием существования симметрической производной. Зато в теореме настоящего параграфа уже $M(r, x_0) \to P(1, x_0)$ по радиальному пути, а в § 56 допускалось $M(r, x) \to P(1, x_0)$ по любому некасательному пути.

§ 59 *). Интеграл Пуассона—Стилтьеса

Будем называть *интегралом Пуассона—Стилтьеса* выражение

$$u(re^{i\omega}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, t-\omega)\,d\Psi(t),$$

где $\Psi(t)$ — некоторая функция с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$. Интегрируя по частям, получим

$$u(re^{i\omega}) = \frac{1}{\pi}P(r, t-\omega)\Psi(t)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi(t)\frac{\partial}{\partial t}P(r, t-\omega)\,dt.$$

Если $\omega \neq \pm\pi$, то обынтегрированный член при $r \to 1$ стремится к нулю. Что касается интеграла, то по теореме 1 § 56 он должен стремиться к $\Psi'(\omega_0)$ во всякой точке ω_0, где $\Psi'(\omega)$ существует и конечна, если только точка $M(re^{i\omega})$ стремится к точке $P(e^{i\omega_0})$ по любому некасательному пути.

В частности,

$$u(re^{i\omega}) \to \Psi'(\omega) \quad \text{при} \quad r \to 1,$$

если $\Psi'(\omega)$ существует и конечна.

Отсюда в качестве следствия получаем: *ряд Фурье—Стилтьеса суммируем методом Абеля—Пуассона почти всюду.*

Для дальнейшего нам будет полезно доказать, что если $\omega \neq \pm\pi$ и $\Psi'(\omega) = +\infty$, то мы имеем

$$u(re^{i\omega}) \to +\infty \quad \text{при} \quad r \to 1.$$

*) Этот параграф в первом чтении можно пропустить.

Чтобы убедиться в этом, в силу того, что уже было сказано об обынтегрированном члене, достаточно доказать, что

$$I = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi(t)\frac{\partial}{\partial t}P(r, t-\omega)\,dt \to +\infty \quad \text{при} \quad r \to 1.$$

Это такой же интеграл, как (58.5), поэтому сразу видим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$I = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[\Psi(\omega+u) - \Psi(\omega-u)]\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\,du + I_1 = I_1 + I_2,$$

где $|I_1| < \varepsilon$, если δ фиксировано и r взято достаточно близким к 1. Теперь представим I_2 в виде

$$I_2 = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[\Psi(\omega+u) - \Psi(\omega)]\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\,du - $$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[\Psi(\omega) - \Psi(\omega-u)]\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\,du = I_3 + I_4. \qquad (59.1)$$

Покажем, что $I_3 \to +\infty$ и $I_4 \to +\infty$. Доказательство для обоих интегралов совершенно одинаково. Проведем его для I_3.

Так как $\Psi'(x) = +\infty$, мы можем, если A задано, предположить δ столь малым, что

$$\Psi(\omega+u) - \Psi(\omega) > Au \quad \text{для} \quad 0 \leqslant u \leqslant \delta.$$

Имеем

$$I_3 = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\frac{\Psi(\omega+u) - \Psi(u)}{u}\left[u\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\right]du,$$

но $-u\dfrac{\partial P(r,u)}{\partial u} \geqslant 0$ (см. (56.2)), поэтому

$$I_3 > A\,\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left[-u\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\right]du$$

и мы видели (см. (58.11)), что

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left[-u\frac{\partial P(r,u)}{\partial u}\right]du \to 1 \quad \text{при} \quad r \to +1,$$

отсюда следует, что при $r \to 1$ можно сделать $I_3 > \frac{A}{2}$, где A наперед задано, и доказательство закончено.

З а м е ч а н и е. То, что ряд Фурье—Стилтьеса или ряд, получающийся после дифференцирования ряда Фурье от функции с ограниченным изменением (см. § 23), может не быть рядом Фурье, видно хотя бы из такого простого примера: ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

как мы знаем (см. § 41), есть ряд Фурье от функции, монотонной на $[0, 2\pi]$, и однако после его дифференцирования получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx ,$$

который не есть ряд Фурье, поскольку его коэффициенты не стремятся к нулю.

§ 60. Фейеровские и пуассоновские суммы для различных классов функций

Мы докажем сейчас ряд теорем, которые показывают, как можно судить о свойствах функции, изучая последовательность ее фейеровских или пуассоновских сумм.

Теорема 1. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье от непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его фейеровских сумм* $\{\sigma_n(x)\}$ *сходилась равномерно.*

Необходимость условия есть просто теорема Фейера (см. § 47). Для доказательства его достаточности заметим, что если заданный тригонометрический ряд есть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

то

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) , \tag{60.1}$$

а потому для $k \leqslant n$

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(t) \cos kt\, dt , \\ \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(t) \sin kt\, dt . \end{aligned}\right\} \tag{60.2}$$

Если последовательность $\sigma_n(x)$ равномерно сходится, то, полагая $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x)$, видим, что $f(x)$ непрерывна. При $n \to \infty$ из равенств (60.2) путем перехода к пределу получаем

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt \qquad (k = 0, 1, \ldots) ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots) ,$$

а это и надо было доказать.

Теорема 2. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье от ограниченной функции, необходимо и достаточно, чтобы нашлась константа* K, *для которой*

$$|\sigma_n(x)| \leqslant K \qquad (n = 1, 2, \ldots ; 0 \leqslant x \leqslant 2\pi) .$$

Необходимость этого условия была доказана в § 48. Для доказательства достаточности заметим, что если оно удовлетворено, то

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n^2(x)\,dx \leqslant 2K^2.$$

Но в силу равенства Парсеваля из (60.1) получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)^2(a_k^2+b_k^2).$$

Отсюда следует, что если m любое целое, $m \leqslant n$, то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)^2(a_k^2+b_k^2) \leqslant 2K^2.$$

Устремляя $n \to \infty$ и оставляя m постоянным, заключаем отсюда, что

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k^2+b_k^2) \leqslant 2K^2$$

и так как m любое, то ряд $\sum a_k^2 + b_k^2 < +\infty$.

Значит, рассматриваемый тригонометрический ряд есть ряд Фурье от некоторой функции $f(x) \in L^2$. Но так как $\sigma_n(x) \to f(x)$ почти всюду, то из $|\sigma_n(x)| \leqslant K$ следует $|f(x)| \leqslant K$, и теорема доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье от $f(x) \in L^p$ $(p > 1)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|\sigma_n(x)\|_{L^p} \leqslant K \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{60.3}$$

где K постоянно.

Для доказательства необходимости заметим, что

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_n(t-x)\,dt.$$

Поэтому, замечая, что $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)\,du = 1$ и что $K_n(u) \geqslant 0$ и применяя лемму, доказанную в § 9 Вводного материала, сразу находим

$$\|\sigma_n(x)\|_{L^p} \leqslant \|f(x)\|_{L^p} \tag{60.4}$$

и так как правая часть (60.4) не зависит от n, то доказательство закончено.

Для доказательства достаточности рассмотрим функции

$$F_n(x) = \int_0^x \sigma_n(t)\,dt \tag{60.5}$$

и докажем, что они равномерно абсолютно непрерывны, т. е. для любого ε существует такое δ, что для любой системы неперекрывающихся интервалов (a_i, b_i) с суммой $\sum(b_i - a_i) < \delta$ имеем

$$\sum |F_n(b_i) - F_n(a_i)| < \varepsilon. \tag{60.6}$$

Действительно, обозначая через S эту систему интервалов, имеем в силу (60.3)

$$\sum |F_n(b_i)-F_n(a_i)| \leqslant \sum \int_{a_i}^{b_i} |\sigma_n(t)|\,dt = \int_S |\sigma_n(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_S |\sigma_n(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_S 1^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \delta^{\frac{1}{q}} \|\sigma_n\|_{L^p} \leqslant \delta^{\frac{1}{q}} K < \varepsilon,$$

если δ достаточно мало.

Рассуждая так же, видим, что и полные изменения этих функций ограничены в совокупности. Поэтому по теореме Хелли (см. Вводный материал, § 17) из них можно выделить подпоследовательность $F_{n_j}(x)$, сходящуюся в каждой точке к некоторой функции $F(x)$; по теореме Хелли она должна иметь ограниченное изменение, но из равномерной абсолютной непрерывности функций $F_n(x)$ сразу следует, что она абсолютно непрерывна.

В самом деле, если в формуле (60.6) вместо n написать n_j и перейти к пределу при $j \to \infty$, то получим

$$\sum |F(b_i)-F(a_i)| < \varepsilon.$$

Покажем теперь, что рассматриваемый ряд есть $\sigma(f)$, где $f(x) = F'(x)$. Действительно, имеем

$$\int_0^{2\pi} \sigma_n(t)\cos kt\,dt = F_n(t)\cos kt\Big|_0^{2\pi} + k\int_0^{2\pi} F_n(t)\sin kt\,dt = F_n(2\pi) + k\int_0^{2\pi} F_n(t)\sin kt\,dt$$

и

$$\int_0^{2\pi} \sigma_n(t)\sin kt\,dt = -k\int_0^{2\pi} F_n(t)\cos kt\,dt.$$

Заставляя $n \to \infty$ по последовательности n_j, для которой $F_{n_j}(x) \to F(x)$, мы получаем из формул (60.2)

$$a_k = \frac{1}{\pi}F(2\pi) + \frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\sin kt\,dt,\quad b_k = -\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\cos kt\,dt$$

(переход к пределу под знаком интеграла здесь законен в силу теоремы Лебега (см. Вводный материал, § 14)).

После интегрирования по частям двух последних интегралов заключаем отсюда

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt,\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt,$$

а это и надо было доказать.

Остается доказать, что $f(x) \in L^p$. Но для этого достаточно заметить, что $\sigma_n(x) \to f(x)$ почти всюду, тогда, пользуясь неравенствами (60.3) и леммой Фату (см. Вводный материал, § 14), сразу получаем $\|f(x)\|_{L^p} \leqslant K$.

Следствие. *Если $f(x) \in L^p$, $p > 1$, то*

$$\int_0^{2\pi} |f(x)-\sigma_n(x)|^p\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{60.7}$$

Мы уже знаем (см. (60.4)), что если $f(x) \in L^p$, то

$$\|\sigma_n(x)\|_{L^p} \leqslant \|f(x)\|_{L^p}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Можно найти (см. § 28) такой тригонометрический полином $T(x)$, что

$$\| f(x) - T(x) \|_{L^p} < \varepsilon. \tag{60.8}$$

Следовательно, при любом n

$$\| \sigma_n(x, f) - T) \|_{L^p} < \varepsilon,$$

т. е.

$$\| \sigma_n(x, f) - \sigma_n(x, T) \|_{L^p} < \varepsilon. \tag{60.9}$$

Но раз $T(x)$ — тригонометрический полином, то непрерывная функция $\sigma_n(x, T)$ стремится к $T(x)$ равномерно, и тем более

$$\| \sigma_n(x, T) - T(x) \|_{L^p} < \varepsilon \tag{60.10}$$

как только n станет достаточно большим. Поэтому из (60.8), (60.9) и (60.10) имеем

$$\| f(x) - \sigma_n(x, f) \|_{L^p} \leqslant \| f(x) - T(x) \|_{L^p} + \| T(x) - \sigma_n(x, T) \|_{L^p} + \\ + \| \sigma_n(x, T) - \sigma_n(x, f) \|_{L^p} \leqslant 3\varepsilon,$$

если n достаточно велико, и тем самым (60.7) доказано.

Ниже при доказательстве теоремы 4 мы увидим, что это утверждение остается в силе и при $p = 1$, т. е., если $f(x) \in L$, то

$$\int_0^{2\pi} | f(x) - \sigma_n(x) | \, dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Однако теорема 3 справедлива лишь при $p > 1$. В самом деле, если $p = 1$, т. е. если

$$\int_0^{2\pi} | \sigma_n(x) | \, dx \leqslant K,$$

то мы не можем утверждать, что рассматриваемый ряд есть ряд Фурье (см. ниже замечание к теореме 5). Случай ряда Фурье рассматривается в следующей теореме:

Теорема 4. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^{2\pi} | \sigma_m(x) - \sigma_n(x) | \, dx \to 0 \quad \textit{при} \quad m \to \infty \quad \textit{и} \quad n \to \infty.$$

Мы знаем (см. § 47), что

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \, K_n(t) \, dt.$$

Поэтому, полагая

$$\Psi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} | f(x+t) - f(x) | \, dx,$$

имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} | \sigma_n(x) - f(x) | \, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(x+t) - f(x) | \, K_n(t) \, dt \right\} dx = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(t) \, K_n(t) \, dt. \tag{60.11}$$

Если обозначить через $\sigma_n^*(x)$ фейеровскую сумму для $\sigma(\Psi)$, то

$$\sigma_n^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi(t+x) K_n(t)\, dt,$$

а потому из (60.11)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x) - f(x)|\, dx \leqslant \sigma_n^*(0).$$

Но так как $\Psi(t)$ непрерывна и $\Psi(0) = 0$, то $\sigma_n^*(0) \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x) - f(x)|\, dx \to 0. \qquad (60.12)$$

Отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x) - \sigma_m(x)| dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x) - f(x)|\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_m(x)|\, dx \to 0$$

и необходимость нашего условия доказана.

Для доказательства его достаточности заметим, что из

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x) - \sigma_m(x)|\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,\ n \to \infty$$

следует существование константы K, для которой

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x)|\, dx \leqslant K \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Полагая, как в теореме 3,

$$F_n(x) = \int_0^x \sigma_n(t)\, dt,$$

мы, как и там, будем доказывать, что последовательность функций $F_n(x)$ равномерно абсолютно непрерывна. Здесь, сохраняя обозначения теоремы 3, имеем

$$\sum |F_n(b_i) - F_n(a_i)| \leqslant \int_S |\sigma_n(t)|\, dt. \qquad (60.13)$$

Но

$$\int_S |\sigma_n(t)|\, dt \leqslant \int_S |\sigma_n(t) - \sigma_k(t)|\, dt + \int_S |\sigma_k(t)|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{2\pi} |\sigma_n(t) - \sigma_k(t)|\, dt + \int_S |\sigma_k(t)|\, dt. \qquad (60.14)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. В силу условия теоремы можно взять k столь большим, чтобы

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(t) - \sigma_k(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad n \geqslant k. \qquad (60.15)$$

Фиксируем теперь k; тогда, взяв δ достаточно малым, можем добиться того, чтобы $\int_S |\sigma_p(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2}$ при $p \leqslant k$, как только $mS < \delta$. Но если так, то из (60.14) и (60.15)

$$\int_S |\sigma_n(t)|\, dt < \varepsilon$$

и, следовательно, из (60.13)

$$\sum |F_n(b_i) - F_n(a_i)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \sum (b_i - a_i) < \delta.$$

Теперь, как в теореме 3, мы видим, что из последовательности $\{F_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой $F(x)$, которая должна оказаться абсолютно непрерывной и притом рассматриваемый ряд есть ряд Фурье от $F'(x)$.

Теорема доказана.

Замечание. В процессе доказательства мы установили, что для любой $f(x) \in L$ имеем

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{60.16}$$

Наконец, докажем еще одну теорему.

Теорема 5. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье—Стилтьеса*), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x)|\, dx \leqslant K \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где K — постоянное.

Необходимость условия вытекает из того, что для ряда Фурье—Стилтьеса имеем

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t - x)\, dF(t) \tag{60.17}$$

(эта формула выводится так же, как (47.2)). Поэтому

$$|\sigma_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t - x)\, |dF|,$$

где $|dF|$ есть не что иное, как $dV(t)$, если под $V(t)$ понимать полное изменение $F(x)$ на $0 \leqslant x \leqslant t$. Отсюда, меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x)|\, dx \leqslant \int_0^{2\pi} \left\{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_n(t - x)\, |dF(t)|\right\} dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} |dF(t)|\, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_n(t - x)\, dx = \int_0^{2\pi} |dF| = V,$$

где V — полное изменение $F(x)$ на $[0, 2\pi]$.

Итак, необходимость доказана.

Для доказательства достаточности мы снова вводим в рассмотрение функции $F_n(x)$, уже рассмотренные в теоремах 3 и 4. Правда, мы уже не сможем доказать, что они равномерно абсолютно непрерывны, но все же они имеют равномерно ограниченные изменения, поскольку

$$\sum |F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i)| \leqslant \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\sigma_n(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |\sigma_n(t)|\, dt \leqslant K$$

для любого разбиения отрезка $[0, 2\pi]$ точками x_i. Поэтому в силу первой теоремы Хелли (см. Вводный материал, § 17) существует подпоследовательность n_j такая, что $F_{n_j}(x) \to F(x)$ для любого x из $[0, 2\pi]$, где $F(x)$ имеет

*) См. § 23, п. 9.

ограниченное изменение. Остается доказать, что данный ряд есть ряд Фурье—Стилтьеса от dF.

Для этого, как при доказательстве теоремы 3, пишем

$$\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_n(t)\cos kt\,dt=\frac{F_n(2\pi)}{\pi}+\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi}F_n(t)\sin kt\,dt$$

и затем интегрированием по частям получаем

$$\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos kt\,dF_n(t).$$

Заставляя n стремиться к бесконечности по подпоследовательности n_j, находим

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos kt\,dF(t)$$

и аналогично для b_k (переход к пределу был законен в силу второй теоремы Хелли, § 17 Вводного материала).

Теорема доказана.

Замечание. Мы знаем (см. § 59), что не всякий ряд Фурье—Стилтьеса есть ряд Фурье. Таким образом, условие

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_n(x)|\,dx\leqslant K \qquad (n=1,2,\ldots)$$

не является достаточным для того, чтобы ряд был рядом Фурье, и это показывает, что при $p=1$ теорема 3 теряет силу.

Учитывая, что ряд Фурье—Стилтьеса есть результат дифференцирования ряда Фурье от функции с ограниченным изменением, мы получаем в качестве следствия теоремы 5 следующую теорему:

Теорема 6. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье от функции с ограниченным изменением, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^{2\pi}|\sigma_n'(x)|\,dx\leqslant K \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Все доказанные теоремы относились к рассмотрению фейеровских сумм. Если вместо них мы рассмотрим пуассоновские суммы, т. е.

$$f(r,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n$$

и заметим, что

$$f(r,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,P(r,t-x)\,dt,$$

где $P(r,u)$ — ядро Пуассона, то можно будет доказать совершенно аналогичные теоремы; действительно, при доказательстве мы все время пользовались выражением $\sigma_n(x)$ в виде

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,K_n(t-x)\,dt$$

и опирались только на то, что $K_n(u) \geqslant 0$ и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)\,du = 1\,.$$

Но мы также имеем $P(r, u) \geqslant 0$ и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r, u)\,du = 1\,.$$

Поэтому все рассуждения проходят слово в слово (то что $r \to 1$ не по последовательности, а пробегая все значения, не играет роли, так как можно было бы рассматривать последовательность $r_k \to 1$ при $k \to \infty$ и рассуждать с ядрами $P(r_k, u)$).

Таким образом получаются следующие теоремы.

Теорема 1'. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье от непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы его пуассоновские суммы $f(r, x)$ стремились равномерно к пределу при $r \to 1$.*

Теорема 2'. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье от ограниченной функции, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа K, для которой*

$$|f(r, x)| \leqslant K\,, \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant r < 1\,, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\,. \end{array}$$

Теорема 3'. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье для $f(x) \in L^p$ $(p > 1)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\| f(r, x) \|_{L^p} \leqslant K\,, \qquad 0 \leqslant r < 1\,.$$

Кроме того, если $f(x) \in L^p$ $(p > 1)$, то

$$\| f(r, x \|_{L^p} \leqslant \| f(x) \|_{L^p}\,. \tag{60.18}$$

Имеем также

$$\int_0^{2\pi} | f(x) - f(r, x) |^p\,dx \to 0 \quad \textit{при} \quad r \to 1\,, \tag{60.19}$$

причем это справедливо как при $p > 1$, так и при $p = 1$.

Теорема 4'. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^{2\pi} | f(r, x) - f(\varrho, x) |\,dx \to 0 \quad \begin{array}{l} \textit{при} \quad r \to 1 \\ \quad\textit{и} \quad \varrho \to 1\,. \end{array}$$

Для случая ряда Фурье—Стилтьеса рассуждение несколько сложнее. Мы не будем его проводить и ограничимся формулировкой теоремы, аналогичной теореме 5, а именно

Теорема 5'. *Для того чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье—Стилтьеса, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^{2\pi} | f(r, x) |\,dx \leqslant K\,, \quad 0 \leqslant r < 1\,.$$

Отметим еще, что в главе VIII (§ 14 и § 20) вместо фейеровских или пуассоновских сумм ряда Фурье мы будем изучать его частные суммы $S_n(x)$ и для них рассматривать вопрос о поведении $\|S_n\|_{L^p}$ и $\|f - S_n\|_{L^p}$ при $p \geqslant 1$.

§ 61. Общие тригонометрические ряды. Теорема Лузина—Данжуа

До сих пор мы изучали ряды Фурье. Теперь мы будем рассматривать тригонометрические ряды самого общего вида и докажем относительно них ряд очень простых, но важных теорем. Начнем с рассмотрения вопроса о том, когда тригонометрический ряд сходится абсолютно на множестве положительной меры. Здесь имеет место теорема, доказанная одновременно и независимо Н. Н. Лузиным [3] и А. Данжуа (см. Denjoy[2]).

Теорема Лузина—Данжуа. *Если тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{61.1}$$

сходится абсолютно на множестве E, $mE>0$, то

$$\sum |a_n|+|b_n|<+\infty .$$

Обозначим $\varrho_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ $(n=1, 2, \ldots)$ и положим

$$\alpha_0=0, \frac{a_0}{2}=\varrho_0, \quad a_n=\varrho_n \cos\alpha_n, \quad b_n=\varrho_n\sin\alpha_n \quad (n=1,2,\ldots).$$

Тогда ряд (61.1) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varrho_n\cos(nx-\alpha_n). \tag{61.2}$$

Абсолютная сходимость ряда (61.2) на E означает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varrho_n|\cos(nx-\alpha_n)|<+\infty \quad \text{для} \quad x\in E. \tag{61.3}$$

По теореме Егорова можно найти совершенное множество $P\subset E$, $mP>0$, на котором ряд (61.3) сходится равномерно. Пусть $S(x)$ — его сумма на P, тогда в силу равномерной сходимости (61.3)

$$\int_P S(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\varrho_n\int_P|\cos(nx-\alpha_n)|\,dx.$$

Но

$$\int_P|\cos(nx-\alpha_n)|\,dx\geqslant\int_P\cos^2(nx-\alpha_n)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_P[1+\cos 2(nx-\alpha_n)]\,dx=\frac{1}{2}mP+\frac{1}{2}\int_P\cos 2(nx-\alpha_n)\,dx.$$

Если обозначить через $f(x)$ функцию, равную 1 на P и нулю вне его, то

$$\int_P\cos 2(nx-\alpha_n)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2(nx-\alpha_n)\,dx=$$

$$=\cos 2\alpha_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2nx\,dx+\sin 2\alpha_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 2nx\,dx, \tag{61.4}$$

а потому

$$\int_P\cos 2(nx-\alpha_n)\,dx\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

так как интегралы в правой части (61.4) отличаются лишь ограниченным множителем от коэффициентов Фурье для $f(x)$.

Из этого вытекает, что

$$\int_P |\cos(nx-\alpha_n)|\,dx > \frac{1}{4} mP$$

при n достаточно большом, а значит сходимость ряда (61.3) влечет сходимость ряда $\sum \varrho_n$, откуда следует и

$$\sum |a_n| < +\infty, \quad \sum |b_n| < +\infty.$$

Теорема доказана.

§ 62. Теорема Кантора—Лебега

Рассмотрим теперь вопрос о том, что можно сказать о коэффициентах тригонометрического ряда, если он уже не абсолютно, а просто сходится на множестве меры больше нуля.

Здесь имеет место

Теорема Кантора—Лебега. *Если тригонометрический ряд сходится на множестве E, $mE>0$, то его коэффициенты стремятся к нулю.*

В самом деле, если

$$\sum \varrho_n \cos(nx-\alpha_n) \tag{62.1}$$

сходится на E, $mE>0$, то имеем

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n \cos(nx-\alpha_n)=0 \quad \text{для} \quad x\in E.$$

Если найдется такая последовательность $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, для которой

$$\varrho_{n_k} \geqslant \delta > 0, \tag{62.2}$$

то имеем очевидно

$$\lim_{k\to\infty} \cos(n_k x-\alpha_{n_k})=0, \quad x\in E.$$

Покажем, что этого не может быть. Действительно, тогда и

$$\lim_{k\to\infty} \cos^2(n_k x-\alpha_{n_k})=0, \quad x\in E.$$

По теореме Лебега о законности перехода к пределу под знаком интеграла для случая, когда речь идет о функциях, ограниченных в своей совокупности, имеем, интегрируя по множеству E

$$\lim_{k\to\infty} \int_E \cos^2(n_k x-\alpha_{n_k})=0.$$

Но так как, рассуждая, как в § 61, мы имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int_E \cos^2(n_k x-\alpha_{n_k})\,dx=\frac{1}{2} mE,$$

а $mE>0$, то мы приходим к противоречию.

Следовательно, нельзя было предполагать (62.2), поэтому

$$\lim_{n\to 0} \varrho_n = 0, \tag{62.3}$$

и теорема доказана.

Замечание. Название этой теоремы объясняется тем, что Кантор доказал ее для случая, когда ряд сходится на некотором отрезке $[a, b]$, а

Лебег обобщил на случай любого множества положительной меры. Мы считаем целесообразным привести здесь отдельно доказательство теоремы Кантора, так как оно даже не требует знакомства с интегралом Лебега.

Итак, пусть ряд (62.1) сходится на некотором отрезке $[a, b]$. Перепишем его для удобства в виде

$$\sum \varrho_n \cos n (x - \alpha_n). \tag{62.4}$$

Надо доказать, что $\varrho_n \to 0$. Допустим, что это неверно; тогда найдется такое $\delta > 0$, что

$$\varrho_n \geqslant \delta \tag{62.5}$$

для бесконечного множества значений n.

Обозначим через d длину отрезка $[a, b]$. Когда x пробегает $[a, b]$, то $x - \alpha_n$ пробегает отрезок той же длины d. Взяв такое n_1, для которого $n_1 d > 2\pi$, мы видим, что $\cos n_1 (x - \alpha_{n_1})$ успевает пробежать все свои значения, пока x пробегает $[a, b]$, значит, можно найти такой отрезок $[a_1, b_1]$ внутри $[a, b]$, где этот косинус $\geqslant \frac{1}{2}$. Если при этом n выбрано таким, что для него удовлетворено (62.5), то

$$\varrho_{n_1} \cos n_1 (x - \alpha_{n_1}) \geqslant \frac{\delta}{2}, \quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1.$$

Положим $d_1 = b_1 - a_1$. Рассуждая аналогично предыдущему, можем выбрать n_2 так, чтобы для него удовлетворялось (62.5) и чтобы $n_2 d_1 > 2\pi$, а тогда в отрезке $[a_1, b_1]$ найдется отрезок $[a_2, b_2]$, для которого $\cos n_2 (x - \alpha_{n_2}) \geqslant \frac{1}{2}$, а потому

$$\varrho n_2 \cos n_2 (x - \alpha_{n_2}) \geqslant \frac{\delta}{2}, \quad a_2 \leqslant x \leqslant b_2.$$

Этот процесс можно продолжить неограниченно, так как чисел n, удовлетворяющих неравенству (62.5), имеется бесконечное множество. Мы получаем последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, вложенных друг в друга, причем

$$\varrho_{n_k} \cos n_k (x - \alpha_{n_k}) \geqslant \frac{\delta}{2}. \tag{62.6}$$

Существует точка ξ, принадлежащая всем этим отрезкам одновременно. В такой точке ξ неравенство (62.6) выполнено для всех k $(k = 1, 2, \ldots)$, а потому

$$\lim_{n \to \infty} \varrho_n \cos n (x - \alpha_n) \neq 0,$$

а значит ряд $\sum \varrho_n \cos n (x - \alpha_n)$ должен расходиться в точке ξ. Между тем ξ лежит в отрезке $[a, b]$, где ряд сходится, и мы пришли к противоречию.

§ 63. Пример всюду расходящегося ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю

Возникает вопрос, должен ли тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, сходиться на множестве положительной меры. Этот вопрос был поставлен Фату (Fatou[1]) и первый ответ на него был дан Н.Н. Лузиным[1]. Именно Н.Н. Лузин построил пример тригонометрического ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, и расходящегося почти всюду (подробнее об этом см. §§ 1 и 2 главы VII). Затем Штейнгауз (Steinhaus[1]) дал пример тригонометрического ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, и расходящегося в каждой точке.

Мы здесь изложим пример Штейнгауза из его более поздней работы (Steinhaus[5]).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos k\,(x-\ln\ln k)}{\ln k}. \tag{63.1}$$

Положим $l_k = [\ln k]$, $v_k = \ln\ln k$ и

$$g_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+l_n} \frac{\cos k\,(x-v_k)}{\ln k}; \quad g_n = \sum_{k=n+1}^{n+l_n} \frac{1}{\ln k}.$$

Прежде всего заметим, что

$$g_n - g_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+l_n} \frac{1}{\ln k}\left[1-\cos k\,(x-v_k)\right] = 2\sum_{k=n+1}^{n+l_n} \frac{\sin^2 k\left(\frac{x-v_k}{2}\right)}{\ln k},$$

откуда

$$0 \leqslant g_n - g_n(x) \leqslant \frac{1}{2\ln n}\sum_{k=n+1}^{n+l_n} k^2\,(x-v_k)^2,$$

так как $|\sin u| \leqslant |u|$. Пусть $v_n \leqslant x \leqslant v_{n+1}$ $(n \geqslant 3)$; тогда для $n+1 \leqslant k \leqslant \leqslant n+l_n$ имеем в силу монотонного возрастания чисел v_k:

$$v_n < v_k \leqslant v_{n+l_n},$$

а потому

$$|x - v_k| \leqslant v_{n+l_n} - v_n.$$

Применяя к разности $v_{n+l_n} - v_n = \ln\ln(n+l_n) - \ln\ln n$ теорему о среднем значении, находим

$$|x - v_k| \leqslant \frac{l_n}{n\ln n} \leqslant \frac{1}{n},$$

а потому для $v_n \leqslant x \leqslant v_{n+1}$

$$g_n - g_n(x) \leqslant \frac{1}{2\ln n}\,\frac{1}{n^2}\,l_n\,(n+l_n)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{l_n}{n}\right)^2. \tag{63.2}$$

Правая часть неравенства (63.2) стремится к $\frac{1}{2}$ при $n \to \infty$; поэтому для любого ε можно найти такое N, что

$$0 \leqslant g_n - g_n(x) \leqslant \frac{1}{2} + \varepsilon \quad \text{для} \quad n \geqslant N. \tag{63.3}$$

С другой стороны,

$$g_n \geqslant \frac{l_n}{\ln(n+l_n)} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

поэтому

$$g_n \geqslant 1 - \varepsilon \quad \text{для} \quad n \geqslant N, \tag{63.4}$$

если N достаточно велико. Если взять $\varepsilon < \frac{1}{8}$, то из (63.3) и (63.4)

$$g_n(x) > \frac{1}{2} - 2\varepsilon > \frac{1}{4} \quad \text{для} \quad v_n \leqslant x \leqslant v_{n+1} \ \text{ и } \ n \geqslant N. \tag{63.5}$$

Пусть теперь x — любая точка отрезка $[0, 2\pi]$. Покажем, что найдется бесконечное множество таких значений n, для которых $g_n(x) > \frac{1}{4}$. В самом деле, если мы отметим на оси абсцисс точки $v_3, v_4, \ldots, v_n, \ldots$, то они стремятся монотонно к бесконечности, значит, отрезки $[\nu_n, \nu_{n+1}]$ ($n \geqslant 3$) покрывают всю ось абсцисс.

Следовательно, каждая точка вида $x + p \cdot 2\pi$ непременно лежит в некотором интервале вида $[\nu_n, \nu_{n+1}]$; но $g_n(x + p \cdot 2\pi) = g_n(x)$, а потому в точке x удовлетворено неравенство (63.5), если $n \geqslant N$.

Но для достаточно больших p неравенство $x + p \cdot 2\pi < \nu_{n+1}$ требует, чтобы n было достаточно велико, поэтому для бесконечного множества значений $n \geqslant N$ действительно будем иметь $g_n(x) > \frac{1}{4}$. Значит, в рассматриваемом ряде (63.1) имеется бесконечное множество «кусков», у которых сумма членов имеет величину, превосходящую $\frac{1}{4}$, а потому ряд расходится. Раз это доказано для любого x на $[0, 2\pi]$, то ряд расходится в каждой точке.

§ 64. Изучение сходимости одного класса тригонометрических рядов

Фату (Fatou[1]) доказал целый ряд важных теорем, касающихся рядов, у которых

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{64.1}$$

Но оказывается, что многие из этих теорем сохраняют силу, если удовлетворяется менее сильное требование, а именно

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n} k(|a_k| + |b_k|) = o(n). \tag{64.2}$$

Ясно, что из (64.1) следует (64.2), но обратное, вообще говоря, не имеет места.

Тригонометрические ряды, коэффициенты которых удовлетворяют условию (64.2), обладают целым рядом интересных свойств. Они могут не быть рядами Фурье (см. глава VI, § 3), но имеет место такая теорема:

Теорема 1. *Если ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

с коэффициентами, удовлетворяющими (64.2), *есть ряд Фурье, то он сходится почти всюду; если он* $\sigma(f)$, *где* $f(x)$ *непрерывна, то этот ряд сходится равномерно.*

В самом деле, известно, что если для тригонометрического ряда $S_n(x)$ — частные, а $\sigma_n(x)$ — фейеровские суммы, то

$$|S_n(x) - \sigma_n(x)| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k(|a_k| + |b_k|) = o(1) \tag{64.3}$$

в силу (64.2). Поэтому $S_n(x) - \sigma_n(x) \to 0$ равномерно в силу (64.3). Но для любого ряда Фурье $\sigma_n(x) \to f(x)$ почти всюду, поэтому и $S_n(x) \to f(x)$ почти всюду. Если же $f(x)$ непрерывна, то $\sigma_n(x) \to f(x)$ равномерно, а тогда и $S_n(x) \to \to f(x)$ равномерно, и теорема доказана.

В качестве следствия выведем теорему

Теорема 2 (Фату). *Если тригонометрический ряд имеет коэффициенты вида*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad и \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то он сходится почти всюду.

Если он, кроме того, есть ряд Фурье от непрерывной функции, то он сходится равномерно.

Действительно, прежде всего ясно, что наш ряд есть ряд Фурье, так как $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$. Кроме того, как мы уже говорили, из (64.1) следует (64.3) и, значит, мы находимся в условиях применимости предыдущей теоремы.

Замечание. Гипотеза относительно непрерывности является дополнительным требованием, а не вытекает из (64.1). Можно показать, что существуют функции, у которых коэффициенты Фурье удовлетворяют условию (64.1) и, однако, они неограничены на любом интервале δ, лежащем на $[-\pi, \pi]$ (см. глава VIII, § 13).

§ 65. Лакунарные последовательности и лакунарные ряды

Выведем еще некоторые следствия из теоремы 1 § 64. Для этого напомним, что в § 4 Вводного материала мы условились называть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ удовлетворяющей условию (L), если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < +\infty$$

и

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k} = O\left(\frac{1}{n_m}\right) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Последовательность $\{n_k\}$ была названа лакунарной, если существует такое $\lambda > 1$, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{65.1}$$

Наконец, было показано, что всякая лакунарная последовательность удовлетворяет условию (L).

Теперь введем определение лакунарного ряда.

Определение. Ряд

$$\sum a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x \tag{65.2}$$

называется *лакунарным*, если натуральные числа $\{n_k\}$ образуют лакунарную последовательность (т. е. удовлетворяют условию (65.1)).

Если последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию (L), то мы будем говорить, что ряд (65.2) есть (L)-ряд (таким образом, всякий лакунарный ряд есть (L)-ряд, но обратное, вообще, не имеет места).

Докажем, что если коэффициенты (L)-ряда стремятся к нулю, то он входит в класс рядов, изученных в § 64. Действительно, функция $\tau(n)$, определенная в § 64 (см. (64.2)), в данном случае принимает вид

$$\tau(n) = \sum_{n_k \leqslant n} n_k (|a_k| + |b_k|).$$

Покажем, что $\tau(n) = o(n)$, тогда мы будем находиться в условиях § 64. Так как $a_k \to 0$ и $\beta_k \to 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое p, что $|a_k| \leqslant \varepsilon$ и

$|b_k| \leqslant \varepsilon$ при $k \geqslant p$. Если n_m — наибольшее из чисел последовательности $\{n_k\}$, не превосходящее n, то

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{m} n_k(|a_k| + |b_k|) \leqslant \sum_{k=1}^{p} n_k(|a_k| + |b_k|) + 2\varepsilon \sum_{k=p+1}^{m} n_k. \tag{65.3}$$

Так как первое слагаемое правой части (65.3) не зависит от n, то можно взять n_0 столь большим, чтобы это слагаемое было меньше εn для $n \geqslant n_0$. Тогда

$$\frac{\tau(n)}{n} \leqslant \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{n_m} \sum_{k=p+1}^{m} n_k < c\varepsilon \quad (\text{для } n \geqslant n_0),$$

где c постоянно, потому что для последовательностей $\{n_k\}$, удовлетворяющих условию (L), имеем

$$\sum_{k=1}^{m} n_k = O(n_m)$$

(см. Вводный материал, § 4).

Итак,

$$\tau(n) \leqslant c\,\varepsilon_n,$$

а так как ε как угодно мало, то

$$\tau(n) = o(n)$$

и наше утверждение доказано.

Из доказанного утверждения и теоремы 1 § 64 сразу получаем

Следствие 1. *Если (L)-ряд есть ряд Фурье, то он сходится почти всюду; если он ряд Фурье от непрерывной функции, то сходится равномерно.*

Из сделанного выше замечания о том, что всякая лакунарная последовательность удовлетворяет условию (L) и из следствия 1 получаем теорему Колмогорова[6].

Если лакунарный ряд есть ряд Фурье, то он сходится почти всюду.

Кроме того, из следствия 1 также сразу получаем: *если лакунарный ряд есть ряд Фурье от непрерывной функции, то он сходится равномерно.*

В главе XI, § 6 будет доказано более сильное предложение, а именно, что в указанных условиях ряд должен сходиться и абсолютно.

Укажем еще одну теорему, касающуюся последовательностей, удовлетворяющих условию (L).

Теорема. *Пусть $\{n_k\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию (L), и $f(x)$ — функция с интегрируемым квадратом. Тогда*

$$S_{n_k}(x) \to f(x) \quad \text{почти всюду при } k \to \infty.$$

Доказательство. Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

— ряд Фурье от $f(x)$, $S_n(x)$ и $\sigma_n(x)$ — его частные и фейеровские суммы. Так как $\sigma_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ почти всюду, то достаточно убедиться, что $S_{n_k}(x) - \sigma_{n_k}(x) \to 0$ почти всюду.

Мы покажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_{n_k}(x) - S_{n_k}(x)]^2\, dx < +\infty, \tag{65.3'}$$

тогда по теореме Лебега (см. Вводный материал, § 14) будет иметь место сходимость почти всюду ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\sigma_{n_k}(x) - S_{n_k}(x)]^2,$$

а следовательно, и стремление к нулю его общего члена.

Итак, остается доказать сходимость ряда (65.3′). Как известно,

$$S_n(x) - \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} m(a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Поэтому в силу равенства Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_{n_k}(x) - S_{n_k}(x)]^2 \, dx = \frac{1}{(n_k+1)^2} \sum_{m=0}^{n_k} m^2 (a_m^2 + b_m^2).$$

Оценим сумму первых p членов ряда (65.3′); имеем

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{p} \int_{-\pi}^{\pi} [S_{n_k}(x) - \sigma_{n_k}(x)]^2 \, dx = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n_k+1)^2} \sum_{m=0}^{n_k} m^2 (a_m^2 + b_m^2) <$$

$$< \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n_k^2} \sum_{m=0}^{n_k} m^2 (a_m^2 + b_m^2). \quad (65.4)$$

Для сокращения записи введем обозначение

$$v_m = m^2 (a_m^2 + b_m^2).$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n_k^2} \sum_{m=0}^{n_k} v_m = \sum_{k=1}^{n_1} v_k \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{n_m^2} + \sum_{n_1+1}^{n_2} v_k \sum_{m=2}^{p} \frac{1}{n_m^2} + \ldots + \sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} v_k \frac{1}{n_p^2}. \quad (65.5)$$

Но последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию (L), поэтому и $\{n_k^2\}$ также (см. Вводный материал, § 4), а потому

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k^2} < C \frac{1}{n_m^2}, \quad (65.6)$$

где C — постоянное. Но тогда, полагая $n_0 = 0$, находим из (65.5) и (65.6)

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n_k^2} \sum_{m=0}^{n_k} v_m < C \sum_{k=1}^{p} (v_{n_{k-1}+1} + \ldots + v_{n_k}) \frac{1}{n_k^2}.$$

Наконец, из определения v_m ясно, что

$$v_{n_{k-1}+1} + \ldots + v_{n_k} < n_k^2 \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} (a_m^2 + b_m^2) \quad (65.7)$$

и, следовательно, из (65.5) и (65.7)

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n_k^2} \sum_{m=0}^{n_k} v_m < c \sum_{k=1}^{p} \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} (a_m^2 + b_m^2) = c \sum_{m=1}^{n_p} (a_m^2 + b_m^2) \leqslant c \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx$$

при любом p. Отсюда следует сходимость ряда в правой части (65.4), и этим заканчивается доказательство теоремы.

Следствие 2. Из доказанного предложения вытекает теорема Колмогорова[6].

Если $\{n_k\}$ *есть лакунарная последовательность и* $f(x) \in L^2$, *то*

$$S_{n_k}(x) \to f(x) \quad \textit{почти всюду}.$$

§ 66. Гладкие функции

Для дальнейшего изучения рядов, которые мы уже рассматривали в § 64, а также и во многих других вопросах, нам будет полезно ввести понятие гладкой функции.

Определение. Функция $F(x)$ называется *гладкой в точке* x, если

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{66.1}$$

Обозначая для краткости

$$\Delta_h^2 F = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x),$$

можем сказать, что гладкость $F(x)$ характеризуется равенством

$$\Delta_h^2 F = o(h).$$

Если равенство (66.1) выполнено равномерно относительно x на некотором отрезке $[a, b]$, то мы будем говорить, что $F(x)$ *равномерно гладкая* на этом отрезке.

Слово «гладкая» было, по-видимому, введено для того, чтобы выразить такую мысль: если $F(x)$ гладкая в некоторой точке, то эта точка не может быть угловой. Действительно, если $\Delta_h^2 F = o(h)$ в точке x, то

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \frac{F(x-h)-F(x)}{-h} = o(1),$$

т. е. если существует производная справа в точке x, то в ней должна существовать и производная слева и они должны быть равны между собой. Мало того, если в некоторой точке $F(x)$ гладкая, то в этой точке

$$D^+F = D^-F = \overline{D}F \quad \text{и} \quad D_+F = D_-F = \underline{D}F,$$

где D^+F и D^-F означают верхнее правое и верхнее левое производные числа, $\overline{D}F$ — верхнюю производную (когда они равны), и аналогично для левых производных чисел.

Заметим, что если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, или хотя бы только «симметрически непрерывна», т. е.

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

то примитивная $F(x)$ от $f(x)$ удовлетворяет условию гладкости в этой точке, так как

$$F(x_0+h) + F(x_0-h) - 2F(x_0) = \int_0^h [f(x_0+t) - f(x_0-t)]\,dt = o(h)$$

при $h \to 0$.

Однако гладкие функции, несмотря на свое название, вовсе не должны иметь почти всюду производную; более того, они могут быть лишены производной почти всюду, как мы увидим дальше (см. главу XI, § 4). Однако имеет место теорема.

Теорема 1. *Если $F(x)$ — непрерывная и гладкая на некотором интервале (a, b), то она имеет производную $F'(x)$ на множестве E мощности континуума в любом интервале (α, β), лежащем внутри (a, b).*

Чтобы доказать это, прежде всего заметим, что, если функция $F(x)$ имеет в некоторой внутренней точке x_0 отрезка $[a, b]$ максимум или минимум, то $F'(x_0)$ существует и равна нулю. В самом деле, имеем

$$\frac{F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)}{h} = \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} + \frac{F(x_0-h)-F(x_0)}{h} \qquad (66.2)$$

Но в точке максимума (или минимума) оба члена правой части (66.2) не положительны при $h > 0$ достаточно малом (соответственно неотрицательны). Поэтому из стремления к нулю их суммы следует, что каждый из них стремится к нулю, а тогда $F'(x_0)$ существует и равна нулю.

Пусть теперь $[\alpha, \beta]$ — любой отрезок внутри (a, b), и $L(x) = mx + n$ — линейная функция, совпадающая с $F(x)$ для $x = \alpha$ и $x = \beta$. Разность $g(x) = F(x) - L(x)$ есть гладкая функция, обращающаяся в нуль в концах α и β. Значит, $g(x)$ имеет абсолютный максимум или минимум в некоторой точке x_0 внутри (α, β). Поэтому $g'(x_0) = 0$, значит, $F'(x_0)$ существует и равна m. Отсюда, в частности, вытекает, что для непрерывных и гладких функций справедлива теорема Лагранжа о конечном приращении, т. е.

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(\xi), \quad a < \xi < b.$$

Мы убедились, что в любом $[\alpha, \beta]$ внутри (a, b) есть точки, где $F'(x)$ существует. Но можно показать и больше, именно, что множество этих точек имеет мощность континуума. Действительно, пусть γ таково, что $\alpha < \gamma < \beta$. Найдется точка x_0 в (α, γ), где $F'(x_0)$ существует и равна тангенсу угла наклона хорды соединяющей точки $(\alpha, F(\alpha))$ и $(\gamma, F(\gamma))$. Если наклоны, отвечающие разным γ, различны, то и соответствующие точки x_0 различны. Но если кривая $y = F(x)$ не является прямолинейным отрезком на (α, β) (а в этом случае теорема уже доказана), то тогда величины тангенсов этих наклонов образуют интервал, т. е. их множество имеет мощность континуума, а потому и точек дифференцируемости $F(x)$ имеется множество мощности континуума во всяком интервале. Теорема доказана.

Для дальнейшего введем такое определение.

Определение. Будем говорить, что *функция $f(x)$ обладает свойством D на некотором множестве E*, если для любых двух $\alpha \in E$ и $\beta \in E$ и для любого числа C, заключенного между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$, найдется такая точка $\gamma \in E$, лежащая между α и β, что $f(\gamma) = C$.

Буква D происходит от имени Дарбу, так как он отметил, что этим свойством обладают не только функции, непрерывные на некотором отрезке, но и некоторые разрывные; в частности, если $f(x)$ есть точная производная, т. е. если существует такая $F(x)$, что $f(x) = F'(x)$ в каждой точке некоторого отрезка, то она обладает свойством D на этом отрезке.

Докажем теорему.

Теорема 2. *Если $F(x)$ — непрерывная и гладкая на некотором интервале (a, b), то ее производная $F'(x)$ обладает свойством D на множестве E тех точек, где она существует.*

Это множество E, как мы видим, по теореме 1, не только не пусто, но имеет мощность континуума в каждом отрезке $[\alpha, \beta]$ внутри (a, b).

Пусть $\alpha \in E$, $\beta \in E$

$$A = F'(\alpha), \quad B = F'(\beta)$$

и пусть C заключено между A и B; например, для определенности, $A < C < B$. Мы должны доказать существование такого x_0, $\alpha < x_0 < \beta$, $x_0 \in E$, что $F'(x_0) = C$. Если вычесть Cx из $F(x)$, то можно принять $C = 0$, а тогда $A < 0 < B$.

Положим при фиксированном h

$$g(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Выберем h так, чтобы $0 < h < b - \beta$ и, кроме того, предположим его достаточно малым для того, чтобы

$$g(\alpha) < 0, \ g(\beta) > 0, \frac{F(\beta) - F(\beta - h)}{h} > 0.$$

Так как $g(x)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то на этом отрезке $[\alpha, \beta]$ есть точки, где она обращается в нуль. Пусть γ — самая левая из таких точек. Из

$$g(\gamma) = \frac{F(\gamma + h) - F(\gamma)}{h} = 0$$

следует $F(\gamma + h) = F(\gamma)$. Если x_0 есть точка на $(\gamma, \gamma + h)$, где $F(x)$ достигает максимума или минимума, то $F'(x_0) = 0 = C$. Но так как

$$g(\alpha) < 0 \quad \text{и} \quad g(\beta - h) = \frac{F(\beta) - F(\beta - h)}{h} > 0$$

в силу сделанного выбора h, то

$$\alpha < \gamma < \beta - h$$

и, значит, $(\gamma, \gamma + h)$ лежит внутри $[\alpha, \beta]$, поэтому и x_0 внутри $[\alpha, \beta]$. Кроме того, раз $F'(x_0)$ существует, то $x_0 \in E$. Итак, мы нашли точку $x_0 \in E$, где $F'(x_0) = C$, и доказательство закончено.

Приложим полученные результаты к изучению поведения суммы тригонометрического ряда, рассмотренного в § 64. Прежде всего докажем такую теорему:

Теорема 3. *Если коэффициенты ряда*

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{66.3}$$

удовлетворяют условию

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n} k(|a_k| + |b_k|) = o(n), \tag{66.4}$$

то сумма обынтегрированного ряда

$$F(x) = \frac{a_0}{2}x + C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{n} \tag{66.5}$$

есть функция непрерывная и равномерно гладкая на $[0, 2\pi]$. *Ряд* (66.3) *сходится в тех и только тех точках, где* $F'(x)$ *существует и притом, если* $N = \left[\frac{1}{h}\right]$, *то имеет место равенство*

$$\frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right] \to 0 \ \text{при} \ h \to 0 \tag{66.6}$$

равномерно относительно x *на* $[0, 2\pi]$.

Для того чтобы иметь право говорить о сумме обынтегрированного ряда, надо убедиться, что он сходится. Но поскольку

$$|a_k| + |b_k| = \frac{\tau(k) - \tau(k-1)}{k} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

то ряд (66.5) мажорируется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|+|b_k|}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau(k)-\tau(k-1)}{k^2}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\tau(k)\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=O\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)<+\infty$$

(мы здесь применили преобразование Абеля). Отсюда ясно, что ряд (66.5) сходится абсолютно и равномерно. Пусть $F(x)$ — его сумма, следовательно, она непрерывна на $[0, 2\pi]$.

Теперь для доказательства теоремы положим

$$A_k=a_k\cos kx+b_k\sin kx\,,\quad B_k=b_k\cos kx-a_k\sin kx\,.$$

Тогда

$$\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}-S_N(x)=\sum_{k=1}^{N}A_k\left(\frac{\sin kh}{kh}-1\right)+\sum_{k=N+1}^{\infty}A_k\frac{\sin kh}{kh}=P+Q\,.$$

Так как в окрестности точки $u=0$ имеем

$$\left|\frac{\sin u}{u}-1\right|=O(u^2)<C|u|\,,$$

то

$$|P|<C|h|\sum_{k=1}^{N}(|a_k|+|b_k|)k\leqslant C\frac{1}{N}\tau(N)=o(1)\,,$$

$$|Q|\leqslant\frac{1}{|h|}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{|a_k|+|b_k|}{k}\leqslant\frac{1}{|h|}\sum_{k=N+1}^{\infty}\tau_k\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{|h|}\sum_{k=N+1}^{\infty}o\left(\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{|h|}o\left(\frac{1}{N}\right)=o(1)$$

и таким образом (66.6) действительно выполнено и притом равномерно относительно x на $[0, 2\pi]$.

Аналогично имеем

$$\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h}=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{\sin^2 kh}{kh}=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}B_k\frac{\sin^2 kh}{kh}+\sum_{k=N+1}^{\infty}B_k\frac{\sin^2 kh}{kh}=P_1+Q_1\,.$$

Так как $|\sin u|\leqslant|u|$, то

$$|P_1|\leqslant|h|\sum_{k=1}^{N}|B_k|k\leqslant|h|\sum_{k=1}^{N}(|a_k|+|b_k|)k=|h|\tau_N=o(1)\,,$$

$$|Q_1|\leqslant\frac{1}{|h|}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{|a_k|+|b_k|}{k}=o(1)\,,$$

как мы уже видели при оценке Q; поэтому

$$F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)=o(h)\,,$$

т. е. $F(x)$ равномерно гладкая на $[0, 2\pi]$.

Наконец, из (66.6) ясно, что ряд (66.3) сходится в тех и только в тех точках, где существует симметрическая производная от $F(x)$, т. е.

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}$$

и сумма $S(x)$ этого ряда равна этой симметрической производной.

Но так как для гладких функций, где есть симметрическая производная, там есть и обычная, то и последнее утверждение теоремы доказано.

Замечание. Доказанная теорема справедлива для лакунарных рядов с коэффициентами, стремящимися к нулю, так как для них выполняется условие теоремы 3 (см. § 65).

Следствие 1. *Если для тригонометрического ряда выполнено условие теоремы 3, то ряд сходится на множестве мощности континуума во всяком интервале* $(a, b) \in [0, 2\pi]$ *и его сумма* $S(x)$ *обладает свойством* D *на множестве тех точек, где она существует.*

В частности, этим свойством обладает всякий лакунарный ряд, если только его коэффициенты стремятся к нулю.

Действительно, в силу теоремы 3 $S(x)$ существует там и только там, где существует $F'(x)$ для гладкой функции $F(x)$, определяемой равенством (66.5) и притом $S(x) = F'(x)$; остается сослаться на теорему 2 и доказательство закончено.

Следствие 2. *Если коэффициенты тригонометрического ряда удовлетворяют условию теоремы 3, то его сумма не может иметь точек разрыва 1-го рода.*

Действительно, в окрестности точки разрыва не было бы выполнено свойство D.

Для случая, когда коэффициенты удовлетворяют более сильному требованию

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{66.7}$$

аналогичный результат нами был уже получен (см. § 42).

Замечание 1. Из теоремы 3 можно получить новое доказательство теоремы Фату (см. § 64) о том, что ряд *с коэффициентами, удовлетворяющими* (66.7), *сходится почти всюду*. Действительно, так как из (66.7) следует $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$, то ряд $F(x)$ есть ряд Фурье. Поэтому сумма $F(x)$ обынтегрированного ряда есть абсолютно непрерывная функция (см. § 40) и, следовательно, $F'(x)$ почти всюду существует. А тогда в силу теоремы 3 ряд (66.3) сходится почти всюду.

Замечание 2. Если выполнено только условие (66.4), но не выполнено условие (66.7), то ряд (66.3) может даже почти всюду расходиться. Примеры этого рода мы встретим в § 3 главы XI.

§ 67. Вторая производная Шварца

Изученное нами в § 66 понятие гладкой функции будет играть большую роль в дальнейшем: но прежде чем переходить к его приложениям, нам надо ввести еще одно новое понятие.

Определение. Пусть функция $F(x)$ определена в некоторой окрестности точки x; если существует предел отношения

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \tag{67.1}$$

при $h \to 0$, то говорят, что $F(x)$ имеет в точке x *вторую производную Шварца* и пишут

$$D^2F(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}. \tag{67.2}$$

Если отношение (67.1) не стремится к пределу при $h \to 0$, то числа

$$\overline{D}^2 F(x) = \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}$$

и

$$\underline{D}^2 F(x) = \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}$$

называют соответственно *верхней и нижней производной Шварца в точке* x.

Покажем, что если $F(x)$ имеет обыкновенную вторую производную $F''(x)$ в точке x, то $D^2 F(x)$ существует и

$$D^2 F(x) = F''(x). \tag{67.3}$$

Действительно, если $F''(x)$ существует в точке x, то $F'(x)$ непрерывна в точке x и потому $F'(u)$ ограничена в окрестности точки x. Ясно, что

$$\Delta_h^2 F = F(x+h)+F(x-h)-2F(x) = \int_0^h [F'(x+t)-F'(x-t)]\,dt. \tag{67.4}$$

Отсюда

$$\left|\frac{\Delta_h^2 F}{h^2} - F''(x)\right| = \left|\int_0^h \frac{2t}{h^2}\left[\frac{F'(x+t)-F'(x-t)}{2t} - F''(x)\right] dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in(0,h)} \left|\frac{F'(x+t)-F'(x-t)}{2t} - F''(x)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0,$$

т. е. (67.3) доказано.

С другой стороны ясно, что $D^2 F(x)$ может существовать без того, чтобы $F''(x)$ существовала; например, если $F(x)$ — непрерывная нечетная функция, то в точке $x = 0$ имеем

$$F(x+h)+F(x-h)-2F(x) = F(h)+F(-h) = 0$$

для всех h, значит, и $D^2 F = 0$ при $x = 0$, тогда как $F''(0)$ может и не существовать, если мы требуем от $F(x)$ только непрерывности и нечетности.

Итак, вторая производная Шварца является прямым обобщением обычной второй производной.

Заметим теперь, что, как и в случае обычной второй производной, имеем: если x есть точка максимума и в ней $D^2 F(x)$ существует, то $D^2 F(x) \leqslant 0$, а в точке минимума $D^2 F(x) \geqslant 0$. Это непосредственно следует из того, что $\Delta_h^2 F(x) \leqslant 0$ при достаточно малом h в точке максимума и $\Delta_h^2 F(x) \geqslant 0$ в точке минимума.

Аналогия идет еще дальше. Именно имеет место теорема.

Т е о р е м а. *Если* $F(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и* $D^2 F(x) \equiv 0$ *на* $a < x < b$, *то* $F(x)$ *линейна на этом отрезке.*

Чтобы доказать это, возьмем любое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a) + \varepsilon(x-a)(x-b).$$

Ясно, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Покажем, что она не может принимать положительных значений на $[a, b]$. Действительно, если бы это было неверно, то в силу непрерывности $\varphi(x)$ она достигала бы своего максимума где-то внутри $[a, b]$, т. е. нашлась бы такая точка x_0 внутри этого отрезка, где заведомо имели бы $D^2\varphi(x_0) \leqslant 0$. Но, с другой стороны,

$$D^2\varphi(x_0) = D^2 F(x_0) + 2\varepsilon,$$

так как вторая производная Шварца от суммы равна сумме вторых производных Шварца, а у слагаемого $\varepsilon(x-a)(x-b)$ есть обычная вторая производная, равная 2ε, значит, и вторая производная Шварца имеет ту же величину.

Но $D^2\varphi(x_0)\leqslant 0$, $D^2F(x_0)=0$, и мы получаем $\varepsilon\leqslant 0$, что противоречит выбору ε.

Итак, $\varphi(x)\leqslant 0$ всюду на $[a, b]$, т. е.

$$F(x)-F(a)-\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\leqslant\varepsilon(x-a)(b-x)\leqslant\varepsilon(b-a)^2.$$

Если бы в выражении для $\varphi(x)$ мы взяли перед ε знак —, мы бы доказали совершенно так же, что $\varphi(x)\geqslant 0$ всюду, т. е.

$$F(x)-F(a)-\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\geqslant-\varepsilon(x-a)(b-x)\geqslant-\varepsilon(b-a)^2.$$

Поэтому

$$\left|F(x)-F(a)-\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right|\leqslant\varepsilon(b-a)^2. \tag{67.5}$$

Но ε совершенно произвольно, поэтому левая часть неравенства (67.5) должна быть равна нулю, откуда

$$F(x)=F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a),$$

а это и значит, что $F(x)$ линейна. Теорема доказана.

Мы теперь применим понятие второй производной Шварца к одному методу суммирования тригонометрических рядов.

§ 68. Метод суммирования Римана

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx, \tag{68.1}$$

коэффициенты которого стремятся к нулю (или хотя бы только ограничены). Тогда, интегрируя его почленно два раза, получим

$$\frac{a_0}{4}x^2+Cx+D-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}.$$

Ясно, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно (в силу ограниченности a_n и b_n); обозначим через $F(x)$ его сумму. Это непрерывная функция, которую мы будем называть *функцией Римана* для тригонометрического ряда (68.1). Итак,

$$F(x)=\frac{a_0}{4}x^2+Cx+D-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}. \tag{68.2}$$

Допустим, что в некоторой точке x_0 функция $F(x)$ имеет Шварцеву производную $D^2F(x_0)$. Тогда мы условимся говорить, что *ряд* (68.1) *суммируется в точке x_0 методом Римана* и его римановская сумма равна $D^2F(x_0)$.

Для того чтобы оправдать это определение, мы докажем теорему Римана:

Теорема 1. *Если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, сходится в точке x_0 к числу S, то он суммируется в этой точке методом Римана к тому же числу S.*

Для доказательства мы прежде всего заметим, что из формулы (68.2) после элементарных тригонометрических преобразований сразу следует

$$\frac{F(x_0+2h)+F(x_0-2h)-2F(x_0)}{4h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2. \tag{68.3}$$

Положим для краткости

$$A_0=\frac{a_0}{2},\ A_n=a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0.$$

Из формулы (68.3) непосредственно видно, что для суммируемости ряда (68.1) методом Римана в точке x_0 к числу S необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{h\to 0}\left[A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right]=S.$$

Таким образом, теорема 1 будет доказана, как только мы докажем теорему 2:

Теорема 2. *Пусть ряд* $A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ *сходится и* S — *его сумма; тогда*

$$\lim_{h\to 0}\left[A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right]=S. \tag{68.4}$$

Переходим к доказательству этого последнего утверждения. Положим

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}A_k.$$

Из сходимости ряда $\sum A_n$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое N, что

$$|R_n|<\varepsilon \quad \text{при} \quad n\geqslant N. \tag{68.5}$$

Напишем теперь

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=A_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2+\sum_{N+1}^{\infty}A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2. \tag{68.6}$$

Если n фиксировано, а $h\to 0$, то $\dfrac{\sin nh}{nh}\to 1$, а потому при достаточно малом h

$$\left|A_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2-(A_0+A_1+\ldots+A_N)\right|<\varepsilon. \tag{68.7}$$

Кроме того,

$$\left|S-\sum_{k=0}^{N}A_k\right|=|R_N|<\varepsilon \tag{68.8}$$

в силу (68.5), а потому из (68.7) и (68.8)

$$\left|A_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2-S\right|<2\varepsilon, \tag{68.9}$$

как только h станет достаточно малым.

Таким образом для доказательства (68.4) достаточно убедиться, что и последнее слагаемое в правой части формулы (68.6) может быть сделано как угодно малым при $h \to 0$. Но мы имеем $A_n = R_{n-1} - R_n$, значит,

$$\sum_{N+1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 = \sum_{N+1}^{\infty} (R_{n-1} - R_n) \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 =$$

$$= R_N \left(\frac{\sin (N+1)h}{(N+1)h}\right)^2 - \sum_{N+1}^{\infty} R_n \left[\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left(\frac{\sin (n+1)h}{(n+1)h}\right)^2\right] \qquad (68.10)$$

(употребленное здесь преобразование Абеля законно, так как при $n \to \infty$ и h любом $R_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 \to 0$. Но в силу (68.5) из (68.10) получаем

$$\left|\sum_{N+1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \sum_{N+1}^{\infty} \left|\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left(\frac{\sin (n+1)h}{(n+1)h}\right)^2\right| =$$

$$= \varepsilon + \varepsilon \sum_{N+1}^{\infty} \left|\int_{nh}^{(n+1)h} \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon \int_{(N+1)h}^{\infty} \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right| dt < \varepsilon + \varepsilon \int_{0}^{\infty} \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right| dt \qquad (68.11)$$

и остается доказать, что последний интеграл конечен, тогда вся правая часть (68.11) меньше $C\varepsilon$, где C постоянно, и так как это верно при любом h, то верно и при $h \to 0$. Так как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = 2\frac{\sin t}{t}\,\frac{t\cos t - \sin t}{t^2},$$

то в окрестности $t = 0$ подынтегральная функция ограничена, кроме того, при $t \to \infty$ имеем

$$\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right| < 2\frac{t+1}{t^3} = O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

а потому интеграл в формуле (68.11) действительно имеет смысл и доказательство закончено.

Замечание. При доказательстве теоремы 2 мы рассматривали ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ как числовой ряд, не интересуясь тем, как он получился из заданного тригонометрического. Можно вообще говорить, что *числовой ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *суммируем методом Римана к числу* S, *если*

$$\lim_{h \to 0}\left[u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right] = S.$$

В таком случае теорема 2 есть утверждение, что *метод Римана регулярен.*

Теперь условимся говорить, что *функциональный ряд* $\sum u_n(x)$ *суммируется методом Римана равномерно к* $S(x)$ *на множестве* E, *если*

$$\lim_{n \to \infty}\left[u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right] = S(x)$$

равномерно относительно x *на* E.

Из доказательства теоремы 2 сразу видно, что равномерная сходимость $\sum u_n(x)$ на E к $S(x)$ влечет его равномерную суммируемость методом Римана к $S(x)$ на E.

Это замечание будет существенно использовано в § 71.

Вернемся теперь к изучению функции Римана $F(x)$ и докажем еще одну теорему Римана.

Теорема 3. *Если коэффициенты тригонометрического ряда стремятся к нулю, то его функция Римана является равномерно гладкой на* $[-\pi, \pi]$.

Эта теорема является немедленным следствием результатов § 66. Действительно, если мы проинтегрируем ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{68.12}$$

где $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, то получим ряд с коэффициентами порядка $o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\frac{a_0}{2} x + C - \sum \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{n}. \tag{68.13}$$

Интегрируя ряд (68.13), получим по теореме § 66 такой ряд, сумма которого должна быть равномерно гладкой. Но эта сумма $F(x)$ есть сумма ряда, получающегося от двукратного интегрирования (68.12), а потому это и есть функция Римана для ряда (68.12), и теорема доказана.

Этой теоремой мы воспользуемся в § 70, а пока рассмотрим применение метода Римана к рядам Фурье.

§ 69. Приложение метода суммирования Римана к рядам Фурье

Метод Римана, как и методы Фейера и Абеля—Пуассона, в приложении к рядам Фурье дает следующий результат:

Теорема. *Ряд Фурье от любой суммируемой функции $f(x)$ суммируется методом Римана почти всюду к этой функции.*

Действительно, пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{69.1}$$

Имеем $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$, так как это коэффициенты Фурье. По теореме § 40 ряд Фурье можно почленно интегрировать; иначе говоря, если

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\, dt,$$

то

$$F(x) = C + \frac{a_0}{2} x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{n}, \tag{69.2}$$

причем в силу абсолютной непрерывности $F(x)$ ряд (69.2) всюду сходится к ней и даже равномерно на $[-\pi, \pi]$. Далее, если $\Phi(x)$ — неопределенный интеграл от $F(x)$, то

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{4} x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

и, следовательно, функция Римана $\Phi(x)$ для ряда (69.1) есть результат двукратного интегрирования $f(x)$. Но так как $F(x)$ непрерывна, то $\Phi'(x) = F(x)$

в каждой точке; далее $F'(x) = f(x)$ почти всюду, таким образом $\Phi''(x) = f(x)$ почти всюду, но так как $D^2\Phi(x) = \Phi''(x)$ там, где $\Phi''(x)$ существует (§ 67), то $D^2\Phi(x) = f(x)$ почти всюду, а потому ряд (69.1) суммируется почти всюду к $f(x)$ методом Римана.

Теорема доказана.

Теперь мы начнем прилагать метод Римана уже к общим тригонометрическим рядам, и, в частности, к очень важному вопросу о единственности разложения функции в тригонометрический ряд.

§ 70. Теорема единственности Кантора

Пользуясь методом суммирования Римана, мы можем решить следующий важный вопрос: может ли существовать два различных тригонометрических ряда, сходящихся в каждой точке к одной и той же функции $f(x)$? Ответ на этот вопрос является отрицательным. Чтобы убедиться в этом, докажем следующую важную теорему:

Теорема Кантора*). *Если тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{70.1}$$

сходится к нулю в каждой точке x на $[0, 2\pi]$, то все его коэффициенты равны нулю.

По теореме Кантора коэффициенты ряда (70.1) стремятся к нулю (здесь можно опираться даже не на теорему Кантора — Лебега, а на теорему самого Кантора — см. § 62, замечание). Строим функцию Римана $F(x)$ для ряда (70.1), она непрерывна на всей бесконечной прямой. По теореме § 68 ряд (70.1) должен суммироваться к нулю в каждой точке, т. е.

$$D^2 F(x) = 0 \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Тогда по теореме § 67 имеем

$$F(x) = Ax + B. \tag{70.2}$$

Но, с другой стороны, раз $F(x)$ есть функция Римана для ряда (70.1), то

$$F(x) = \frac{a_0}{4} x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \tag{70.3}$$

Из (70.2) и (70.3) получаем

$$\frac{a_0}{4} x^2 + A_1 x + B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}, \tag{70.4}$$

где A_1 и B_1 — новые константы. Но правая часть (70.4) имеет период 2π, значит и левая тоже, а это возможно только при

$$a_0 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 = 0. \tag{70.5}$$

Теперь имеем

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \tag{70.6}$$

Ряд (70.6) сходится равномерно; поэтому (см. § 12) его коэффициенты явля-

*) Cantor [1].

ются коэффициентами Фурье от его суммы, но она есть постоянное число B_1, а потому

$$\frac{a_n}{n^2} = \frac{b_n}{n^2} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$a_n = b_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{70.7}$$

Из (70.5) и (70.7) следует, что ряд (70.6) имеет все коэффициенты равными нулю и таким образом теорема Кантора доказана. Он сразу же обобщил эту теорему, доказав следующее предложение:

Если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, то все его коэффициенты равны нулю.

В самом деле, рассуждая, как при доказательстве предыдущей теоремы, мы видим, что рассматриваемый ряд имеет коэффициенты, стремящиеся к нулю, и его функция Римана $F(x)$ должна быть линейной на каждом интервале, где ряд сходится к нулю, так как там $D^2F(x) \equiv 0$. Но $F(x)$ должна быть гладкой в силу теоремы 3 § 68. Поэтому она не может иметь угловых точек. Следовательно, она не может состоять из различных прямолинейных отрезков, а должна быть просто линейной. А если так, то доказательство заканчивается, как в предыдущей теореме, т. е. доказываем, что все коэффициенты ряда равны нулю.

Замечание. Теорему Кантора можно высказать в следующей более общей форме: *если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется к нулю методом Римана всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, то все его коэффициенты равны нулю.*

Действительно, при доказательстве теоремы мы опирались только на то, что коэффициенты ряда стремятся к нулю и $D^2F(x) = 0$ всюду, кроме, быть может, конечного числа точек.

Следствие. *Пусть $f(x)$ — функция с периодом 2π конечная в каждой точке* $[0, 2\pi]$. *Тогда не существует двух различных тригонометрических рядов, каждый из которых сходится к $f(x)$ всюду на* $[0, 2\pi]$, *кроме, быть может, конечного числа точек.*

Действительно, допустим, что существовали бы два таких тригонометрических ряда; тогда их разность есть ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{70.8}$$

у которого не все коэффициенты равны нулю, и, однако, он сходится к нулю всюду, кроме, быть может, конечного числа точек. Но мы уже видели, что это невозможно.

Здесь, конечно, то же требование сходимости можно заменить на суммируемость методом Римана (но при этом заранее потребовать, чтобы коэффициенты стремились к нулю).

Теорема о единственности разложения функции в тригонометрический ряд допускает значительные обобщения. Мы посвятим этому вопросу главу XIV, здесь же ограничимся формулировкой наиболее важных результатов. Для этого введем определение.

Определение. Множество E, лежащее на $[-\pi, \pi]$, назовем *M-множеством*, если существует тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

у которого не все коэффициенты равны нулю, сходящийся к нулю всюду на $[-\pi, \pi]$ вне множества E.

Если множество E не есть M-множество, то мы будем его называть U-множеством *).

Приняв это определение, мы можем теперь две предыдущие теоремы сформулировать так: *если E есть пустое или конечное множество, то оно U-множество.*

Сам Кантор доказал еще, что всякое приводимое множество (т. е. такое, у которого производное множество является конечным или счетным) есть опять U-множество. Впоследствии Юнг (*Young*[1]) доказал, что любое счетное множество есть U-множество (см. § 5 главы XIV).

Напротив, легко доказать, что *любое множество E, $mE > 0$, есть M-множество.* В самом деле, возьмем совершенное множество $P \in E$, $mP > 0$, и положим $f(x) = 1$ на P и $f(x) = 0$ вне P. В силу принципа локализации (см. § 33) ряд $\sigma(f)$ сходится к нулю на каждом смежном к P интервале, а поэтому и всюду вне E. Таким образом, существует тригонометрический ряд, сходящийся к нулю всюду вне P, но с отличными от нуля коэффициентами (например

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} mP).$$

Следовательно, E есть M-множество.

В течение долгого времени существовала гипотеза, что, напротив, любое множество меры нуль (а не только конечные и счетные) должно быть U-множеством. Эта гипотеза была опровергнута Д. Е. Меньшовым[1], построившим первый пример совершенного M-множества меры нуль (см. доказательство в § 12 главы XIV).

§ 71. Принцип локализации Римана для общих тригонометрических рядов

Введенная в рассмотрение Риманом функция $F(x)$ играет важную роль не только в вопросе о единственности разложения функции в тригонометрический ряд, но и при изучении вопроса о его сходимости или расходимости.

Напомним, что для рядов Фурье была доказана следующая теорема (см. § 33): сходимость или расходимость ряда $\sigma(f)$ в точке x зависит только от поведения функции $f(x)$ в окрестности точки x.

Допустим теперь, что рассматривается уже не ряд Фурье, а произвольный тригонометрический ряд. Оказывается, что тогда можно судить о его сходимости, изучая функцию Римана. Именно имеет место теорема, которую по аналогии с предыдущим, можно высказать в такой форме:

Для любого тригонометрического ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, сходимость или расходимость ряда в некоторой точке x зависит только от поведения Римановой функции $F(x)$ в окрестности точки x.

Эта несколько расплывчатая формулировка будет далее уточнена (см. стр. 198). Риман доказал это утверждение так: он строил функцию $\lambda(x)$, равную единице на $[\alpha, \beta]$, равную нулю вне (a, b) и имеющую на $[0, 2\pi]$ непрерывные производные до 4-го порядка включительно. После этого он доказывал, что разность

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) - \frac{1}{\pi} \int_a^b F(t)\,\lambda(t)\,\frac{d^2}{dt^2} D_n(t - x)\,dt \qquad (71.1)$$

*) Из определения сразу вытекает, что всякая часть U-множества есть U-множество; напротив, множество, содержащее M-множество, есть само M-множество.

стремится к нулю равномерно на $[\alpha, \beta]$ и отсюда уже приходил к нужному заключению.

В настоящее время идея введения функции $\lambda(x)$ полностью сохраняется, но доказательство теоремы Римана обычно проводят, пользуясь теорией *формального умножения рядов* *); кстати, эта теория дает и многие другие полезные результаты, в чем мы убедимся в главе XIV.

Итак, сначала введем понятие формального произведения двух тригонометрических рядов. Для удобства изложения будем записывать тригонометрический ряд в комплексной форме

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \qquad (c_{-n} = \bar{c}_n).$$

Рассмотрим два тригонометрических ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \tag{71.2}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \gamma_n e^{inx}. \tag{71.3}$$

Условимся называть их *формальным произведением* ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K_n e^{inx}, \tag{71.4}$$

где

$$K_n = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p \gamma_{n-p} \tag{71.5}$$

в предположении, что все ряды (71.5), определяющие K_n, сходятся ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Во всем дальнейшем нас будет интересовать тот случай, когда $\sum |\gamma_n| < +\infty$. При этих условиях ряд (71.3) сходится абсолютно и равномерно на $[-\pi, \pi]$ и является рядом Фурье от некоторой функции $\lambda(x)$. Что касается ряда (71.2), то он будет любым**), лишь бы

$$c_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \pm\infty.$$

Докажем следующие две леммы Райхмана:

Лемма 1. *Если $c_n \to 0$ при $n \to \pm\infty$ и если ряд $\sum |\gamma_n|$ сходится, то все K_n, определяемые формулой* (71.5), *имеют смысл и $K_n \to 0$ при $n \to \pm\infty$.*

---

*) Эта теория была создана Райхманом (см. Raichman [1], см. также Zygmund [12]).

**) Полезно здесь же отметить, что если ряд (71.2) является рядои Фурье от некоторой функции $f(x)$, то формальное произведение превращается в ряд Фурье от $f(x)\lambda(x)$. Действительно, если обозначить через K_n коэффициенты Фурье от $f(x)\lambda(x)$, то

$$K_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\lambda(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \gamma_q e^{iqt}\,dt =$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \gamma_q \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i(n-q)t}\,dt = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} c_{n-q}\gamma_q = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p \gamma_{n-p}.$$

Здесь почленное интегрирование было законно, так как мы предположили $\sum |\gamma_n| < +\infty$, а потому ряд $\sigma(\lambda)$ равномерно сходится.

В самом деле, если $M = \max |c_n|$, то при $n \to +\infty$

$$|K_n| \leqslant M \sum_{p=-\infty}^{\left[\frac{n}{2}\right]} |\gamma_{n-p}| + \max_{p<\left[\frac{n}{2}\right]} |c_p| \sum_{p=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{\infty} |\gamma_{n-p}| \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{q=n-\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty} |\gamma_q| + \max_{p>\left[\frac{n}{2}\right]} |c_p| \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} |\gamma_q| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

и аналогично проводится доказательство для $n \to -\infty$. Лемма 1 доказана.

Условимся говорить, что ряд (71.3) *быстро сходится к* S, если он сходится к S и если сходится ряд

$$\Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n + \ldots,$$

где

$$\Gamma_n = \sum_{k=n}^{\infty} |\gamma_k|.$$

Так, например, если коэффициенты ряда (71.3) имеют порядок $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, то $\Gamma_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ и, следовательно, ряд (71.3) быстро сходится. Впоследствии мы будем часто брать в качестве ряда (71.3) ряд $\sigma(\lambda)$, где $\lambda(x)$ — функция, имеющая три непрерывных производных. Тогда коэффициенты ряда $\sigma(\lambda)$ будут иметь порядок $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ (см. § 24) и $\sigma(\lambda)$ будет быстро сходиться к $\lambda(x)$.

Переходим к доказательству следующей леммы.

Лемма 2. *Если $c_n \to 0$ при $n \to \pm\infty$ и ряд* (71.3) *быстро сходится к нулю на некотором множестве E, то формальное произведение* (71.4) *сходится к нулю равномерно на множестве E.*

В самом деле, пусть $x_0 \in E$ и

$$R_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \gamma_n e^{inx}.$$

Имеем для $k > 0$

$$|R_{-k}(x_0)| = \left|\sum_{-k}^{\infty} \gamma_n e^{inx_0}\right| = \left|\sum_{-(k+1)}^{-\infty} \gamma_n e^{inx_0}\right| = |R_{k+1}(x_0)| \leqslant \Gamma_{k+1} \qquad (71.6)$$

и, значит, ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |R_k(x)|$$

сходится равномерно для $x \in E$.

Тогда

$$Q_m(x_0) = \sum_{n=-m}^{n=+m} K_n e^{inx_0} = \sum_{n=-m}^{n=+m} e^{inx_0} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p \gamma_{n-p} =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p e^{ipx_0} \sum_{n=-m}^{n=+m} \gamma_{n-p} e^{i(n-p)x_0} =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p e^{ipx_0} \sum_{q=-m-p}^{m-p} \gamma_q e^{iqx_0} = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p e^{ipx_0} R_{-m-p}(x_0) - \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p e^{ipx_0} R_{m-p+1}(x_0).$$

Поэтому

$$|Q_m(x_0)| \leqslant \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} |c_p| |R_{-m-p}(x_0)| + \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} |c_p| |R_{m-p-1}(x_0)|,$$

и принимая во внимание неравенства (71.6), мы теми же рассуждениями, как в лемме 1, убеждаемся, что $Q_m(x_0) \to 0$ при $m \to \infty$ и притом равномерно для $x_0 \in E$, так как оценка $R_k(x_0)$ через Γ_k или Γ_{k+1} справедлива для всех $x \in E$.

Из этих двух лемм можно вывести теорему:

Теорема 1. *Если ряд* (71.3) *быстро сходится к некоторой функции* $\lambda(x)$, *а* $c_n \to 0$, *то ряд*

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [K_n - \lambda(x) c_n] e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K_n e^{inx} - \lambda(x) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \qquad (71.7)$$

сходится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Чтобы убедиться в этом, положим

$$\gamma_0^* = \gamma_0 - \lambda(x),$$
$$\gamma_n^* = \gamma_n \qquad \text{для} \quad n \neq 0$$

и составим формальное произведение $\sum K_n^* e^{inx}$ рядов $\sum c_n e^{inx}$ и $\sum \gamma_n^* e^{inx}$. Правда, у последнего ряда γ_0^* не есть постоянная величина, но нетрудно убедиться, что доказательство леммы 2 не изменилось бы, если бы предположить γ_0 ограниченной функцией от x, что имеет место в нашем случае. Поэтому мы можем применить лемму 2, так как ряд $\sum \gamma_n^* e^{inx}$ быстро сходится к нулю на $[-\pi, \pi]$ и мы найдем, что $\sum K_n^* e^{inx}$ быстро сходится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$. Но

$$K_n^* = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} c_p \gamma_{n-p}^* = c_n [\gamma_0 - \lambda(x)] + \sum_{p \neq n}' c_p \gamma_{n-p} = K_n - \lambda(x) c_n,$$

а поэтому

$$\sum K_n e^{inx} - \lambda(x) \sum c_n e^{inx}$$

сходится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$, и теорема 1 доказана.

Соединяя лемму 2 и только что доказанную теорему 1, мы можем высказать такое предложение, которым часто будем пользоваться в дальнейшем.

Следствие 1. *Пусть* $\lambda(x)$ — *функция, у которой ряд Фурье быстро сходится и* $\sum c_n e^{inx}$ — *ряд с коэффициентами* $c_n \to 0$ *при* $n \to \pm\infty$. *Тогда формальное произведение ряда* $\sum c_n e^{inx}$ *и ряда Фурье для* $\lambda(x)$ *сходится к нулю всюду, где* $\lambda(x) = 0$ (*даже если ряд* $\sum c_n e^{inx}$ *расходится*). *В тех же точках, где* $\lambda(x) \neq 0$, *оно расходится, если расходится ряд* $\sum c_n e^{inx}$ *и сходится к* $\lambda(x_0) S(x_0)$, *если* $\sum c_n e^{inx}$ *сходится к* $S(x_0)$.

Замечание 1. Отметим, что это утверждение можно усилить. Именно, если предположить $\lambda(x) \neq 0$ в некоторой точке, то

$$\left.\begin{aligned} \overline{\lim}\, Q_n(x_0) &= \lambda(x_0)\, \overline{\lim}\, S_n(x_0), \\ \underline{\lim}\, Q_n(x_0) &= \lambda(x_0)\, \underline{\lim}\, S_n(x_0) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \lambda(x_0) > 0$$

и

$$\left.\begin{aligned} \overline{\lim}\, Q_n(x_0) &= \lambda(x_0)\, \underline{\lim}\, S_n(x_0), \\ \underline{\lim}\, Q_n(x_0) &= \lambda(x_0)\, \overline{\lim}\, S_n(x_0) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \lambda(x_0) < 0.$$

Это непосредственно вытекает из рассмотрения частных сумм ряда

$$\sum K_n e^{inx} - \lambda(x) \sum c_n e^{inx},$$

который, как мы видели, сходится к нулю. Поэтому, в частности, если $\overline{\lim}\, |S_n(x_0)| = +\infty$, то и $\overline{\lim}\, |Q_n(x_0)| = +\infty$.

Этот результат будет нами существенно использован в главе XIV.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает еще

С л е д с т в и е 2. *Если ряд Фурье для* $\lambda(x)$ *быстро сходится и* $\sum c_n e^{inx}$ *равномерно сходится на* E *к* $S(x)$, *то формальное произведение равномерно сходится на* E *к* $\lambda(x)S(x)$. *Если на множестве* F *имеем* $|\lambda(x)| > a > 0$, *то равномерная сходимость формального произведения на* E *влечет равномерную сходимость* $\sum c_n e^{inx}$ *на нем.*

З а м е ч а н и е 2. В следствиях 1 и 2 слова «сходимость» или «равномерная сходимость» могут быть заменены на «суммируемость» или «равномерная суммируемость» методом Римана. В самом деле, по теореме 1

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} [K_n - \lambda(x) c_n] e^{inx}$$

сходится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$. В силу замечания к теореме 2 § 68 отсюда следует, что этот ряд равномерно суммируем к нулю методом Римана на $[-\pi, \pi]$, а это значит, что разность рядов

$$\sum K_n e^{inx} \quad \text{и} \quad \lambda(x) \sum c_n e^{inx}$$

равномерно суммируется к нулю методом Римана на $[-\pi, \pi]$. Отсюда сразу и вытекает нужное заключение.

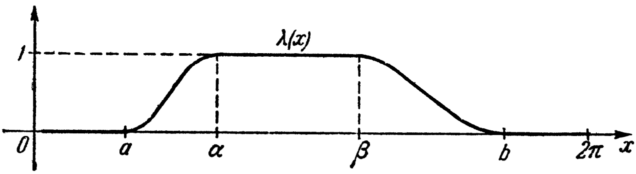

Рис. 14

Мы имеем теперь возможность доказать следующую важную теорему:

Т е о р е м а 2. *Если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется методом Римана к нулю в каждой точке некоторого интервала* (a, b), *то он сходится к нулю в каждой точке* (a, b) *и притом равномерно на всяком отрезке, целиком лежащем внутри* (a, b).

Пусть $\lambda(x) = 1$ на $[\alpha, \beta]$, $\lambda(x) = 0$ вне (a, b) и $\lambda(x)$ интерполируется между $[a, \alpha]$ и $[b, \beta]$ как угодно, лишь бы она имела непрерывные производные до 3-го порядка включительно (см. рис. 14). Мы уже говорили, что в таких условиях ряд $\sigma(\lambda)$ быстро сходится. Пусть

$$\sigma(\lambda) = \sum \gamma_n e^{inx}.$$

Составим формальное произведение (71.4) заданного ряда и ряда $\sigma(\lambda)$. Так как $\lambda(x) = 0$ вне (a, b), то в силу следствия 1 ряд (71.4) сходится к нулю вне (a, b) и, значит, суммируется вне (a, b) к нулю методом Римана. Кроме того, в силу следствия 1 и замечания 2 о суммируемости ряд (71.4) суммируется к нулю методом Римана в каждой точке (a, b), поскольку мы предположили, что это имеет место для ряда (71.2) на (a, b). Итак, ряд (71.4) суммируется методом Римана к нулю в каждой точке на $[-\pi, \pi]$. Если так, то по теореме § 70 (см. замечание к ней) он имеет все коэффициенты равными нулю. Но по теореме 1 настоящего параграфа ряд

$$\sum K_n e^{inx} - \lambda(x) \sum c_n e^{inx}$$

сходится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$. Раз все $k_n = 0$, то это значит, что

$$\lambda(x) \sum c_n e^{inx}$$

сходится равномерно к нулю на $[-\pi, \pi]$. Но $\lambda(x) = 1$ на $[\alpha, \beta]$, поэтому $\sum c_n e^{inx}$ сходится равномерно к нулю на $[\alpha, \beta]$, и доказательство теоремы 2 закончено.

Теперь мы можем выразить в точной форме и доказать теорему, которая несколько образно была сформулирована в начале этого параграфа. Именно мы имеем следующую теорему, известную под названием принципа локализации Римана.

Принцип локализации Римана. *Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ функции Римана для двух тригонометрических рядов, с коэффициентами, стремящимися к нулю; если эти функции равны на некотором интервале (a, b) или, хотя бы, если их разность есть линейная функция на (a, b), то разность данных тригонометрических рядов есть ряд, сходящийся к нулю всюду на (a, b) и притом равномерно во всяком отрезке $[\alpha, \beta]$, целиком лежащем внутри (a, b).*

Для доказательства теоремы рассмотрим два тригонометрических ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю. Пусть (71.2) есть разность этих рядов, а $F_1(x)$ и $F_2(x)$ их римановы функции. Тогда по условию теоремы риманова сумма $F(x)$ для ряда (71.2) есть линейная функция на (a, b). Если так,

$$D^2 F(x) = 0 \quad \text{на} \quad (a, b).$$

то Следовательно, ряд (71.2) суммируется к нулю методом Римана в каждой точке интервала (a, b) и остается применить теорему 2.

Из принципа локализации Римана сразу следует справедливость высказанного в начале этого параграфа утверждения: сходимость или расходимость ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, зависит лишь от поведения функции Римана.

Действительно, если для двух рядов с коэффициентами, стремящимися к нулю, имеем $F_1(x) = F_2(x)$ на (a, b), то сходимость или расходимость обоих рядов в любой точке $x \in (a, b)$ может иметь место только одновременно (и притом если они сходятся, то имеют одинаковую сумму). Именно в этом смысле и надо понимать, что сходимость или расходимость зависит только от поведения функции Римана.

Полезно еще отметить, что доказанный здесь общий принцип локализации Римана содержит как частный случай принцип локализации Римана для рядов Фурье (см. § 33). Действительно, если два заданных ряда являются рядами Фурье от $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ получаются в результате двукратного интегрирования $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (см. § 70), а потому, если $f_1(x) = f_2(x)$ на (a, b), то $F_1(x) - F_2(x)$ будет линейной на этом интервале, и если общий принцип локализации уже доказан, то можно утверждать, что $\sigma(f_1) - \sigma(f_2)$ сходится к нулю на (a, b) всюду и притом равномерно на $[\alpha, \beta]$, лежащем внутри (a, b).

В главе XIV мы увидим ту роль, которую играет установленный здесь принцип локализации Римана.

§ 72. Теорема дю Буа-Реймона

Пусть $f(x)$ — функция, конечная в каждой точке $[-\pi, \pi]$. Мы уже видели (см. § 70), что не может существовать двух различных тригонометрических рядов, сходящихся к ней всюду на $[-\pi, \pi]$. Но если существует один такой ряд, должен ли он быть ее рядом Фурье?

Вопрос, разумеется, имеет смысл только для суммируемой $f(x)$, так как иначе ряд Фурье просто нельзя было бы написать (мы всегда говорим лишь о рядах Фурье — Лебега).

Заметим, что сходимость тригонометрического ряда в каждой точке вовсе не влечет того, чтобы он был рядом Фурье. Действительно, например, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

сходится всюду, так как это ряд по синусам с монотонно убывающими коэффициентами (см. § 30); однако он не является рядом Фурье (см. § 40).

Поэтому вопрос естественно поставить так: пусть $f(x)$ конечна в каждой точке и суммируема. Пусть существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней всюду на $[-\pi, \pi]$. Будет ли этот ряд ее рядом Фурье?

Мы здесь дадим на этот вопрос положительный ответ в том случае, когда $f(x)$ ограниченная функция; именно в таком виде теорема была доказана Лебегом, обобщившим первоначальный результат дю Буа-Реймона*). Но прежде чем доказывать эту теорему, мы должны убедиться в справедливости следующей леммы:

Лемма. *Если $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и*

$$m \leqslant D^2 F(x) \leqslant M \quad \text{на} \quad (a, b),$$

то для любых x_0 и h таких, что $a \leqslant x_0 - 2h < x_0 + 2h \leqslant b$, имеем

$$m \leqslant \frac{F(x_0+2h) + F(x_0-2h) - 2F(x_0)}{4h^2} \leqslant M.$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Psi(x) = F(x_0) + (x - x_0)\frac{F(x_0+2h) - F(x_0-2h)}{4h} + \\ + \frac{(x-x_0)^2}{2} \cdot \frac{F(x_0+2h) + F(x_0-2h) - 2F(x_0)}{4h^2}.$$

Ясно, что $\Psi(x)$ есть многочлен второй степени относительно x, причем

$$\Psi(x_0+2h) = F(x_0+2h), \; \Psi(x_0) = F(x_0) \; \text{и} \; \Psi(x_0-2h) = F(x_0-2h),$$

т. е. разность

$$r(x) = F(x) - \Psi(x)$$

обращается в нуль при $x = x_0 - 2h$, x_0 и $x_0 + 2h$. Кроме того, $r(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и

$$D^2 r(x) = D^2 F(x) - \frac{F(x_0+2h) + F(x_0-2h) - 2F(x_0)}{4h^2}.$$

Так как $r(x)$ имеет минимум и максимум где-то внутри $(x_0 - 2h, x_0 + 2h)$, пусть в каких-то точках x_1 и x_2, и в них заведомо $D^2 r(x_1) \geqslant 0$ и $D^2 r(x_2) \leqslant 0$, то

*) Дю Буа-Реймон (du Bois-Reymond [2]) рассматривал лишь случай ограниченных функций, интегрируемых в смысле Римана.

отсюда сразу ясно, что

$$D^2F(x_2) \leqslant \frac{F(x_0+2h)+F(x_0-2h)-2F(x_0)}{4h^2} \leqslant D^2F(x_1),$$

откуда и следует справедливость леммы.

Мы теперь можем доказать теорему:

Теорема дю Буа-Реймона — Лебега. *Если $f(x)$ ограничена на $[-\pi, \pi]$ и существует тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{72.1}$$

сходящийся к ней всюду на этом отрезке, то этот ряд есть ее ряд Фурье.

Прежде всего заметим, что из сходимости ряда (72.1) следует $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$ (см. § 62). Поэтому можно построить функцию Римана и получить, как в § 68

$$\frac{F(x_0+2h)+F(x_0-2h)-2F(x_0)}{4h^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2. \tag{72.2}$$

В силу теоремы Римана (см. § 68, теорема 1) имеем в каждой точке

$$D^2F(x) = f(x). \tag{72.3}$$

Но $f(x)$ по условию ограничена; значит, по предыдущей лемме

$$\left|\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}\right| \leqslant M, \tag{72.4}$$

где M постоянное (и это для любых h и любых x, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$). Далее заметим, что $f(x)$, как сумма всюду сходящегося ряда непрерывных функций, измерима, а значит, будучи измеримой и ограниченной, она суммируема.

Из равномерной сходимости (72.2) следует, что он является рядом Фурье от функции, стоящей в левой части равенства, т. е.

$$a_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2} \cos nx\, dx \tag{72.5}$$

и аналогично

$$b_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2} \sin nx\, dx. \tag{72.6}$$

Но

$$D^2F(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}.$$

Поэтому в силу (72.3)

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2} = f(x).$$

Если мы теперь заметим, что в силу (72.4) подынтегральные выражения в интегралах (72.5) и (72.6) ограничены при любых x и h одним и тем же числом M (это верно для всякого n), то можно совершить предельный переход под знаком интеграла, а потому

$$a_n = \lim_{h\to 0} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2} \cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

и аналогично

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

а это и требовалось доказать.

Замечание. Мы предположили $f(x)$ ограниченной, но указанная теорема допускает значительные обобщения. Можно также не требовать сходимости ряда в каждой точке $[0, 2\pi]$ (см. об этом главу XIV, § 4).