ОБОЗНАЧЕНИЯ

$[a, b]$ означает множество всех x, таких, что $a \leqslant x \leqslant b$; соответственно $(a, b]$ для $a < x \leqslant b$; (a, b) для $a < x < b$ и $[a, b)$ для $a \leqslant x < b$.

$[x]$ — целая часть числа x.

$(x) = x - [x]$.

$\{x\}$ — разность между x и ближайшим целым (по недостатку или по избытку).

$x \equiv x_0 \pmod{a}$ — разность $x - x_0$ делится на a.

$\uparrow$ монотонно не убывает; $\downarrow$ монотонно не возрастает; $\uparrow a$ (и $\downarrow a$) — стремится к a, монотонно не убывая (соответственно не возрастая).

$f(x) \in C\,[a, b]$ — $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,
$f(x) \in L\,[a, b]$ — $f(x)$ суммируема на $[a, b]$,
$f(x) \in L^p\,[a, b]$ — $f(x)$ суммируема в степени p на $[a, b]$.

$$\|f\|_{L^p[a,b]} = \left\{\int_a^b |f|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty\,; \quad \|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|\,.$$

Если ясно, о каком отрезке идет речь, то будет употребляться краткое обозначение $\|f\|_p$, или $\|f\|_C$.

$\|f\|_\infty$ — см. § 9 Вводного материала.

$f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ означает: существует константа C такая, что $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|^\alpha$ для любых x_1 и x_2 на отрезке, где $f(x)$ определена.

o, O, $\sim$, $\approx$ см. § 11 Вводного материала.

$\sigma(f)$ — ряд Фурье функции $f(x)$.

$x \in E$ — точка x принадлежит множеству E.

$E_1 \subset E_2$ — любая точка из E_1 принадлежит E_2.

ВВОДНЫЙ МАТЕРИАЛ

I. ТЕОРЕМЫ ИЗ АНАЛИЗА

§ 1. Преобразование Абеля

Пусть $u_0, u_1, \ldots, v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ — любые действительные числа; положим

$$V_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n.$$

Тогда для любых m и n имеем

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n - u_m V_{m-1} \tag{1.1}$$

(если $m = 0$, то условимся считать $V_{-1} = 0$).

Эта формула, носящая название *преобразования Абеля*, доказывается мгновенно; надо только заметить, что $v_k = V_k - V_{k-1}$, подставить это выражение в левую часть и сгруппировать члены.

При $m = 0$ получаем, в частности,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n. \tag{1.2}$$

Важность формул (1.1) и (1.2) станет ясной, если заметить, что они играют ту же роль, как интегрирование по частям: подобно тому, как вычисление интеграла $\int u\, dv$ иногда удобно свести к вычислению интеграла $\int v\, du$, мы и здесь, полагая

$$\Delta u_k = u_k - u_{k+1},$$

$$\Delta V_k = V_k - V_{k+1},$$

можем переписать (1.1) в виде

$$\sum_{k=m}^{n-1} \Delta u_k V_k = - \sum_{k=m}^{n} u_k \Delta V_{k-1} + u_m V_{m-1} - u_n V_n, \tag{1.3}$$

т. е. свести вычисление одной из рассматриваемых сумм к другой, что часто оказывается полезным.

В частности, это бывает удобно, когда одна из рассматриваемых последовательностей монотонно убывает (так как из $u_k \downarrow$ следует $\Delta u_k \geqslant 0$ для всех k).

Из преобразования Абеля сразу получаем следствие.

Следствие. *Если все* $u_k \geqslant 0$ *и* $u_k \downarrow$, *а* $|V_k| \leqslant M$ *для* $m \leqslant k \leqslant n$, *то*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k v_k\right| \leqslant 2\, u_m M. \tag{1.4}$$

Действительно,

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k v_k\right| \leqslant M \left|\sum_{k=m}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) + u_n + u_m\right| \leqslant 2\, u_m M.$$

Рассмотрим теперь случай, когда вместо чисел v_n мы имеем функции $v_n(x)$, определенные на некотором отрезке $[a, b]$. Полагая

$$V_n(x) = v_0(x) + \ldots + v_n(x),$$

имеем лемму:

Лемма Абеля. *Если* $u_n \downarrow 0$ *и*

$$|V_n(x)| \leqslant M, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n(x)$$

сходится равномерно на $[a, b]$ *и для его суммы* $S(x)$ *справедливо неравенство*

$$|S(x)| \leqslant M u_0, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{1.5}$$

Действительно, положим

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k(x).$$

Тогда по формуле (1.2)

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) V_k(x) + u_n V_n(x), \tag{1.6}$$

откуда

$$S_n(x) - u_n V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) V_k(x).$$

Так как

$$|(u_k - u_{k+1}) V_k(x)| \leqslant (u_k - u_{k+1}) M, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1.7}$$

а ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} M (u_k - u_{k+1})$$

с неотрицательными членами сходится (в силу $u_n \downarrow 0$) и имеет сумму Mu_0, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k - u_{k+1}) V_k(x)$$

сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$. Тогда из $u_n \downarrow 0$ и (1.6) следует, что $S_n(x)$ стремится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $S(x)$, для которой справедливо (1.5), и лемма доказана.

Лемму Абеля можно обобщить. Предварительно введем определение.

Определение. Последовательность чисел $\{u_n\}$ имеет *ограниченное изменение*, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta u_n| < +\infty. \tag{1.8}$$

Ясно, что если $u_n \downarrow 0$, то условие (1.8) имеет место.

Лемма Абеля сохраняет силу, если условие $u_n \downarrow 0$ заменить условием: последовательность $\{u_n\}$ имеет ограниченное изменение.

Действительно, доказательство полностью сохраняет силу, если только в правой части (1.7) вместо $u_k - u_{k+1}$ написать $|u_k - u_{k+1}| = |\Delta u_k|$.

§ 2. Вторая теорема о среднем значении

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две функции, интегрируемые по Риману на некотором отрезке $[a, b]$. Тогда, если $f(x)$ монотонна на $[a, b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\,dx, \tag{2.1}$$

где $a \leqslant \xi \leqslant b$.

В случае, когда $f(x)$ не только монотонна на $[a, b]$, но и неотрицательна на этом отрезке, формула упрощается и принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx, \quad \text{если} \quad f(x)\downarrow, \tag{2.2}$$

и

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\,dx, \quad \text{если} \quad f(x)\uparrow \tag{2.3}$$

(см., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, § 294).

§ 3. Выпуклые кривые и выпуклые последовательности

Определение 1. Кривую $y = \varphi(x)$ условимся называть *выпуклой*, если для любых двух ее точек A и B точки дуги AB лежат ниже хорды AB или на ней (рис. 1). Аналогично, кривая называется *вогнутой*, если точки дуги лежат выше хорды или на ней.

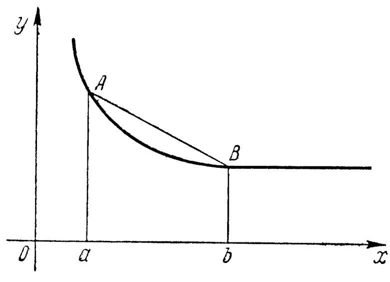

Рис. 1

Например, если $\varphi(x)$ имеет производную второго порядка и $\varphi''(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, то $\varphi(x)$ выпукла на этом отрезке.

Действительно, если $a < x < b$, то для любого $h > 0$, если только оно достаточно мало для того, чтобы $x + h$ и $x - h$ все еще лежали на (a, b), имеем

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x_1), \quad \text{где} \quad x < x_1 < x + h;$$

$$\varphi(x-h) - \varphi(x) = -h\varphi'(x_2), \quad \text{где} \quad x - h < x_2 < x.$$

Поэтому

$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x) = h[\varphi'(x_1) - \varphi'(x_2)] = h(x_1 - x_2)\varphi''(\xi) \geqslant 0.$$

(Здесь $x - h < \xi < x + h$.) Итак,

$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x) \geqslant 0,$$

т. е.

$$\varphi(x) \leqslant \frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h)}{2},$$

откуда, в силу непрерывности $\varphi(x)$ следует, что любая точка дуги кривой между $x - h$ и $x + h$ лежит ниже или на хорде, т. е. кривая выпукла.

Теорема. *Если $F(x)$ выпуклая на $[a, b]$ функция, то ее можно представить в виде*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x \varphi(t)\,dt, \tag{3.1}$$

где $\varphi(t)$ — неубывающая функция на $[a, b]$. Обратно, каждая функция $F(x)$, представимая в такой форме, выпукла на $[a, b]$.

См., например, Натансон [M. 16], стр. 547.

Впоследствии нам придется подробнее знакомиться со свойствами выпуклых функций; в данное время мы говорим о них лишь в связи с понятием выпуклой последовательности.

Определение 2. Последовательность $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ называется *выпуклой*, если, полагая

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1},$$

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1},$$

имеем

$$\Delta^2 a_n \geqslant 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что если кривая $y = \varphi(x)$ выпукла на $0 \leqslant x < +\infty$, то точки $a_n = \varphi(n)$ образуют выпуклую последовательность.

Укажем ряд свойств выпуклых последовательностей.

1) *Если последовательность $\{a_n\}$ выпукла и ограничена сверху, то $a_n \downarrow$.*

Надо доказать, что $\Delta a_n \geqslant 0$. Если бы это было неверно, то нашлось бы такое m, что $\Delta a_m < 0$. Но тогда в силу выпуклости при любом $k \geqslant m$ имеем $\Delta a_k < 0$ и $|\Delta a_k| \geqslant |\Delta a_m|$; так как

$$a_n - a_m = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_{m+1} - a_m) =$$

$$= -\sum_{k=m}^{n-1} \Delta a_k = \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta a_k| \geqslant (n-m)\,|\Delta a_m| \to \infty$$

при $n \to \infty$, но a_n ограничено сверху, и мы приходим к противоречию.

2) *Если $\{a_n\}$ выпукла и $a_n \to 0$, то $a_n \downarrow 0$.*

Действительно, из $a_n \to 0$ следует ограниченность a_n сверху; тогда в силу только что доказанного $a_n \downarrow$; вместе с $a_n \to 0$ это дает $a_n \downarrow 0$.

3) *Если $\{a_n\}$ выпукла и ограничена, то*

$$n\Delta a_n \to 0 \tag{3.2}$$

и

$$\sum (n+1)\Delta^2 a_n < +\infty. \tag{3.3}$$

Действительно, мы уже видели, что при этих условиях $a_n \downarrow$. В силу ограниченности снизу, тогда числа a_n имеют конечный предел. Пусть

$$\lim a_n = a;$$

тогда

$$a_0 - a = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) + \ldots,$$

где ряд, стоящий в правой части, имеет члены, монотонно убывающие, и он сходится. Поэтому и $n\,\Delta a_n \to 0$ в силу известной теоремы из теории числовых рядов.

Далее, применяя преобразование Абеля, находим

$$\sum_{m=0}^{n} \Delta a_m = \sum_{m=0}^{n} 1\cdot \Delta a_m = \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)\,\Delta^2 a_m + (n+1)\,\Delta a_n,$$

и так как $(n+1)\,\Delta a_n \to 0$, а

$$\sum_{m=0}^{n} \Delta a_m = a_0 - a_n \to a_0 - a \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то

$$\sum_{m=0}^{n-1} (m+1)\,\Delta^2 a_m \to a_0 - a, \qquad \text{т. е. ряд } \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\,\Delta^2 a_m$$

сходится, а это и надо было доказать.

Замечание. Если $\{a_n\}$ выпукла и $a_n \to 0$, то доказанное предложение тем более справедливо.

II. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ, СУММИРОВАНИЕ

§ 4. Ряды с монотонно убывающими членами

Теорема 1 (теорема Коши). *Если $u_n \downarrow 0$, то ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Действительно, в силу монотонности u_n имеем при любом k

$$2^{k-1} u_{2^k} \leqslant \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} u_n \leqslant 2^{k-1} u_{2^{k-1}}$$

и остается заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=2^{k-1}+1}^{2^k} u_s.$$

Теорема 2. *Если $a_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, то, полагая $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$, имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\Delta a_n = +\infty.$$

Положим $u_n = \sum_{k=1}^{n} k\,\Delta a_k$. В силу $a_n \downarrow 0$ имеем $\Delta a_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Значит все $u_n \geqslant 0$ и $\uparrow$. Надо доказать, что $u_n \to \infty$. Если бы это было неверно, то

$$u_n \uparrow a, \text{ где } a \neq +\infty.$$

Тогда $u_n = a - \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \downarrow 0$, и следовательно, так как

$$u_n - u_{n-1} = n\Delta a_n = (a - \varepsilon_n) - (a - \varepsilon_{n-1}) = \Delta\varepsilon_{n-1},$$

то

$$\Delta a_n = \frac{\Delta\varepsilon_{n-1}}{n}.$$

В силу $a_n \to 0$ и $\Delta\varepsilon_k \geqslant 0$ имеем

$$a_n = \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Delta\varepsilon_{k-1}}{k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \Delta\varepsilon_{k-1} = \frac{1}{n}\varepsilon_{n-1},$$

а потому $na_n \to 0$.

Но, применяя к сумме, изображающей u_n, преобразование Абеля, находим

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} k\Delta a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1},$$

а так как $u_n \to a$, а $na_n \to 0$, то

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \to a,$$

что противоречит условию $\Sigma a_n = +\infty$.

Для дальнейшего полезно ввести следующее определение.

Определение 1. Пусть Σu_n — сходящийся ряд с $u_n \downarrow 0$. Полагаем

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k.$$

Будем говорить, что этот *ряд удовлетворяет условию* (L), если

$$r_n = O(u_n). \tag{4.1}$$

Если члены ряда убывают не медленнее некоторой геометрической прогрессии, т. е. если

$$u_{n+1} \leqslant \theta u_n, \qquad 0 < \theta < 1,$$

то он удовлетворяет условию (L), но обратное заключение, разумеется, неверно, как показывает хотя бы такой пример:

$$u_{2n-1} = u_{2n} = \theta^n, \quad n = 1, 2, \ldots; \ 0 < \theta < 1.$$

Покажем, что если ряд удовлетворяет условию (L), то каково бы ни было $\theta < 1$, его можно разбить на конечное число l рядов (l зависит от θ) так, чтобы члены каждого из них убывали не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем θ.

Действительно, условие (4.1) означает, что

$$r_n < cu_n,$$

где c — постоянное. Пусть θ задано. Выберем число l так, чтобы

$$l = \left[\frac{c}{\theta}\right]. \tag{4.2}$$

Тогда в силу монотонного убывания чисел u_n и в силу (4.2) имеем

$$(l+1)\,u_{n+l} \leqslant \sum_{k=n}^{k=n+l} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} u_k \leqslant c\,u_n, \tag{4.3}$$

а потому в силу (4.3)

$$u_{n+l} \leqslant \frac{c}{l+1} u_n \leqslant \theta u_n .$$

Следовательно, все l рядов

$$\begin{aligned} &u_1 + u_{1+l} + u_{1+2l} + \ldots, \\ &u_2 + u_{2+l} + u_{2+2l} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_l + u_{2l} \ \ + u_{3l} \ \ \ + \ldots, \end{aligned}$$

на которые можно разбить наш ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, , убывают не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем θ.

Докажем теперь теорему.

Теорема 3. *Если ряд Σu_n удовлетворяет условию* (L), *то*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = O\left(\frac{1}{u_n}\right) . \tag{4.4}$$

Действительно, имеем из определения

$$u_n = r_n - r_{n+1},$$

а потому из $\frac{r_n}{u_n} < c$

$$\frac{r_n}{r_n - r_{n+1}} < c ,$$

откуда

$$r_n < c\,(r_n - r_{n+1}),$$

т. е.

$$c r_{n+1} < (c - 1)\, r_n$$

или

$$r_{n+1} < \theta r_n , \qquad \text{где} \qquad \theta = \frac{c-1}{c} < 1 .$$

Но тогда

$$u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \leqslant r_n \sum_{k=1}^{n} \frac{c}{r_k} \leqslant c\left[\frac{r_n}{r_1} + \frac{r_n}{r_2} + \ldots + \frac{r_n}{r_n}\right] \leqslant$$

$$\leqslant c\,(1 + \theta + \ldots + \theta^{n-1}) = O(1),$$

а это и значит, что (4.4) доказано.

Определение 2. Будем говорить, что *возрастающая последовательность натуральных чисел*

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

удовлетворяет условию (L), если ряд $\sum \frac{1}{n_k}$ удовлетворяет условию (L), т. е.

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k} = O\left(\frac{1}{n_m}\right) . \tag{4.5}$$

В частности, это имеет место для одного важного класса последовательностей, называемых лакунарными.

Определение 3. Последовательность натуральных чисел

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

называется *лакунарной*, если существует такое $\lambda > 1$, что

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4.6}$$

Ясно, что всякая лакунарная последовательность удовлетворяет условию (L), так как

$$n_{k+s} \geqslant \lambda^s n_k \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

а потому

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k} \leqslant \frac{1}{n_m} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^s} = O\left(\frac{1}{n_m}\right).$$

В общем случае последовательность, удовлетворяющую условию (L), можно разбить на конечное число лакунарных (так как она разбивается на конечное число таких, у которых члены растут не медленнее, чем члены некоторой возрастающей геометрической прогрессии).

Замечание 1. Если последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию (L), то и $\{n_k^2\}$ также. Действительно,

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k^2} \leqslant \frac{1}{n_m} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \frac{1}{n_m} O\left(\frac{1}{n_m}\right) = O\left(\frac{1}{n_m^2}\right).$$

Замечание 2. Если последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию (L), то

$$\sum_{k=1}^{m} n_k = O(n_m). \tag{4.7}$$

Действительно, по условию имеем

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k} < C \frac{1}{n_m}, \tag{4.8}$$

где C — постоянная. Ясно, что $C > 1$.

Положим

$$r_m = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k}.$$

Тогда $\frac{1}{n_m} = r_m - r_{m+1}$ и (4.8) принимает вид

$$r_m < C(r_m - r_{m+1}),$$

откуда

$$r_{m+1} < \frac{C-1}{C} r_m$$

или, полагая $\theta = \frac{C-1}{C}$,

$$r_{m+1} < \theta r_m \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{4.9}$$

где $0 < \theta < 1$. Но

$$\frac{1}{n_m} < r_m$$

и, с другой стороны, в силу (4.8) $r_m < \frac{C}{n_m}$, следовательно

$$n_m < \frac{C}{r_m}\,.$$

Отсюда

$$\frac{1}{n_m}\sum_{k=1}^{m} n_k < r_m \sum_{k=1}^{m} \frac{C}{r_k} = C\left[1 + \frac{r_m}{r_{m-1}} + \frac{r_m}{r_{m-2}} + \ldots + \frac{r_m}{r_1}\right] <$$

$$< C\,[1 + \theta + \theta^2 + \ldots] = \frac{C}{1-\theta} = K,$$

где K — постоянная, а это и доказывает (4.7).

§ 5. Линейные методы суммирования

Существует целый ряд приемов, позволяющих приписать «сумму» расходящемуся ряду; эти приемы носят название *методов суммирования рядов*. Наиболее употребительными являются линейные методы суммирования, которые строятся по следующему принципу: пусть A — некоторая матрица с бесконечным числом строк и столбцов

$$A = \left\|\begin{matrix} a_{00} \ldots a_{0n} \ldots \\ a_{10} \ldots a_{1n} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n0} \ldots a_{nn} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\|.$$

Вместо рассмотрения обычных частных сумм S_n ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ рассматривают числа

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k\,, \tag{5.1}$$

предполагая, что ряды в правых частях этих равенств сходятся ($n = 0, 1, 2, \ldots$); если при этом существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S\,,$$

то число S называют «*суммой*» ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_n$ и говорят, что метод, определяемый матрицей, *суммирует* ряд $\sum u_n$ к числу S.

Методы, определенные таким образом, носят название *линейных* потому, что если такой метод суммирует ряд Σu_n к сумме S, то ряд $\Sigma C u_n$, где C постоянно, суммирует к CS и если ряд Σv_n суммируется к S_1, то ряд $\Sigma(u_n + v_n)$ суммируется к $S + S_1$.

Метод суммирования принято называть *регулярным*, если всякий сходящийся ряд суммируется этим методом к числу S, являющемуся его суммой в классическом смысле слова, т. е.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Теплиц (Toeplitz[1]) доказал, что *для регулярности линейного метода, определяемого матрицей A, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие три условия:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \qquad (k = 0,\ 1, \ldots)$.
2. *Если* $A_n = a_{n0} + a_{n1} + \ldots + a_{nk} + \ldots$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 1$.

3. *Если* $K_n = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$, *то* $K_n < C$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *где* C *— постоянное.*

Принято называть их *«условиями Теплица»*, а удовлетворяющие им матрицы — *T-матрицами.*

Мы не будем доказывать, что эти условия необходимы для регулярности метода (см. об этом, например, Харди [М. 2.] § 3.2), что касается их достаточности, то она получается мгновенно. Действительно, пусть

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Положим $S_n = S + \varepsilon_n$, тогда $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Но

$$\sigma_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} S_p = S \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} \varepsilon_p = S A_n + \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} \varepsilon_p.$$

Так как $A_n \to 1$ при $n \to \infty$ в силу условия 2, то остается доказать, что $\lim_{n \to \infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} \varepsilon_p = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ дано; выберем N столь большим, что $|\varepsilon_p| < \varepsilon$ для $p > N$, тогда

$$\left| \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} \varepsilon_p \right| \leqslant \left| \sum_{p=0}^{N} a_{np} \varepsilon_p \right| + \varepsilon \sum_{p=N+1}^{\infty} |a_{np}|.$$

В первой сумме число членов ограничено, $a_{np} \to 0$ при $n \to \infty$, числа ε_p ограничены в совокупности; значит, при $n \to \infty$ эта сумма стремится к 0; вторая сумма не превосходит εC, где C — константа из условия 3, а ε взято произвольно малым, поэтому правая часть может быть сделана как угодно малой с ростом n, и теорема доказана.

Принято называть матрицу A *положительной*, если все $a_{nk} \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n = 0, 1, \ldots)$. Ясно, что если для положительной матрицы выполнено второе условие Теплица, то выполнено и третье.

Матрицу A называют *T*-матрицей*, если она удовлетворяет двум первым условиям Теплица, но не обязательно удовлетворяет третьему (в силу предыдущего замечания, для положительных матриц этот случай невозможен).

Сделаем еще одно общее замечание о матрицах T; пусть S_k не стремится к пределу, но зато существует $\lim_{k_n \to \infty} S_{k_n} = S$, где $\{k_n\}$ — некоторая возрастающая последовательность из натуральных чисел. Мы можем тогда сказать, что последовательность S_k суммируется к S некоторым методом Теплица. Действительно, если положить

$$\begin{aligned} a_{nk_n} &= 1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ a_{nk} &= 0, \qquad \text{если } k \neq k_n, \end{aligned}$$

то полученная матрица удовлетворяет всем трем условиям Теплица и при этом $\sigma_n = \Sigma\, a_{nk} S_k = S_{k_n} \to S$ при $n \to \infty$, т. е. последовательность S_n суммируется к S этим методом.

§ 6. Метод средних арифметических [или $(C, 1)$]

В качестве простейшего примера методов, определяемых матрицами T, рассмотрим классический случай, а именно метод средних арифметических [или $(C, 1)$ *)], введенный Чезаро. Чезаро предложил приписывать расходяще-

*) Обозначение $(C, 1)$ станет понятно, когда будет введено понятие методов (C, α) (см. Добавления, § 9).

муся ряду сумму S, если $\lim \sigma_n = S$, где

$$\sigma_n = \frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1},$$

и доказал регулярность этого метода суммирования.

Если положить

$$a_{n_k} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & (k = 0, 1, \ldots, n), \\ 0 & (k > n), \end{cases}$$

то метод средних арифметических определяется матрицей $A = \|a_{nk}\|$ и сразу видно, что здесь три условия Теплица удовлетворены, т. е. A есть T-матрица.

Замечание 1. Метод средних арифметических (или метод $(C, 1)$) является также и вполне регулярным, т. е. если

$$S_n \to +\infty,$$

то и

$$\sigma_n \to +\infty.$$

Действительно, если M любое, то можно найти такое N, что $S_n > M$ при $n \geqslant N$. Тогда

$$\sigma_n = \frac{S_0 + \ldots + S_N}{n+1} + \frac{S_{N+1} + \ldots + S_n}{n+1}.$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$, а для второго имеем

$$\frac{S_{N+1} + \ldots + S_n}{n+1} > M \frac{n-N}{n+1} > \frac{M}{2},$$

как только $n > 2N + 1$, а потому σ_n становится как угодно большим, если n достаточно велико, т. е. $\sigma_n \to \infty$, а это и надо было доказать.

Замечание 2. Говоря о методе $(C, 1)$, необходимо отметить одну формулу, которая в дальнейшем часто будет употребляться, а именно: если S_n — частные суммы, а σ_n — средние арифметические для ряда Σu_k, то

$$S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k u_k. \tag{6.1}$$

Действительно,

$$S_n - \sigma_n = S_n - \frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (S_n - S_k) =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} + \ldots + u_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k\, u_k.$$

§ 7. Метод Абеля

Пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ — числовой ряд и x действительное число, $0 \leqslant x < 1$.

Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ *суммируется методом Абеля к числу* S (или кратко: суммируется A к числу S), если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ сходится для $0 \leqslant x < 1$ и

$$\lim_{x \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = S. \tag{7.1}$$

Условие (7.1) можно переписать в другой форме. С этой целью заметим, что для $0 \leqslant x < 1$ имеем тождественно

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k \,. \tag{7.2}$$

Действительно, пусть $0 \leqslant x < 1$ и ряд слева в (7.2) сходится. Возьмем такое r, что $x < r < 1$. Тогда, так как $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k r^k$ сходится, найдется такое C, что $|u_k r^k| \leqslant C \quad (k = 0, 1, \ldots)$.

Поэтому

$$|S_n x^n| \leqslant C x^n \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^n}\right) < \frac{C}{1-r} x^n \frac{1}{r^n},$$

а это выражение стремится к нулю при $n \to \infty$. Но в силу преобразования Абеля

$$\sum_{k=0}^{n} u_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} S_k (x^k - x^{k+1}) + S_n x^n = (1-x) \sum_{k=0}^{n} S_k x^k + S_n x^n,$$

и так как $S_n x^n \to 0$, то (7.2) доказано. Доказательство аналогично, если предположить сходимость ряда в правой части (7.2).

Поэтому условие (7.1) можно также записывать в виде

$$\lim_{x \to 1} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = S \tag{7.3}$$

и говорить, что ряд суммируем к числу S методом Абеля, если выполнено (7.3).

Докажем, что имеет место

Теорема Фробениуса. *Если ряд суммируем* (C, 1) *к числу* S, *то он суммируем методом Абеля к тому же числу.*

Действительно, так как

$$(n+1)\sigma_n = S_0 + S_1 + \ldots + S_n,$$

то, применяя преобразование Абеля к правой части (7.2), находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\sigma_k x^k \,. \tag{7.4}$$

Но так как для $0 < x < 1$ имеем

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$$

или

$$1 = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k, \tag{7.5}$$

то, умножая обе части (7.5) на S и вычитая из (7.4), находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k - S = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - S) x^k =$$

$$= (1-x)^2 \sum_{k=0}^{N} (k+1)(\sigma_k - S) x^k + (1-x)^2 \sum_{N+1}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - S) x^k \,. \tag{7.6}$$

Если ε задано, то можно выбрать N так, чтобы

$$|\sigma_{k+1} - S| < \varepsilon \quad \text{для} \quad k \geqslant N,$$

а тогда вторая сумма в правой части (7.6) меньше ε, что же касается первой суммы, то она стремится к нулю, так как число членов в ней фиксировано. Отсюда вытекает выполнение (7.1) и теорема доказана.

Чтобы сравнить метод Абеля с ранее рассмотренными линейными методами суммирования, можно было бы вместо непрерывного параметра r рассматривать любые последовательности r_n, где $r_n \to 1$ при $n \to \infty$. Однако более целесообразно рассмотреть вместо матриц $||a_{nk}||$ совокупность функций $a_k(x)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $0 \leqslant x < 1$. Если мы положим

$$\sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k,$$

предполагая, что ряд в правой части сходится при $x \to 1$, и если

$$\lim_{x \to 1} \sigma(x) = S,$$

то можно рассматривать S как «сумму» ряда Σu_k, определяемую таким методом суммирования с непрерывным параметром $x \to 1$.

Совершенно так же, как была доказана регулярность методов, определяемых матрицами Теплица, мы видим, что такой метод будет регулярным, если выполнены условия:

1°. $\lim\limits_{x \to 1} a_k(x) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots)$.

2°. Если $A(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_k(x)$, $0 \leqslant x < 1$, то $A(x) \to 1$ при $x \to 1$.

3°. Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k(x)| = f(x)$, то $|f(x)| < C$, $0 \leqslant x < 1$,

где C — постоянное.

В частности *метод Абеля регулярен*, так как в этом случае

$$a_k(x) = x^k - x^{k+1},$$

и сразу видно, что все три условия удовлетворены. Более того, метод Абеля *вполне регулярен*, так как, если $S_k \to +\infty$, то можно для любого M найти такое k_0, что $S_k > M$ при $k > k_0$; тогда

$$(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{k_0} S_k x^k + (1-x)\sum_{k=k_0+1}^{\infty} S_k x^k >$$

$$> (1-x)\sum_{k=0}^{k_0} S_k x^k + M x^{k_0+1}.$$

Если $x \to 1$, то первое слагаемое правой части есть $o(1)$, поскольку k_0 фиксировано, а второе стремится к M, а потому $(1-x)\,\Sigma\, S_k x^k$ может быть сделано больше любого наперед заданного числа, если x достаточно близко к 1, а это и значит, что Σu_n суммируется A к $+\infty$.

Представляется очень полезным наряду с методом A рассмотреть еще один метод суммирования, тесно с ним связанный. Именно, вместо действительных чисел x, $0 \leqslant x < 1$, стремящихся к 1, мы будем рассматривать комплексные числа. Мы будем говорить, что $z \to 1$ *по некасательному к окружности пути*, если точка z при своем стремлении к точке M (1.0) не выходит из некоторого угла величины 2θ $\left(\theta < \frac{\pi}{2}\right)$ с вершиной в M и биссектрисой, совпадающей с Ox. Из геометрических соображений (см. рис. 2) ясно, что это условие можно записать в виде

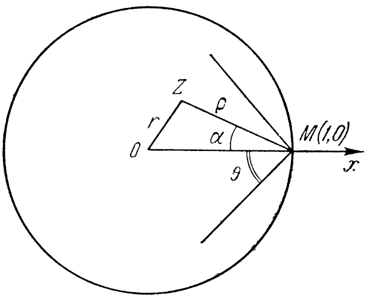

Рис. 2

$$|1 - z| < C(1 - |z|), \tag{7.7}$$

где C — некоторое постоянное. Действительно,

$$|1 - z| = \varrho, \quad 1 - |z| = 1 - r,$$

$$r^2 = 1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos \alpha,$$

$$2\varrho \cos \alpha - \varrho^2 = 1 - r^2 = (1 - r)(1 + r),$$

$$\frac{\varrho}{1 - r} = \frac{1 + r}{2 \cos \alpha - \varrho} < \frac{1 + r}{2 \cos \theta - \varrho}. \tag{7.8}$$

При $z \to 1$ имеем $\varrho \to 0$, знаменатель в правой части ограничен снизу, а числитель не превосходит 2, а это и значит, что $\frac{\varrho}{1 - r} < C$.

Теперь введем определение.

Определение. Ряд Σu_n называется *суммируемым к S методом A^** (или кратко суммируемым A^* к S), если

$$\lim_{z \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = S,$$

когда $z \to 1$ по любому некасательному пути (иначе говоря, если $z \to 1$, то

$$\left|\frac{1 - z}{1 - |z|}\right| < C,$$

где C постоянно).

Ясно, что если ряд суммируем A^*, то он суммируем A.

Докажем теперь, что *метод A^** также *регулярен*. Чтобы убедиться в этом, заметим, что когда мы применяем метод суммирования, описанный в § 7, то функции, фигурирующие в этом методе, можно считать и функциями комплексного переменного. Вместо $x \to 1$ по действительной оси можно считать, что $x \to 1$ по некоторому множеству, для которого точка (1,0) является предельной. Регулярность метода продолжает сохранять силу, если в условиях 1°, 2° и 3° считать $x \to 1$ по этому множеству.

В частности, полагая $a_k(x) = x^k - x^{k+1}$, видим, что все условия регулярности выполнены, если $\frac{|1 - x|}{1 - |x|} < C$, т. е. метод A^* регулярен.

III. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЧИСЕЛ, РЯДОВ И ИНТЕГРАЛОВ

§ 8. Числовые неравенства

1. Для любых двух чисел a и b и любого $p \geqslant 1$ имеем

$$|a+b|^p \leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p). \tag{8.1}$$

Действительно, если

$$|a| > |b|,$$

то

$$|a+b| \leqslant 2|a|$$

и

$$|a+b|^p \leqslant 2^p|a|^p \leqslant (|a|^p+|b|^p)\cdot 2^p.$$

Если же

$$|a| \leqslant |b|,$$

то

$$|a+b| \leqslant 2|b|$$

и

$$|a+b|^p \leqslant 2^p|b|^p \leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p).$$

2. Для любых двух чисел a и b и $0 \leqslant p < 1$ имеем

$$|a+b|^p \leqslant |a|^p+|b|^p. \tag{8.2}$$

Положим

$$t = \left|\frac{b}{a}\right|.$$

Неравенство будет справедливо, если мы докажем, что

$$(1+t)^p \leqslant 1+t^p \quad \text{при} \quad 0 \leqslant p < 1. \tag{8.3}$$

Но неравенство (8.3) справедливо потому, что функция $(1+t)^p - (1+t^p)$ обращается в нуль при $t=0$ и убывает с ростом t, значит она всюду неположительна.

3. Если a и b — любые положительные, а p и q такие, что $p>1$, $q>1$ и

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

то

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{8.4}$$

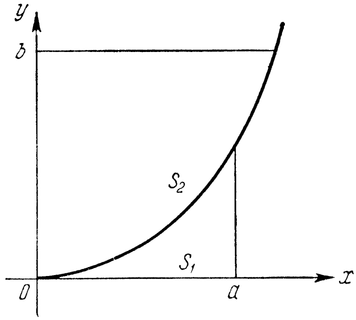

Рис. 3

Положим $p = 1+\alpha$, $\alpha>0$, и построим график функции $y = x^\alpha$ (рис. 3). Так как это функция возрастающая, то обратная функция $x = y^{\frac{1}{\alpha}}$ определена однозначно. Так как

$$S_1 = \frac{a^p}{p} = \int_0^a x^\alpha\,dx$$

и

$$S_2 = \frac{b^q}{q} = \int_0^b y^{\frac{1}{\alpha}}\,dy$$

(потому что $1+\frac{1}{\alpha}=1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1}=q$), то нужное неравенство вытекает из того, что площадь прямоугольника со сторонами a и b не превосходит суммы площадей S_1+S_2.

В случае $b=a^\alpha$ и только в этом случае неравенство превращается в равенство.

Совершенно так же можно доказать, что если $\varphi(u)$ непрерывна при $u\geqslant 0$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(u)$ возрастает и $\varphi(u)\to\infty$, а $\psi(u)\to\infty$ — обратная к ней функция, то, полагая

$$\Phi(x)=\int_0^x\varphi(u)\,du,\quad \Psi(y)=\int_0^y\psi(v)\,dv,$$

имеем

$$ab\leqslant\Phi(a)+\Psi(b)\tag{8.5}$$

для любых положительных a и b.

Такие функции Φ и Ψ иногда называют взаимно дополнительными. (В предыдущем примере было $\varphi(u)=u^\alpha$, где $\alpha=p-1$, $\psi(v)=v^{\frac{1}{\alpha}}$). Неравенство (8.5) называется *неравенством Юнга*.

§ 9. Неравенство Гельдера

Пусть

$$f(x)\in L^p\,[\alpha,\beta],\quad \varphi(x)\in L^q\,[\alpha,\beta],$$

где

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\tag{9.1}$$

Докажем справедливость неравенства

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\left(\int_\alpha^\beta|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\alpha^\beta|\varphi(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\tag{9.2}$$

или кратко

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\|f\|_p\,\|\varphi\|_q\tag{9.3}$$

(см. обозначения для норм).

Действительно, полагая для краткости

$$a=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p},\qquad b=\frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|_q},$$

имеем в силу (8.4)

$$|f(x)\,\varphi(x)|=\|f\|_p\,\|\varphi\|_q\,a\,b\leqslant\|f\|_p\,\|\varphi\|_q\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right).\tag{9.4}$$

Но

$$a^p=\frac{|f(x)|^p}{\int_\alpha^\beta|f|^p\,dx},\qquad b^q=\frac{|\varphi(x)|^q}{\int_\alpha^\beta|\varphi|^q\,dx}.$$

Интегрируя по x, находим

$$\int_\alpha^\beta a^p\,dx=1\quad и\quad\int_\alpha^\beta b^q\,dx=1$$

и в соединении с (9.1) и (9.4) дает

$$\int_\alpha^\beta |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant \|f\|_p \|\varphi\|_q,$$

а это и есть (9.3).

Замечание 1. Полагая $p = q = 2$, получаем известное неравенство Буняковского

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_\alpha^\beta |f|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\alpha^\beta |\varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9.5}$$

или

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \|f\|_2 \|\varphi\|_2.$$

Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности чисел, причем ряды

$$\sum_1^\infty |a_n|^p \quad и \quad \sum_1^\infty |b_n|^q$$

сходятся, то совершенно также имеем

$$\sum_1^\infty |a_n b_n| \leqslant \left(\sum_1^\infty |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_1^\infty |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{9.6}$$

при

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Замечание 2. Неравенство (9.3) сохраняет силу при $p = 1$ и $q = \infty$, если условиться считать

$$\|\varphi\|_\infty = \lim_{q\to\infty} \|\varphi\|_q. \tag{9.7}$$

Покажем, что предел в правой части (9.7) существует, если функция существенно ограничена, и он равен ее существенной верхней грани. При этом под существенной верхней гранью понимается такое число M, что почти всюду на (α, β) имеем

$$|\varphi(x)| \leqslant M \tag{9.8}$$

и, с другой стороны, для любого $M' < M$ найдется такое множество E, $mE > 0$, где $|\varphi(x)| > M'$.

Действительно, если (9.8) выполнено почти всюду, то

$$\|\varphi\|_q = \left\{\int_\alpha^\beta |\varphi(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant M(\beta-\alpha)^{\frac{1}{q}},$$

и поэтому

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} \|\varphi\|_q \leqslant M.$$

С другой стороны, если $M' < M$ и $|\varphi(x)| > M'$ на E, то

$$\|\varphi\|_q \geqslant M'(mE)^{\frac{1}{q}},$$

а потому

$$\lim_{q\to\infty} \|\varphi\|_q \geqslant M',$$

а так как M' любое, лишь бы $M' < M$, то

$$\lim_{q\to\infty} \|\varphi\|_q \geqslant M,$$

откуда и вытекает

$$M = \lim_{q\to\infty} \|\varphi\|_q = \|\varphi\|_\infty. \tag{9.9}$$

Теперь мы видим, что если B — класс существенно ограниченных функций, то для $f \in L$ и $\varphi \in B$ неравенство (9.3) справедливо, если понимать под $\|\varphi\|_\infty$ существенную верхнюю грань для φ, определяемую формулой (9.9).

Из неравенства Гельдера выведем одно следствие, весьма полезное в дальнейшем.

Пусть $g(t)$ ограниченная, периодическая с периодом 2π, неотрицательная и такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = 1. \tag{9.10}$$

Пусть $f(x) \in L^p$. Если

$$\sigma(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t-x)\,dt,$$

то

$$\|\sigma(x)\|_p \leqslant \|f(x)\|_p. \tag{9.11}$$

Действительно, в силу неравенства Гельдера

$$|\sigma(x)|^p \leqslant \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,g(t-x)\,dt\right\}^p =$$

$$= \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \{g(t-x)\}^{\frac{1}{p}} \{g(t-x)\}^{\frac{1}{q}}\,dt\right\}^p \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p g(t-x)\,dt \left\{\int_{-\pi}^{\pi} g(t-x)\,dt\right\}^{\frac{p}{q}} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p g(t-x)\,dt,$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma(x)|^p\,dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p g(t-x)\,dt\right\} dx$$

и, меняя порядок интегрирования,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma(x)|^p\,dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \left\{\int_{-\pi}^{\pi} g(t-x)\,dx\right\} dt. \tag{9.12}$$

В силу периодичности $g(t)$ имеем из (9.10) и (9.12)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\sigma(x)|^p\,dx \leqslant \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^p\,dt$$

и, возводя в степень $\frac{1}{p}$, получим искомое неравенство.

§ 10. Неравенство Минковского

Пусть $f(x) \in L^p[a, b]$ и $\varphi(x) \in L^p[a, b]$ для $p > 1$. Покажем, что тогда

$$\left(\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{10.1}$$

т. е.

$$\|f + \varphi\|_p \leqslant \|f\|_p + \|\varphi\|_p. \tag{10.2}$$

Прежде всего заметим, что если $\Psi(x) \in L^p$, то $|\Psi(x)|^{p-1} \in L^q$. Действительно,

$$(|\Psi(x)|^{p-1})^q = |\Psi(x)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} = |\Psi(x)|^p.$$

Поэтому, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^p\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^{p-1} |f(x)|\,dx + \int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^{p-1} |\varphi(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Если разделить обе части полученного неравенства на $\left(\int_a^b |f + \varphi|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$,

то получим

$$\left(\int_a^b |f + \varphi|^p\,dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |\varphi|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

и так как $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, то это заканчивает доказательство.

Совершенно также можно доказать, что при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{10.3}$$

В неравенстве Минковского был оценен интеграл от степени суммы двух функций, когда эта степень $p \geqslant 1$. Если $p < 1$, то это неравенство теряет силу. Но имеет место неравенство

$$\int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^p\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|^p\,dx + \int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx \quad (0 \leqslant p < 1). \tag{10.4}$$

Это немедленно следует из (8.2).

Совершенно аналогично имеем для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant p < 1 . \tag{10.5}$$

§ 11. *O*- и *o*-соотношения для рядов и интегралов

Пользуясь принятым теперь в математической литературе обозначением, мы будем писать

$$u_n = o(v_n),$$

если $v_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и $\frac{u_n}{v_n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Если же $\frac{u_n}{v_n}$ ограничено, то будем писать

$$u_n = O(v_n) .$$

Если существуют две положительные константы A и B, для которых при достаточно больших n

$$A \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant B,$$

то будем писать

$$u_n \sim v_n,$$

и, наконец,

$$u_n \approx v_n$$

будет означать

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

(в этом случае принято говорить, что u_n и v_n асимптотически равны).

Докажем, что

1) из $u_n = O(v_n)$ следует $\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$,

2) из $u_n \sim v_n$ следует $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Действительно, для случая 1) это вытекает из неравенства

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{n} u_n}{\sum_{k=0}^{n} v_k} \right| \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n} |u_k|}{\sum_{k=0}^{n} v_k} \leqslant M,$$

а для случая 2) из неравенства

$$A \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{\sum_{k=0}^{n} v_k} \leqslant B.$$

Для случая $u_n = o(v_n)$ и $u_n \approx v_n$ аналогичные соотношения вообще не имеют места, однако

3) если $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k \to \infty$ и $u_n = o(v_n)$, то $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$;

4) если $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k \to \infty$ и $u_n \approx v_n$, то $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \approx \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

Для доказательства 3), если $\varepsilon > 0$ задано, найдем такое N, что

$$|u_n| \leqslant \varepsilon v_n \quad \text{для} \quad n \geqslant N.$$

Имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{N} u_k\right| + \left|\sum_{N+1}^{n} u_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{N} u_k\right| + \varepsilon \sum_{N+1}^{n} v_k,$$

откуда

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} v_k}\right| \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} u_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} v_k} + \varepsilon. \tag{11.1}$$

Но знаменатель в правой части (11.1) стремится в бесконечность при $n \to \infty$, а числитель постоянен, значит вся правая часть может быть сделана меньше 2ε, если n достаточно велико, а так как ε произвольно, то левая часть как угодно мала, а это и надо было доказать.

Аналогично доказывается 4). Надо только выбрать N так, чтобы

$$(1-\varepsilon)\, v_n \leqslant u_n \leqslant (1+\varepsilon)\, v_n \quad \text{для} \quad n \geqslant N$$

и принять во внимание, что

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{N} v_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} v_k} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Очевидно также, что

5) если $v_n > 0$, $\Sigma v_n < +\infty$ и $u_n = o(v_n)$, то ряд Σu_n сходится и

$$\sum_{n+1}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{n+1}^{\infty} v_k\right).$$

Действительно, при любом $\varepsilon > 0$, если n достаточно велико, то $|u_k| < \varepsilon v_k$, откуда

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} u_k\right| < \varepsilon \left(\sum_{n+1}^{\infty} v_k\right).$$

Совершенно аналогично вместо сравнения членов двух последовательностей можно сравнивать две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, из которых одна положительна; например, $\varphi(x) > 0$.

Мы пишем

$$f(x) = o(\varphi(x)), \quad \text{если } \frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 0, \tag{11.2}$$

$$f(x) = O(\varphi(x)), \quad \text{если } \frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ ограничено}, \tag{11.3}$$

$$f(x) \sim \varphi(x), \quad \text{если } A < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < B, \tag{11.4}$$

где A и B положительны, и

$$f(x) \approx \varphi(x), \quad \text{если } \frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 1.$$

При этом в соотношениях (11.2), (11.3) и (11.4) мы можем рассматривать как случай, когда $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), так и случай $x \to x_0$, где x_0 какое-то фиксированное.

Имеет место утверждение, аналогичное предыдущим, а именно:

Лемма 1. *Если*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt,$$

то из

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad \text{на} \quad a \leqslant x \leqslant b$$

следует

$$F(x) = O[\Phi(x)] \quad \text{на} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Действительно,

$$|F(x)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leqslant M \int_a^x \varphi(t)\,dt = M\Phi(x),$$

где M постоянное.

Такое же утверждение при замене O на o вообще неверно, но становится справедливым, если $\Phi(x) \to \infty$ при $x \to b$; точнее имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\varphi(x) > 0$, $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на $a \leqslant x < b$ и суммируемы на $a \leqslant x \leqslant b - \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Тогда, если*

$$f(x) = o(\varphi(x)) \quad \text{при} \quad x \to b$$

и

$$\Phi(x) \to \infty \quad \text{при} \quad x \to b,$$

то

$$F(x) = o[\Phi(x)] \quad \text{при} \quad x \to b.$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ задано. Можно найти такое x_0, что

$$|f(x)| < \varepsilon\varphi(x) \quad \text{для} \quad a < x_0 \leqslant x < b.$$

Тогда

$$|F(x)| \leqslant \int_a^{x_0} |f(t)|\,dt + \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \leqslant \int_a^{x_0} |f(t)|\,dt + \varepsilon\Phi(x),$$

откуда

$$\left|\frac{F(x)}{\Phi(x)}\right| < \frac{\int_a^{x_0} |f(t)|\,dt}{\Phi(x)} + \varepsilon.$$

Так как $\Phi(x) \to \infty$ при $x \to b$, то первое слагаемое правой части станет меньше ε, как только x станет достаточно близким к b, а потому тогда

$$|F(x)| < 2\varepsilon\Phi(x)$$

и в силу произвольности ε наша лемма доказана.

Замечание. Разумеется, можно было бы совершенно также установить справедливость утверждения, если бы $f(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to a$.

IV. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

§ 12. О верхнем пределе последовательности множеств

Лемма. *Если для последовательности множеств E_n имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE_n < +\infty, \quad \text{то} \quad m\,\overline{\lim}\, E_n = 0.$$

Действительно,

$$\overline{\lim}\, E_n = (E_1 + E_2 + \ldots)(E_2 + \ldots)\ldots(E_n + \ldots)\ldots$$

Поэтому

$$m\,\overline{\lim}\, E_n = \lim_{n\to\infty} m(E_n + \ldots).$$

Но

$$m(E_n + \ldots) \leqslant mE_n + mE_{n+1} + \ldots$$

и так как $\Sigma\, mE_n < +\infty$, то правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$ и, значит, $m\,\overline{\lim}\, E_n = 0$.

§ 13. Сходимость по мере

Пусть $\{f_n(x)\}$ последовательность функций, измеримых и конечных почти всюду на $[a, b]$. Пусть $f(x)$ также измерима и конечна почти всюду на $[a, b]$.

Следуя Ф. Риссу, говорят, что *последовательность $f_n(x)$ сходится по мере к $f(x)$, если для любого $\sigma > 0$ имеем*

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f - f_n| \geqslant \sigma) = 0.$$

Лебег доказал, что если последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$, то она сходится и по мере к $f(x)$. Эта теорема необратима (см., например, Натансон[М. 16.], стр. 106—108).

§ 14. Переход к пределу под знаком интеграла Лебега

1. Теорема 1 (теорема Лебега). *Если $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ есть последовательность измеримых функций, ограниченных в совокупности на множестве E, т. е.*

$$|f_n(x)| \leqslant M \quad \text{на} \quad E \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

и если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{почти всюду на } E,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx. \tag{14.1}$$

(См., например, Натансон[М. 16.], стр. 139 *).)

2. Теорема 2. *То же соотношение* (14.1) *справедливо, если вместо ограниченности в совокупности функций* $f_n(x)$ *предполагается, что*

$$|f_n(x)| \leqslant \Phi(x) \quad \textit{почти всюду на } E,$$

где $\Phi(x)$ *положительная и суммируемая на* E *функция.*

(См., например, Натансон[М. 16.], стр. 166*).)

3. Теорема 3 (теорема Фату). *Если последовательность измеримых и неотрицательных функций* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ *сходится к функции* $F(x)$ *почти всюду на* E, *то*

$$\int_E F(x)\,dx \leqslant \sup\left\{\int_E f_n(x)\,dx\right\}. \tag{14.2}$$

(См. Натансон[М.16], стр. 155.)

Теорема 4. *Если* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ — *последовательность неотрицательных функций таких, что*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots$$

и

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx, \tag{14.1}$$

причем если $f(x)$ *несуммируема на* E, *то соотношение* (14.1) *сохраняет силу в том смысле, что оба члена равенства становятся равны* $+\infty$.

Действительно, если $f(x)$ суммируема, то это утверждение мгновенно вытекает из теоремы 2. Если же $f(x)$ не суммируема, то, полагая $(f)_N = f(x)$ при $f(x) \leqslant N$ и $(f)_N = N$ при $f(x) > N$, видим, что $\int_E (f)_N\,dx \to \infty$ при $N \to \infty$. Если для каждой f_n определить функцию $(f_n)_N$ так же, как $(f)_N$ для f, то $|(f_n)_N| \leqslant N$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $(f_n)_N \to (f)_N$ при $n \to \infty$, а потому по теореме 1

$$\int_E (f_n)_N\,dx \to \int_E (f)_N\,dx \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Значит, $\int_E (f_n)_N\,dx$ может быть сделан как угодно большим при достаточно большом N, а тогда и подавно это верно для $\int_E f_n(x)\,dx$, откуда и следует, что левая часть (14.1) равна $+\infty$.

В качестве следствия этой теоремы получаем

4. Теорема 5. *Если* $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ *есть последовательность неотрицательных суммируемых на* E *функций и если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_E u_n(x)\,dx \leqslant +\infty, \tag{14.3}$$

то ряд $\sum u_n(x)$ *сходится почти всюду на* E *к неотрицательной суммируемой функции* $f(x)$.

*) Теорема там доказана в предположении, что $f_n(x)$ сходится по мере к $f(x)$, но так как всякая последовательность, сходящаяся почти всюду, сходится и по мере (см. § 13), то наше утверждение и подавно справедливо.

Действительно, полагая $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}u_k(x)$, видим, что $S_1(x)\leqslant S_2(x)\leqslant$ $\leqslant\ldots\leqslant S_n(x)\leqslant\ldots$ Полагая $f(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$, где $f(x)$ конечна или бесконечна, имеем по теореме 4

$$\lim_{n\to\infty}\int_E S_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx.$$

Но так как

$$\lim_{n\to\infty}\int_E S_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_E u_k(x)\,dx<+\infty,$$

то отсюда следует, что $\int_E f(x)\,dx<+\infty$, а тогда $f(x)$ суммируема.

§ 15. Точки Лебега

Условимся говорить, что точка x есть *точка Лебега* для суммируемой функции $f(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt=0. \tag{15.1}$$

Ясно, что любая точка, где $f(x)$ непрерывна, есть точка Лебега; действительно, если $\varepsilon>0$ любое, а в точке x функция $f(x)$ непрерывна, то можно найти такое δ, что $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ для $|h|\leqslant\delta$, а тогда для тех же значений x

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt\leqslant\varepsilon,$$

откуда и следует нужное утверждение.

Однако у суммируемой функции может не быть ни одной точки непрерывности. Тем не менее справедлива следующая

Теорема Лебега. *Если $f(x)$ суммируема на $[a,b]$, то почти все точки этого отрезка являются точками Лебега для $f(x)$.*

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сначала любое число r и пусть

$$F(u)=\int_0^u|f(t)-r|\,dt.$$

Тогда для почти всех $x\in[a,b]$ имеем (по теореме о производной от неопределенного интеграла Лебега)

$$F'(x)=|f(x)-r|,$$

т. е.

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|\,dt=|f(x)-r|. \tag{15.2}$$

Пусть r рационально и E_r — множество тех x отрезка $[a,b]$, где соотношение (15.2) нарушается; следовательно, $mE_r=0$. Пусть $E=\Sigma E_{r_n}$, где r_n пробегает все рациональные числа; тогда $mE=0$. Докажем, что всякая точка, не принадлежащая к E, в которой $f(x)$ конечна, есть точка Лебега для $f(x)$.

Действительно, пусть x_0 такая точка и $\varepsilon>0$ задано. Можно найти такое рациональное r_n, что

$$|f(x_0)-r_n|<\varepsilon. \tag{15.3}$$

Тогда

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt\leqslant\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|\,dt+\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|r_n-f(x_0)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|\,dt+\varepsilon. \qquad (15.4)$$

Но так как $x_0\,\overline{\in}\,E$, то $x_0\,\overline{\in}\,E_{r_n}$ и, значит,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|=|f(x_0)-r_n|,$$

следовательно,

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|\,dt-|f(x_0)-r_n|\right|<\varepsilon, \qquad (15.5)$$

если $|h|$ достаточно мало.

Соединяя (15.3), (15.4) и (15.5), видим, что

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt\leqslant 3\,\varepsilon,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие. Полагая $t=x+u$ или $t=x-u$, мы видим, что во всякой точке Лебега

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int^{h}|f(x\pm u)-f(x)|\,du=0,$$

т. е.

$$\int_0^h|f(x\pm u)-f(x)|=o(h).$$

Положим

$$\Phi_x(h)=\int_0^h|f(x+2u)+f(x-2u)-2f(x)|\,du. \qquad (15.6)$$

Тогда из теоремы Лебега вытекает, что

$$\Phi_x(h)=o(h) \qquad (15.7)$$

почти всюду.

Замечание. Если x есть точка Лебега, то в этой точке $f(x)$ есть производная своего неопределенного интеграла.

Действительно, если

$$F(x)=C_0+\int_a^x f(t)\,dt,$$

то

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,dt,$$

а потому для $h\neq 0$

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt\right|=o(1).$$

Обратное предложение не имеет места.

§ 16. Интеграл Римана—Стилтьеса

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и конечны на $[a, b]$. Раздробим отрезок $[a, b]$ на части точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Пусть ξ_i — любая точка на $[x_i, x_{i+1}]$. Составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right]. \tag{16.1}$$

Если σ стремится к пределу при $\max(x_{k+1} - x_k) \to 0$ и этот предел не зависит ни от способа дробления отрезка, ни от выбора точек ξ_k, то этот предел обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

и называется *интегралом Римана—Стилтьеса* от $f(x)$ по $g(x)$.

Доказывается, что

если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а $g(x)$ имеет на нем ограниченное изменение, то интеграл имеет смысл (см., например, Натансон [М. 16], стр. 251). *Если $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dg = (L)\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx, \tag{16.2}$$

где интеграл справа есть интеграл Лебега.

(См., например, Натансон [М.16], стр. 290.)

Имеет место

Теорема. *Пусть $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся равномерно на $[a, b]$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dg = \int_a^b f(x)\,dg. \tag{16.3}$$

Действительно, для любого ε найдется такое N, что

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad n \geqslant N \quad \text{и} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Поэтому

$$\left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dg\right| \leqslant \varepsilon \operatorname*{var}_{[a,\,b]} g \quad \text{для} \quad n \geqslant N,$$

и теорема доказана.

§ 17. Две теоремы Хелли

Первая теорема Хелли. *Пусть $\{f(x)\}$ — некоторое семейство функций с ограниченным изменением на $[a, b]$. Если сами эти функции и их полные изменения ограничены в совокупности на $[a, b]$, т. е.*

$$|f(x)| < M$$

и $$(a \leqslant x \leqslant b),$$

$$V_a^b(f) < M$$

то из семейства $\{f(x)\}$ можно выделить последовательность $f_n(x)$, сходящуюся *в каждой точке $[a, b]$ к некоторой функции $\varphi(x)$, также имеющей ограниченное изменение на $[a, b]$.*

(См. Натансон [М. 16], стр. 242.)

Вторая теорема Хелли. *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а последовательность $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ состоит из функций с ограниченным изменением на $[a, b]$, причем*

$$V_a^b(g_n) < M < +\infty.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$, где $g(x)$ конечна всюду на $[a, b]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dg_n(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x). \tag{17.1}$$

(См. Натансон [М. 16], стр. 254.)

§ 18. Теорема Фубини

Если $f(x, y)$ суммируема в прямоугольнике $R\,[a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d]$, то для почти всех $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$ суммируема по y на $[c, d]$ и для почти всех y функция $f(x, y)$ суммируема по x на $[a, b]$; имеет место формула

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx. \tag{18.1}$$

(См., например, Натансон [М. 16], стр. 379 и стр. 385.)

Заметим, что оба повторных интеграла, входящих в правую часть (18.1), могут существовать и быть равны без того, чтобы существовал двойной интеграл в левой части (18.1) (см., например, Натансон [М. 16], стр. 385), но возможен и случай, когда каждый из этих интегралов существует, но они неравны, т. е. перемена порядка интегрирования незаконна (см. Натансон [М. 16], стр. 386.)

Однако для функций, сохраняющих знак, этот случай невозможен, а именно:

Если $f(x, y) \geqslant 0$ и $f(x, y)$ измерима на R, то конечность одного из повторных интегралов влечет суммируемость $f(x, y)$ на R, тем самым конечность второго повторного интеграла и равенство (18.1).

(См. Натансон [М. 16], стр. 387.)

Отметим один из важных частных случаев теоремы Фубини.

Если E — плоское множество меры нуль, то почти все его сечения прямыми, параллельными осям координат, являются линейными множествами меры нуль.

(См. Натансон [М. 16], стр. 371.)

V. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

§ 19. Линейные функционалы в C

Пусть всякой функции $f \in C[a, b]$ приведено в соответствие некоторое число, которое мы обозначим $U(f)$, и известно, что

1) $U(f_1 + f_2) = U(f_1) + U(f_2)$,

2) существует такая константа M, что

$$|U(f)| \leqslant M\,\|f\|_{C[a,b]}. \tag{19.1}$$

Тогда говорят, что $U(f)$ есть *линейный функционал* в $C[a, b]$.

Имеет место

Теорема Рисса. *Всякий линейный функционал в* $C[a, b]$ *имеет вид*

$$U(f)=\int_a^b f(t)\,dg, \tag{19.2}$$

где $g(t)$ — *некоторая функция с ограниченным изменением на* $[a, b]$.

(См., например, Натансон [М. 16], стр. 258.)

Нормой линейного функционала называется наименьшее значение M, для которого неравенство (19.1) справедливо.

Отметим здесь предложение, которым нам в дальнейшем придется пользоваться.

Если $U(f)$ *имеет вид* (19.2), *то*

$$\sup_{\|f\|_C\leqslant 1}|U(f)|=\operatorname*{var}_{[a, b]} g=V_a^b g \tag{19.3}$$

(иначе говоря, если функционал имеет вид (19.2), то его норма есть $V_a^b g$).

(См., например, Люстерник и Соболев [М. 12], стр. 167.)

§ 20. Линейные функционалы в $L^p (p>1)$

Пусть $f(x)\in L^p[a, b]$, $p>1$. Если каждой такой функции поставить в соответствие число $U(f)$, удовлетворяющее условиям:

1) $U(f_1+f_2)=U(f_1)+U(f_2)$,

2) существует такое M, что

$$|U(f)|\leqslant M\|f\|_{L^p[a, b]}, \tag{20.1}$$

то $U(f)$ называется *линейным функционалом* в $L^p[a, b]$.

Нормой функционала называется наименьшее M, для которого (20.1) справедливо.

Имеет место

Теорема. *Если* q *определяется из равенства*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

то всякий линейный функционал в $L^p[a, b]$ *имеет вид*

$$U(f)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx, \tag{20.2}$$

где $g(x)\in L^q[a, b]$.

(См., например, Люстерник и Соболев [М. 12], стр. 170.)

Эта теорема нам не понадобится, но нам необходимо доказать, что

$$\sup_{\|f\|_p\leqslant 1}|U(f)|=\|g\|_{L^q[a, b]}, \tag{20.3}$$

если $U(f)$ определено формулой (20.2).

Это последнее обстоятельство доказывается очень просто. Во-первых, в силу неравенства Гельдера имеем

$$|U(f)|\leqslant\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\leqslant\|g\|_{L^q}, \tag{20.4}$$

если $\|f\|_{L^p}\leqslant 1$.

Теперь докажем, что существует такая f, для которой $\|f\|_{L^p[a,b]} = 1$, и неравенство (20.4) превращается в равенство.

Действительно, положим

$$f(x) = \frac{[g(x)]^{q-1} \operatorname{sign} g(x)}{\|g\|_{L^q}^{q-1}}.$$

Так как $p(q-1) = q$, то отсюда сразу нахсдим

$$|f(x)|^p = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q},$$

а потому, интегрируя по $[a, b]$, сразу получаем

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx = 1,$$

т. е.

$$\|f\|_{L^p} = 1.$$

Теперь заметим, что

$$U(f) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \frac{\int_a^b |g|^q\,dx}{\left(\int_a^b |g|^q\,dx\right)^{\frac{q-1}{q}}} = \left(\int_a^b |g|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_{L^q},$$

и теорема доказана.

§ 21. Сходимость по норме в пространствах L^p

Напомним ряд свойств функций, принадлежащих $L^p[a, b]$ при $p \geqslant 1$.

1) *Для того чтобы последовательность функций $f_n(x) \in L^p[a, b]$ сходилась к функции $f(x) \in L^p[a, b]$ по норме, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p[a,b]} = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое N, что

$$\|f_n - f_m\|_{L^p[a,b]} \leqslant \varepsilon \quad \text{для } n \geqslant N,\ m \geqslant N. \tag{21.1}$$

2) *Из всякой последовательности $f_n(x)$, сходящейся по норме L^p к $f(x)$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду.*

3) *Пусть $p > 1$. Если $g(x) \in L^q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то из $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ следует*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Доказательства всех этих предложений можно найти, например, в книге Натансона [М. 16], гл. VII, § 2 и § 6.

Класс функций $\{f(x)\}$, принадлежащих L^p, образует *всюду плотное множество* в L^p, $p \geqslant 1$, если для любого $\varepsilon > 0$ и для любой $\varphi \in L^p$ можно найти такую функцию f, что $\|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$.

Доказывается, что:

1) *класс всех измеримых ограниченных функций,*

2) *класс всех непрерывных функций,*

3) *класс всех многочленов,*

4) *класс всех ступенчатых функций всюду плотен в* L^p.

Если речь идет о классе $L^p[a, b]$, то аналогично надо и функции φ рассматривать лишь на $[a, b]$.

Доказательство см., например, Натансон [м. 16], стр. 188 и 218.

То, что класс тригонометрических полиномов всюду плотен в $L^p[-\pi, \pi]$, будет доказано в § 28 главы I.

VI. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

§ 22. Элементарные свойства тригонометрических полиномов

Тригонометрическим полиномом называется выражение вида

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx,$$

причем, если $|\alpha_n| + |\beta_n| > 0$, то число n называется *порядком полинома.*

Напомним следующие простые свойства тригонометрических полиномов.

1. Произведение двух тригонометрических полиномов есть тригонометрический полином (см. Натансон [м. 15], стр. 32), а следовательно $[T(x)]^k$ есть также тригонометрический полином при любом цёлом k.

2. Тригонометрический полином порядка n не может иметь более $2n$ действительных корней на $[0, 2\pi)$, если даже каждый из них считать столько раз, сколько единиц в его кратности (см. Натансон [м. 15], стр. 85).

Теорема Вейерштрасса. *Если $f(x)$ непрерывна на всей бесконечной оси и $f(x+2\pi) = f(x)$ при любом x, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический полином $T(x)$, что*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Эта теорема будет нами доказана в § 27 главы I. Здесь мы упоминаем ее потому, что без нее нельзя доказывать дальнейшие теоремы.

§ 23. Неравенство Бернштейна

Для тригонометрических полиномов справедлива следующая глубокая теорема, принадлежащая С. Н. Бернштейну [1]:

Теорема Бернштейна. *Если $T_n(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше n и*

$$|T_n(x)| \leqslant M \quad \text{на} \quad [0 \leqslant x \leqslant 2\pi],$$

то

$$|T_n'(x)| \leqslant nM \quad \text{на} \quad [0 \leqslant x \leqslant 2\pi].$$

Существует очень много различных доказательств этой теоремы. Мы приведем здесь доказательство С. Б. Стечкина [1], которое нам кажется очень простым. Именно, сначала устанавливается справедливость леммы.

Лемма. *Если* $\max|T_n(x)| = M$ *и* $T_n(x_0) = M$, *то*

$$T_n(x_0 + t) \geqslant M \cos nt \quad \text{для} \quad -\frac{\pi}{n} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

Положим

$$\psi_n(t) = T_n(x_0 + t) - M \cos nt$$

и допустим, что лемма неверна. Тогда найдется такое t_0, $-\frac{\pi}{n} < t_0 < \frac{\pi}{n}$, что

$$\psi_n(t_0) < 0. \tag{23.1}$$

Предположим, что $0 < t_0 < \frac{\pi}{n}$ (в случае, если бы $-\frac{\pi}{n} < t < 0$, рассуждения надо было бы проводить не для $[0, 2\pi]$, а для $[-2\pi, 0]$, в остальном все сохранилось бы).

Так как $\psi_n(t)$ есть тригонометрический полином порядка не выше n, то он должен иметь на $[0, 2\pi)$ не более $2n$ корней [или быть тождественно равным нулю, что противоречит (23.1)].

Между тем мы покажем, что он имеет не менее $2n + 1$ корней. Действительно, мы имеем для любого k

$$\psi_n\left(\frac{k\pi}{n}\right) = T_n\left(x_0 + \frac{k\pi}{n}\right) - (-1)^k M,$$

а так как $|T_n(x)| \leqslant M$, то $\psi_n\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ имеет знак $(-1)^{k+1}$ или $= 0$. В частности, $\psi_n\left(\frac{\pi}{n}\right) \geqslant 0$, а потому на отрезке $\left[t_0, \frac{\pi}{n}\right]$ функция $\psi_n(t)$ имеет корень. Кроме того, на каждом из отрезков $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$, $(k = 1, 2, \ldots, 2n-2)$, лежащих на $(0, 2\pi)$, она также должна иметь по корню, раз у нее в концах отрезка разные знаки (или она обращается в нуль) *). Итак, у $\psi_n(t)$ мы обнаружили не менее $2n - 1$ корней. Но, кроме того, она имеет двойной корень при $t = 0$, ибо

$$\psi_n(0) = T_n(x_0) - M = 0$$

и из

$$\psi_n'(t) = T_n'(x_0 + t) + nM \sin nt$$

следует

$$\psi_n'(0) = 0,$$

так как x_0 — точка максимума для $T_n(x_0)$.

Итак, тригонометрический полином $\psi_n(t)$ имеет $2n + 1$ корень, и мы уже видели, что это приводит к противоречию. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть $|T_n(x)| \leqslant M$. Обозначим $\max |T_n'(x)| = \mu$. Пусть x_0 — такая точка, где

$$T_n'(x_0) = \mu$$

(если $-T_n'(x_0) = \mu$, то достаточно вести рассуждения для $-T_n(x)$). Тогда по предыдущей лемме

$$T_n'(x_0 + t) \geqslant \mu \cos nt, \qquad -\frac{\pi}{n} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{n},$$

откуда

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} T_n'(x_0 + t)\, dt = T_n\left(x_0 + \frac{\pi}{2n}\right) - T_n\left(x_0 - \frac{\pi}{2n}\right) \geqslant \mu \int\limits_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos nt\, dt = 2\frac{\mu}{n}.$$

---

*) Заметим, что если $\varphi_n(t)$ имеет один корень на двух соседних отрезках, то этот корень кратный.

Итак,

$$\mu \leqslant \frac{n}{2}\left[T_n\left(x_0+\frac{\pi}{2n}\right)-T_n\left(x_0-\frac{\pi}{2n}\right)\right].$$

Но $|T_n(x)| \leqslant M$, откуда $\mu \leqslant nM$, т. е. $|T_n'(x)| \leqslant nM$, а это и требовалось доказать.

Замечание. Неравенство Бернштейна не может быть усилено, так как, полагая

$$T_n(x)\,M=\cos nx,$$

мы видим, что

$$\max\,|T_n(x)|=M, \quad \text{а} \quad \max\,|T_n'(x)|=nM.$$

§ 24. Тригонометрический полином наилучшего приближения

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π. Обозначим через $T_n(x)$ любой тригонометрический полином порядка не выше n. Пусть

$$\Delta(T_n)=\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f(x)-T_n(x)|. \tag{24.1}$$

Рассмотрим нижнюю грань значений $\Delta(T_n)$, когда T_n пробегает совокупность всех тригонометрических полиномов $T_n(x)$. Обозначим

$$E_n(f)=\inf\Delta(T_n) \tag{24.2}$$

и назовем эту величину *наилучшим приближением* $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

Теорема Бореля. *Для любой непрерывной периодической функции с периодом 2π и для любого n существует тригонометрический полином порядка не выше n, для которого*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f(x)-T_n(x)|=E_n(f) \tag{24.3}$$

(т. е. нижняя граница достигается).

Такой полином называется *полиномом наилучшего приближения.*

Доказательство теоремы можно найти, например, в книге Натансона [M. 15.], стр. 94.

Легко доказывается, что

$$E_1\geqslant E_2\geqslant\ldots\geqslant E_n\geqslant\ldots \tag{24.4}$$

Кроме того, из теоремы Вейерштрасса (см. § 22) сразу следует

$$\lim_{n\to\infty}E_n=0.$$

Если мы положим

$$\Delta^{(p)}(T_n)=\|f(x)-T_n(x)\|_{L^p[0,2\pi]} \tag{24.5}$$

и обозначим

$$E_n^{(p)}(f)=\inf\Delta^{(p)}(T_n), \tag{24.6}$$

где снова нижняя грань берется по всем тригонометрическим полиномам порядка не выше n, то $E_n^{(p)}(f)$ называется *наилучшим приближением* $f(x)$ *в пространстве* L^p.

Мы будем в дальнейшем для произвольного $p > 1$ пользоваться лишь этим определением, но не существованием полинома, для которого $\Delta^p(T_n) = E_n^{(p)}(f)$. В случае $p = 2$ такое существование доказывается очень легко; с этим мы познакомимся в § 13 главы I.

Наконец, заметим, что целесообразно рассматривать и наилучшие приближения не на $[0, 2\pi]$, а на каком-либо отрезке $[a, b] \subset [0, 2\pi]$. В этом случае

$$E_n(f, a, b) = \inf_{T_n} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - T_n(x)| \tag{24.7}$$

и аналогично определяется

$$E_n^{(p)}(f, a, b) = \inf_{T_n} \| f(x) - T_n(x) \|_{L^p[a,b]} . \tag{24.8}$$

§ 25. Модуль непрерывности, модуль гладкости, интегральный модуль непрерывности

Модуль непрерывности. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Пусть $\delta > 0$ любое. Рассмотрим для любых двух точек x_1 и x_2 отрезка $[a, b]$, лишь бы $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$, разность $|f(x_1) - f(x_2)|$, и пусть

$$\omega(\delta, a, b, f) = \sup_{|x_1 - x_2| \leqslant \delta} |f(x_1) - f(x_2)| \quad \begin{matrix} x_1 \in [a, b] \\ x_2 \in [a, b] \end{matrix} . \tag{25.1}$$

Если в ходе рассуждений речь идет все время об одном и том же отрезке, то пишут кратко $\omega(\delta, f)$. Это число называют *модулем непрерывности* $f(x)$ *на* $[a, b]$.

Если не налагать на $f(x)$ никаких ограничений, то $\omega(\delta)$ может оказаться и бесконечным. Но если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то очевидно, что $\omega(\delta, f)$ конечно при любом δ и

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta, f) = 0 . \tag{25.2}$$

Очевидно из определения, что

$$\omega(\delta, f_1 + f_2) \leqslant \omega(\delta, f_1) + \omega(\delta, f_2) , \tag{25.3}$$

если функции рассматриваются на одном и том же отрезке.

Отметим ряд почти очевидных свойств модуля непрерывности (для краткости знак f опускается и пишем просто $\omega(\delta)$):

1) $\omega(\delta)$ монотонно возрастает,

2) если n целое, то

$$\omega(n\delta) \leqslant n\,\omega(\delta) , \tag{25.4}$$

а если λ любое положительное, то

$$\omega(\lambda\delta) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega(\delta) , \tag{25.5}$$

3) если $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ (см. *Обозначения*), то

$$\omega(\delta) = O(\delta^\alpha) \tag{25.6}$$

и наоборот.

(См. Натансон [М. 15.], стр. 107—109.)

Если $f(x)$ определена на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, содержащем $[a, b]$, то можно определить модуль непрерывности и так

$$\omega(\delta, a, b, f) = \sup_{0 \leqslant |h| \leqslant \delta} |f(x + h) - f(x)| \qquad x \in [a, b] \tag{25.7}$$

при условии брать $\delta \leqslant \min[a-\alpha, \beta-b]$, т. е. так чтобы точка $x \pm h$ при $x \in [a, b]$ не выходила из отрезка $[\alpha, \beta]$. В частности, если $f(x)$ периодическая с периодом 2π и определена на отрезке длины 2π, то мы будем писать кратко $\omega(\delta, f)$, понимая под этим

$$\omega(\delta, f) = \sup_{0 \leqslant |h| \leqslant \delta} |f(x+h) - f(x)|, \tag{25.8}$$

где x уже любое.

Модуль гладкости. Если вместо первой разности $f(x+h) - f(x)$ рассматривать вторую симметрическую разность, т. е. $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$, то получаем аналогично определение модуля гладкости

$$\omega_2(\delta, f) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|. \tag{25.9}$$

Ясно, что и здесь имеют место свойства:

1) $\omega_2(\delta)$ монотонно не убывает,

2) для любого положительного λ

$$\omega_2(\lambda\delta) \leqslant (\lambda+1)\,\omega_2(\delta). \tag{25.10}$$

Полезно отметить, что если для некоторой монотонно возрастающей $g(x)$ доказано соотношение

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) = O\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \to \infty,$$

то справедливо и

$$\omega(\delta, f) = O[g(\delta)] \qquad \text{при} \qquad \delta \to 0.$$

Действительно, если δ задано, то определяем n так, чтобы

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \delta < \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$\omega(\delta, f) \leqslant \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqslant \omega\left(\frac{2}{n+1}, f\right) \leqslant 2\omega\left(\frac{1}{n+1}, f\right) \leqslant Cg\left(\frac{1}{n+1}\right) \leqslant Cg(\delta),$$

где C постоянно, а это и надо было доказать.

Аналогичное утверждение справедливо для модуля гладкости.

О связи между модулем непрерывности функции и ее наилучшим приближением тригонометрическими полиномами см. Добавления, § 7.

Интегральный модуль непрерывности. Если $f(x) \in L[\alpha, \beta]$ и $[a, b]$ лежит внутри $[\alpha, \beta]$, то *интегральным модулем непрерывности* $f(x)$ *на* $[a, b]$ принято называть выражение

$$\omega^{(1)}(\delta, a, b, f) = \sup_{0 \leqslant |h| \leqslant \delta} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|\,dx,$$

где снова δ взято таким, что для $x \in [a, b]$ и $0 \leqslant |h| \leqslant \delta$ имеем $x \pm h \in [\alpha, \beta]$.

Для периодической функции с периодом 2π будем писать кратко

$$\omega^{(1)}(\delta, f) = \sup_{0 \leqslant |h| \leqslant \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\,dx \tag{25.11}$$

(здесь δ может уже быть любым положительным).

Для интегрального модуля непрерывности справедлива

Теорема Лебега. *Для любой $f(x) \in L[-\pi, \pi]$ имеем*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega^{(1)}(\delta, f) = 0.$$

Достаточно доказать теорему для неотрицательных функций, так как каждую суммируемую можно представить как разность неотрицательных суммируемых. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать ограниченную функцию $\varphi(x)$, для которой

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|\, dx + 2\varepsilon \tag{25.12}$$

и остается доказать наше утверждение для ограниченной $\varphi(x)$.

Пусть $|\varphi(x)| \leqslant M$. В силу C-свойства можно найти непрерывную $\psi(x)$, совпадающую с $\varphi(x)$ на совершенном множестве $P \subset [-\pi, \pi]$, $mP > 2\pi - 2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{M}$. Можно выбрать $\psi(x)$ так, чтобы $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$ и чтобы $|\psi(x)| \leqslant M$ на $[-\pi, \pi]$. Затем ее надо продолжить периодически с периодом 2π. Ясно, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|\, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(x+h) - \psi(x)|\, dx + 2\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(x+h) - \psi(x)|\, dx + 4\varepsilon. \tag{25.13}$$

Наконец, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(x+h) - \psi(x)|\, dx \leqslant \omega(\delta, \psi)\, 2\pi$$

для $0 \leqslant |h| \leqslant \delta$, откуда в силу (25.12) и (25.13)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\, dx \leqslant 6\varepsilon + 2\pi\omega(\delta, \psi) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant |h| \leqslant \delta. \tag{25.14}$$

В силу того, что δ произвольно, а $\psi(x)$ непрерывна, т. е. $\omega(\delta, \psi) \to 0$ при $\delta \to 0$, мы видим из (25.11) и (25.14), что

$$\omega^{(1)}(\delta, f) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

а это и надо было доказать.

Замечание. Для дальнейшего будет необходима такая

Теорема. *Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение на $[0, 2\pi]$, то*

$$\omega^{(1)}(\delta, f) = O(\delta). \tag{25.15}$$

Действительно, разлагая $f(x)$ на разность двух монотонных $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ и замечая, что

$$\omega^{(1)}(\delta, f) \leqslant \omega^{(1)}(\delta, f_1) + \omega^{(1)}(\delta, f_2),$$

мы видим, что достаточно установить справедливость соотношения (25.15) для неубывающей $f(x)$. Но если так, то для $h > 0$ функция $f(x+h) - f(x)$ неотрицательна на $[0, 2\pi - h)$. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|\,dx = \int_0^{2\pi-h} [f(x+h) - f(x)]\,dx + \int_{2\pi-h}^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 2Mh + \int_0^{2\pi-h} [f(x+h) - f(x)]\,dx,$$

где M — верхняя грань $f(x)$; далее,

$$\int_0^{2\pi-h} [f(x+h) - f(x)]\,dx = \int_h^{2\pi} f(x)\,dx - \int_0^{2\pi-h} f(x)\,dx = \int_{2\pi-h}^{2\pi} f(x)\,dx - \int_0^h f(x)\,dx.$$

Каждый из двух последних интегралов по модулю не превосходит Mh. Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|\,dx \leqslant 4Mh$$

и

$$\omega^{(1)}(\delta, f) \leqslant \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} 4M|h| = 4M\delta = O(\delta).$$