Lojërat e formës strategjike

Qëllimet dhe objektivat

- Përkufizimi shembuj lojërash të formës strategjike me informacion komplet
- Konceptet e zgjidhjes të formës strategjike: dominanca, zgjdhshmëria e dominancës
- Ekuilibri i strategjisë dominante dhe eliminimi i iteruar i aksioneve të dominuara
- Ekuilibri i Nash-it: Teoria

Përmbajtja

Lojërat e formës strategjike me informacion komplet

- Modelojnë situatat në të cilat lojtarët zgjedhin strategjitë pa ditur zgjedhjet e strategjive të lojtarëve tjerë
- Njihen poashtu si *lojëra të formës normale*

Përkufizim

Një *lojë e formës strategjike (me informacion komplet)* $G = (N, \{ A_i \}_{i \in \mathbb{N}}, \{ u_i \}_{i \in \mathbb{N}})$ përbëhet nga:

1. Bashkësia e lojtarëve N;
2. Bashkësia e aksioneve A_i për çdo lojtar i;
3. Një funksion fitimi $u_i : A \to \mathbb{R}$ për çdo lojtar i.

- Një *rezultat* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ është n-she e renditur aksionesh, nga një për secilin lojtar.
    - Gjithashtu njihet si *profil aksioni* ose *profil strategjie*
- *Hapësira e rezultateve*

$$A = \prod_{i \in N} A_i = \{ (a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n \}$$

Funksionet e fitimit

- Funksionet e fitimit paraqesin prefereca mbi hapësirën e rezultateve.
- Ata janë vetëm numra ordinalë (tani për tani).
- Kujtoni Dilemën e të burgosurve

		Lojtari 2	
		P	N
Lojtari 1	P	$-5,-5$	$0,-6$
	N	$-6,0$	$-1,-1$

- *Bimatrica* vijuese poashtu paraqet të njëjtën lojë saherë që $a<b<c<d$.

		Lojtari 2	
		P	N
Lojtari 1	P	b,b	d,a
	N	a,d	c,c

Loja e kontributit

- Secili fillon me 10 €.
- Ju vendosni se sa nga 10 € të kontriboni në fondin e përbashkët.
- Sasia që kontriboni do të dyfishohet dhe pastaj të ndahet në mënyrë të barabartë ndërmjet të gjithëve.
- Unë do të shpërndaj copa letre që kanë pamjen vijuese:
  Emri:______________________
  Kontributi juaj:___________
- Shkruani emrin tuaj dhe një numër të plotë ndërmjet 0 dhe 10.
- Do t'i mbledhim dhe t'i fusim në Excel
- Do ta zgjedhim një lojtar të mënyrë të rastësishme dhe ta paguajmë.

Shembull: Gara e çmimit

- Dy kompani sigurimi duhet të vendosin a të shesin një policë të caktuar sigurimi shendetsor me çmim të lartë apo të ulët.
- Veprojnë në mënyrë të pavarur dhe pa e ditur zgjedhjen e kompanisë tjetër
- Lojën mund ta paraqesim në format bimatrice

		Kompania 2	
		I lartë	*I ulët*
Kompania 1	*I lartë*	$10, 10$	$2, 15$
	I ulët	$15, 2$	$5, 5$

Shembull: Gara e çmimit (Vazhdim)

		2: L	2: U
1	L	$10, 10$	$2, 15$
	U	$15, 2$	$5, 5$

- $N = \{1, 2\}$
- $A_1 = A_2 = \{L, U\}$
- $u_1(L, L) = 10$
  $u_2(L, L) = 10$
  $u_1(H, L) = 2$
  $u_2(H, L) = 15$
  etj.

- Çfarë duhet të luajë Kompania 1?
- A varet kjo nga ç'mendon ajo se do të bëjë Kompania 2?
- U është një shembull *strategjie dominante.*
- Është optimale pavarësisht se çfarë bëjnë lojtarët tjerë
- Çfarë duhet të luajë Kompania 2?
- (U, U) është *ekuilibër strategjie dominante.*

Strategjitë dominante

- Le të jetë $A = \prod_{j \in N} A_j$ hapësira e rezultateve të një loje n-lojtarëshe në formë strategjike, dhe le të jetë $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$.
- Për çdo i shënojmë me

$$a_{-i} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

  një profil aksionesh të ndërmarra nga të gjithë lojtarët tjerë përveç i, dhe vëjmë $a = (a_i, a_{-i})$.
- Shënojmë me $A_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{ i \}} A_j$ bashkësinë e të gjitha profileve të tilla.

Përkufizim

Një aksion a_i *e dominon dobët* një aksion b_i në qoftë se

$$u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(b_i, a_{-i}) \quad \text{për çdo } a_{-i} \in A_{-i}$$

dhe

$$u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(b_i, a_{-i}) \quad \text{për ndonjë } a_{-i} \in A_{-i}.$$

a_i *e dominon rigorozisht* b_i në qoftë se

$$u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(b_i, a_{-i}) \quad \text{për çdo } a_{-i} \in A_{-i}.$$

Ekuilibri i strategjisë dominante

Përkufizim

Një aksion a_i është *dobët dominant* në qoftë se e dominon dobët çdo aksion në A_i.
a_i është *rigorozisht dominant* në qoftë se e dominon rigorozisht çdo aksion në A_i.

- Në qoftë se çdo lojtar ka strategji dominante (dobët ose rigorozisht), atëherë rezultati përkatës është *ekuilibër strategjie dominante* (*dobët* ose *rigoroze*).

Përkufizim

Ekuilibët strategjie dobët dominante i një loje G në formë strategjike është profil aksioni dobët dominant, dhe shënohet me $\mathbf{D}^{\mathrm{W}}(G)$.
Ekuilibët strategjie rigorozisht dominante i një loje G në formë strategjike është profil aksioni rigorozisht dominant, dhe shënohet me $\mathbf{D}^{\mathrm{S}}(G)$.

Ekuilibri i strategjisë dominante: Gara e çmimit

$$
\begin{array}{ccc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{2} \\
 & & \multicolumn{1}{c}{L} & \multicolumn{1}{c}{U} \\
\cline{3-4}
1 & L & 10,10 & 2,15 \\
\cline{3-4}
 & U & 15,2 & 5,5 \\
\cline{3-4}
\end{array}
$$

- U e dominon rigorozisht L.
- (U, U) është ekuilibër strategjie rigorozisht dominante.

$$
\begin{array}{ccc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{2} \\
 & & \multicolumn{1}{c}{L} & \multicolumn{1}{c}{U} \\
\cline{3-4}
1 & L & 10,10 & 5,15 \\
\cline{3-4}
 & U & 15,5 & 5,5 \\
\cline{3-4}
\end{array}
$$

- U e dominon dobët L.
- (U, U) është ekuilibër strategjie dobët dominante.

Ekuilibri i strategjisë dominante...

- Koncept i arsyeshëm zgjidhjeje
- Kërkon nga lojtarët vetëm të jenë racionalë
- Nuk kërkon nga ata të dinë se edhe tjerët janë poashtu racionalë
- Por, nuk ekziston në shumë lojëra interesante.

Loja Qëllo mesataren

- Do të luajmë një lojë.
- Unë do të shpërndaj copa letre që kanë pamjen vijuese:
  Emri:______________________
  Hamendësimi juaj:___________
- Shkruani emrin tuaj dhe një numër të plotë ndërmjet 0 dhe 100.
- Fiton numri i cili është më së afërmi me gjysmën e mesatares.
- Do t'i mbledhim dhe do t'i fusim në Excel.
- Fituesi merr 5 € (në rast barazimi, zgjedhim rastësisht).

Përputhja e çmimit

- Web faqja e Kompanisë 1 ka reklamën vijuese:

Çdo policë që bleni në Kompaninë 1 vjen me garancinë e çmimit më të ulët. Nëse gjeni të njëjtën të shitet gjetiu me çmim më të ulët, vetëm na sillni kontratën tonë origjinale brenda 7 ditësh dhe ne do ta refundojmë me kënaqësi diferencën.

- Duket sikur marrëveshje e mirë për konsumatorët
- Si e ndryshon kjo lojën?

Përputhja e çmimit (Vazhdim)

		Kompania 2: *I lartë*	*I ulët*	*Përputh*
Kompania 1	*I lartë*	$10, 10$	$2, 15$	$10, 10$
	I ulët	$15, 2$	$5, 5$	$5, 5$
	Përputh	$10, 10$	$5, 5$	$10, 10$

- A ka ndonjë strategji dominante për ndonjërin nga lojtarët?
- Nuk ka ekuilibër strategjie dominante për këtë lojë.
- Pra, çfarë mund të themi për këtë lojë?

Përputhja e çmimit (Vazhdim)

		Kompania 2		
		I lartë	*I ulët*	*Përputh*
Kompania 1	*I lartë*	$10, 10$	$2, 15$	$10, 10$
	I ulët	$15, 2$	$5, 5$	$5, 5$
	Përputh	$10, 10$	$5, 5$	$10, 10$

- Lëvizja *I lartë* e Kompanisë 1 është e dominuar dobët (nga *Përputh*) dhe Kompania 1 është lojtar racional:
  - Kompania 1 nuk duhet të luajë *I lartë*.
- Lëvizja *I lartë* e Kompanisë 2 është e dominuar dobët (nga *Përputh*) dhe Kompania 2 është lojtar racional:
  - Kompania 2 nuk duhet të luajë *I lartë*.
- Secili e di se tjetri është racional:
  - Kompania 1 di se Kompania 2 nuk do të luajë *I lartë*.
  - Kompania 2 di se Kompania 1 nuk do të luajë *I lartë*.
  - Këtu, pikërisht, kemi përdorur njohurinë e përbashkët të racionalitetit.

Përputhja e çmimit (Vazhdim)

- Prandaj kemi lojën „efektive“ vijuese.

		Kompania 2	
		I ulët	*Përputh*
Kompania 1	*I ulët*	$5, 5$	$5, 5$
	Përputh	$5, 5$	$10, 10$

- *I ulët* bëhet strategji e dominuar dobët për të dytë.
- Të dyja kompanitë do të luajnë *Përputh* dhe çmimi do të jetë i lartë.
- Procedura e mësipërme njihet si *eliminim i përsëritur i strategjive të dominuara (Iterated Elimination of Dominated Strategies, IEDS)*

Mbani mend!

Për të qenë strateg i mirë përpiquni ta shihni botën nga perspektiva e rivalëve tuaj dhe kuptoni se edhe ata sipas të gjitha gjasave do të bëjnë të njëjtën.

Strategjitë e dominuara

- Një lojtar racional kurrë nuk duhet të luajë një aksion kur ka një aksion tjetër i cili i jep fitim më të lartë pa marrë parasysh si luajnë tjerët.
- Një aksion të tillë e quajmë *aksion i dominuar.*

Përkufizim

Një aksion a_i është *i dominuar dobët* nga b_i në qoftë se

$$u_i(a_i, a_{-i}) \leq u_i(b_i, a_{-i}) \quad \text{për çdo } a_{-i} \in A_{-i}$$

dhe

$$u_i(a_i, a_{-i}) < u_i(b_i, a_{-i}) \quad \text{për ndonjë } a_{-i} \in A_{-i}.$$

a_i është *i dominuar rigorozisht* nga b_i në qoftë se

$$u_i(a_i, a_{-i}) < u_i(b_i, a_{-i}) \quad \text{për çdo } a_{-i} \in A_{-i}.$$

Eliminimi i përsëritur i strategjive të dominuara

- Njohuria e përbashkët e racionalitetit arsyeton eliminimin në mënyrë të përsëritur të strategjive të dominuara.
  - *Eliminimi i përsëritur i strategjive të dominuara (Iterated Elimination of Dominated Strategies, IEDS)*
- Në qoftë se çdo strategji e eliminuar është strategji e dominuar dobët
  - *Eliminimi i përsëritur i strategjive të dominuara dobët (Iterated Elimination of Weakly Dominated Strategies, IEWDS)*
- Në qoftë se çdo strategji e eliminuar është strategji e dominuar rigorozisht
  - *Eliminimi i përsëritur i strategjive të dominuara rigorozisht (Iterated Elimination of Strictly Dominated Strategies, IESDS)*

IESDS kundrejt IEWDS

Pohim

Në qoftë se të dy lojtarët kanë akcione rigorozisht dominante, atëherë IESDS shpie në ekuilibrin e vetëm të strategjisë dominante.

Rrjedhim

Renditja e eliminimit nuk ka rëndësi në IESDS.

Përkufizim

Një lojë strategjike G është *dominueshëm zgjidhshme* në qoftë se IEDS shpie në rezultat të vetëm.

Dilema e të burgosurve

- Ka strategji rigorozisht domiante

		Lojtari 2	
		P	N
Lojtari 1	P	$-5,-5$	$0,-6$
	N	$-6,0$	$-1,-1$

- Pas IESDS, të dy lojtarët do të luajnë P.
- Ekuilibri i vetëm i strategjisë dominante është $\mathbf{D}^{\mathrm{S}}(G) = (P, P)$

IESDS kundrejt IEWDS (Vazhdim)

- Renditja e eliminimit ka rëndësi në IEWDS.

Lojtari 1 (rreshtat), Lojtari 2 (kolonat)

	M	D
L	$3, 1$	$2, 0$
N	$4, 0$	$1, 1$
P	$4, 4$	$2, 4$

- Akcioni L i Lojtarit 1 është i dominuar dobët nga P:

	M	D
N	$4, 0$	$1, 1$
P	$4, 4$	$2, 4$

  - IEWDS shpie në (P, D).

- Akcioni N i Lojtarit 1 është i dominuar dobët nga P:

	M	D
L	$3, 1$	$2, 0$
P	$4, 4$	$2, 4$

  - IEWDS shpie në (P, M).

Loja e frigacakut („Chicken“)

- Janë dy ofrues të telefonisë mobile: Wave dhe Sirius.
- Wave është lider i industrisë me 5 milion parapagues; Sirius ka 2.2 milion.
- Në afat të gjatë tregu mund të mbajë vetëm një ofrues.

		Sirius	
		Rri	Dil
Wave	Rri	$-200, -200$	$300, 0$
	Dil	$0, 300$	$0, 0$

- A ka strategji të dominuar?
- Cilët janë rezultatet e besueshme?
- A mund të jetë (Rri, Rri) një rezultat?
- Në qoftë se Wave pret që Sirius të dalë, cila është strategjia (përgjegjja) më e mirë e tij?
- Në qoftë se Sirius pret që Wave të rrijë, cila është përgjegjja më e mirë e tij?
- (Rri, Dil) është një rezultat i tillë që:
  - Secili lojtar përgjegjet më së miri, për çfarë beson se do të bëjë tjetri
  - Besimet e tyre janë korrekte
- Ky është një *ekuilibër i Nash-it.*

Ekuilibri i Nash-it

- Ekuilibri i Nash-it është një profil strategjie (koleksion strategjish, nga një për secilin lojtar) i tillë që secila strategji është përgjegjje më e mirë (maksimizon fitimin) e të gjitha strategjive tjera.

Përkufizim

Një rezultat $a^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*)$ është *ekuilibër i Nash-it* në qoftë se për çdo lojtar i

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \quad \text{për çdo } a_i \in A_i$$

- Ekuilibri i Nash-it është i vetëimponueshëm: asnjëri lojtar nuk ka motiv për të devijuar njëanshëm.
- Një mënyrë për të gjetur ekuilibrin e Nash-it është të gjendet së pari *korrespondenca më e mirë e përgjegjjeve* për secilin lojtar
  - Korrespondenca më e mirë e përgjegjjeve jep bashkësinë e strategjive që maksimizojnë fitimet për çdo profil strategjie të lojtarëve tjerë.
- ...dhe pastaj të gjendet ku ato „priten“.

Ekulibri i Nash-it në lojën e frigacakut

Sirius

		Rri	Dil
Wave	Rri	$-200, -200$	$300, 0$
	Dil	$0, 300$	$0, 0$

- Përgjegjja më e mirë e Wave për Rri është Dil.
- Përgjegjja më e mirë e tij për Dil është Rri.
- Përgjegjja më e mirë e Sirius për Rri është Dil dhe pergjegjja më e mirë për Dil është Rri.
- Korrespondencat më të mira të përgjegjjeve priten te (Rri, Dil) dhe (Dil, Rri).
- Këto dy profile strategjish janë dy ekuilibret e Nash-it e kësaj loje.
- Do të prisnim që njëra nga kompanitë të dalë në afat të gjatë.

Korrespndenca më e mirë e përgjegjjeve

- *Korrespndenca më e mirë e përgjegjjeve* e lojtarit i jepet me:

$$B_i(a_{-i}) = \{\, a_i \in A_i \mid u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(b_i, a_{-i}) \quad \text{për çdo } b_i \in A_i \,\}\,.$$

- $B_i(a_{-i})$ është bashkësi dhe mund të mos jetë një n-she e renditur e vetme.

		Sirius: Rri	Sirius: Dil
Wave	Rri	$-200, -200$	$300, 0$
Wave	Dil	$0, 300$	$0, 0$

- Në lojën e frikacakut:

$$B_1(Rri) = Dil, \quad B_1(Dil) = Rri,$$
$$B_2(Rri) = Dil, \quad B_2(Dil) = Rri.$$

Gjahu i kaprojve

- Jean-Jacques Rousseau në *Një diskurs mbi mosbarazinë:*

  Po të ishte çështje gjahu i drerit, secili e kuptonte mirë se ai duhej t'i mbetej besnik postit të tij; por po të ndodhte të kalonte një lepur i arritshëm për njërin prej tyre, nuk mund të dyshojmë se ai do t'i vihej pa skrupull pas në ndjekje...

		Gjahtari 2: *Dre*	Gjahtari 2: *Lepur*
Gjahtari 1	*Dre*	$10, 10$	$0, 1$
	Lepur	$1, 0$	$1, 1$

- A i ngjan ndonjë loje që kemi parë tanimë?

		Beta: Obligacione	Beta: Ndërmarrje
Alfi	Obligacione	$110, 110$	$110, 90$
	Ndërmarrje	$90, 110$	$120, 120$

- Si do t'i luanit ju lojërat e tilla?

Gjahu i kaprojve (Vazhdim)

- Bashkësia e ekulibreve të Nash-it:

$$\mathbf{N}(DL) = \{\,(Dre, Dre), (Lepur, Lepur)\,\}$$
$$\mathbf{N}(ON) = \{\,(Obligacione, Obligacione), (Ndermarrje, Ndermarr$$

- Si mendoni ju?

Lojë me kërkesë Nash

- Secili nga ju do të bëhet çift në mënyrë të rastësishme me një student tjetër.
- Përpiqeni të ndani 10 €.
- Secili shkruan pavarësisht se sa do (në shumëfishë të 1 €).
- Në qoftë se shuma e dy numrave është më e madhe se 10 €, të dytë nuk marrin asgjë.
- Përndryshe, të dytë marrin aq sa kanë shkruar.
- Shkruani emrin dhe kërkesën tuaj në letër.
- Unë do t'i bashkoj rastësisht nga dy.
- Zgjedh rastësisht një çift dhe e paguaj.

Optimizimi

- Le të jetë $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dhe $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Problem optimizimi me kufizime është

$$\max_{x \in \mathcal{D}} f(x)$$

  - f është *funksioni objektiv*
  - $\mathcal{D}$ është *bashkësia e kufizimeve*
  - Një zgjidhje e këtij problemi është $x \in \mathcal{D}$ i tillë që

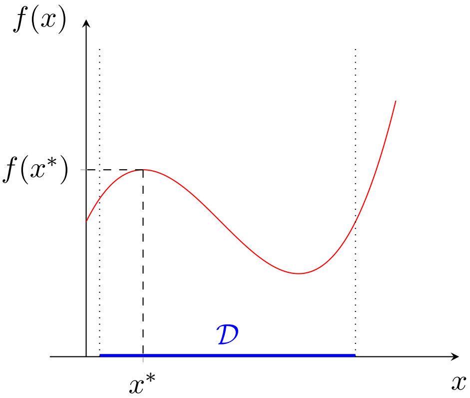
$$f(x) \geq f(y) \quad \text{për çdo } y \in \mathcal{D}.$$

    x i tillë quhet *maksimizues.*
  - Bashkësia e maksimizuesve shënohet me

$$\operatorname{argmax} \{ f(x) \mid x \in \mathcal{D} \}$$

- Në mënyrë analoge për problemet e minimizimit

Shembuj grafikë

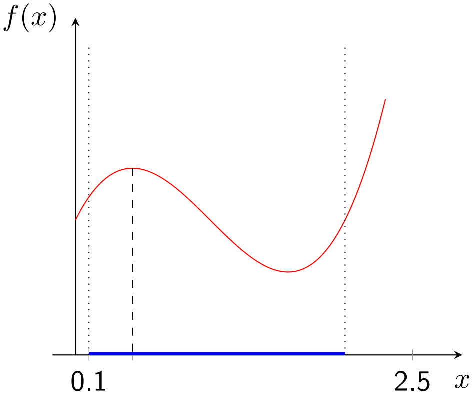


- $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = f(x^*)$
- $\operatorname{argmax} \{ f(x) \mid x \in \mathcal{D} \} = \{ x^* \}$

Shembuj grafikë (Vazhdim)

Shembull

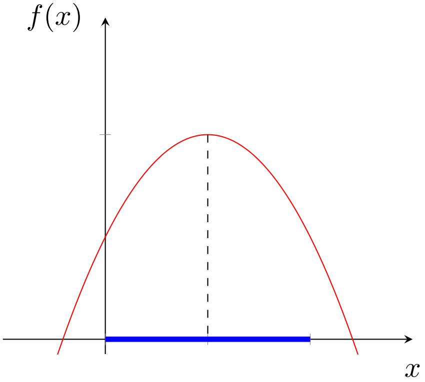
$\max x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ me kufizimet $0.1 \leq x \leq 2.5$



Shembuj grafikë (Vazhdim)

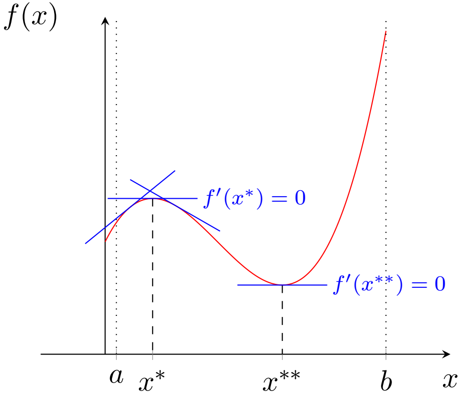
Shembull

$\max -(x-1)^2 + 2$ me kufizimet $x \in [0, 2]$



Rasti i thjeshtë

- Le të jetë $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dhe le të shqyrtojmë rastin $max_{x \in [a,b]} f(x)$.



- Një pikë x të tillë që $f'(x) = 0$ e quajmë *pikë kritike.*

Optimumet e brendshme

Teoremë

Le të jetë $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksion i derivueshëm në (a, b). Në qoftë se x^*, $a \leq x^* \leq b$, është maximum (minimum) lokal i f në $[a, b]$, atëherë $f'(x^*) = 0$, pra x^* është pikë kritike e f.

- Njihet si *kondita e rendit të parë*
- Është kusht i nevojshëm për optimum lokal të brendshëm
  - Nuk është kusht i mjaftueshëm për optimum lokal
  - Nuk është kusht i nevojshëm për optimum global
- *Kondita e rendit të dytë* bën dallimin ndërmjet minimumit dhe maksimumit lokal:

Teoremë

Le të jetë $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksion dy herë i derivueshëm në (a, b). Në qoftë se x^*, $a \leq x^* \leq b$, është maximum (minimum) lokal i f në $[a, b]$, atëherë $f''(x^*) \leq 0$ ($f''(x^*) \geq 0$).

Algoritmi për zgjidhjen e rastit të thjeshtë

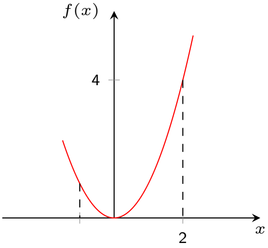
- Le të jetë $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksion i derivueshëm. Shqyrtojmë problemin $\max_{x \in [a,b]} f(x)$. Në qoftë se problemi ka zgjidhje, atëherë ajo mund të gjendet me algortimin vijues:
  1. Gjej të gjitha pikat kritike, d.m.th., $x^* \in [a, b]$ të tillë që $f'(x^*) = 0$.
  2. Gjej vlerën e f në të gjitha pika kritike dhe në skajet a e b.
  3. Zgjidhja është pika që jep vlerën më të madhe të f.
- Në qoftë se f është funksion i vazhdueshëm në tërë segmentin $[a, b]$, atëherë, sipas teoremës së Weierstrass-it, problemi ka zgjidhje.
- Vërejmë se në qoftë se $f'(a) > 0$ (ose $f'(b) < 0$), atëherë zgjidhja nuk mund të jetë a (ose b).

Shembuj

Shembull

Gjeni

$$\max_{x\in[-1,2]} x^2$$



Zgjidhje

Funksioni $f(x) = x^2$ është i vazhdueshëm dhe $[-1, 2]$ është interval i mbyllur, prandaj, sipas teoremës së Weierstrass-it, problemi ka zgjidhje. Ekuacioni

$$f'(x) = 2x = 0$$

ka zgjidhjen $x = 0$, e cila është e vetmja pikë kritike. Kemi $f(0) = 0$, $f(-1) = 1$, $f(2) = 4$. Prandaj

$$\operatorname{argmax}\{x^2 \mid x \in [-1, 2]\} = \{2\},$$

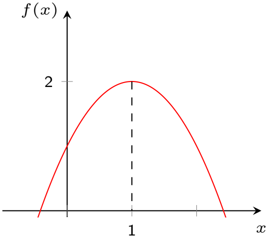
d.m.th., 2 është *maksimumi global.*

Shembuj (Vazhdim)

Shembull

Gjeni

$$\max_{x\in[0,2]} -(x-1)^2+2$$



Zgjidhje

Funksioni f është i vazhdueshëm dhe $[0,2]$ është i mbyllur, prandaj problemi ka zgjidhje. Ekuacioni

$$f'(x) = 2(x-1) = 0$$

ka zgjidhjen $x = 1$, e cila është e vetmja pikë kritike. Kemi $f(1) = 2$, $f(0) = 1$, $f(2) = 1$. Prandaj, 1 është maksimumi global:

$$\operatorname{argmax}\{\,-(x-1)^2+2 \mid x \in [0,2]\,\} = \{\,1\,\}\,.$$

Vërejmë se $f'(0) = 2 > 0$ dhe $f'(2) = -2 < 0$, kështu që mund t'i eliminojmë 0 dhe 2 si kandidatë.

- Çfarë do të ishte zgjidhja sikur bashkësia e kufizimeve të ishte $[-1, 0.5]$?

Algoritmi për rastin e përgjithshëm

- Le të jetë $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funksion i derivueshëm parcialisht. Shqyrtojmë problemin $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x)$. Në qoftë se problemi ka zgjidhje, atëherë ajo mund të gjendet me algortimin vijues:
  1. Gjej të gjitha pikat kritike $x^* \in \mathcal{D}$ të tilla që $\mathrm{D}\, f(x^*) = 0$.
  2. Gjej vlerën e f në pikat kritike dhe në skajet e $\mathcal{D}$.
  3. Zgjidhja është pika që jep vlerën më të madhe të f.
- Në probleme më komplekse gjetja e vlerës së f në skajet e $\mathcal{D}$ mund të jetë e vështirë.
- Për raste të tilla përdoren metoda e Lagrange-it (për kufizime barazimesh) dhe metoda e Kuhn-Tucker-it (për kufizime mosbarazimesh).

Dipoli i Cournot-it

- Dy firma garojnë duke zgjedhur se sa të prodhojnë
- Augustine Cournot (1838)
- Funksioni i çmimit (inversi i kërkesës):

$$p(q_1+q_2) = \begin{cases} a - b(q_1+q_2) & \text{në qoftë se } q_1+q_2 \leq \frac{a}{b}, \\ 0 & \text{në qoftë se } q_1+q_2 > \frac{a}{b}. \end{cases}$$

- Funksioni i kostos i firmës i:

$$c_i(q_i) = cq_i \quad (i = 1, 2),$$

ku $a > c \geq 0$ dhe $b > 0$

- Funksioni i fitimit (në këtë rast, funksioni i profitit) i firmës i:

$$\begin{aligned} u_i(q_1, q_2) &= p(q_1+q_2)q_i - c_i(q_i) \\ &= \begin{cases} (a - c - b(q_1+q_2))q_i & \text{në qoftë se } q_1+q_2 \leq \frac{a}{b}, \\ -cq_i & \text{në qoftë se } q_1+q_2 > \frac{a}{b} \end{cases} \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

Dipoli i Cournot-it (Vazhdim)

Pohim

Korrespondenca më e mirë e përgjegjjeve e firmës $i \neq j$ jepet me

$$B_i(q_j) = \begin{cases} \frac{a-c-bq_j}{2b} & \text{në qoftë se } q_j < \frac{a-c}{b} \\ 0 & \text{në qoftë se } q_j \geq \frac{a-c}{b}. \end{cases}$$

Vërtetim.

Në qoftë se $q_2 \geq \frac{a-c}{b}$, atëherë $u_1(q_1, q_2) < 0$ për çfarëdo $q_1 > 0$. Prandaj, $q_1 = 0$ është maksimizuesi i vetëm i fitimit.

Në qoftë se $q_2 < \frac{a-c}{b}$, atëherë përgjegjja më e mirë nuk mund të jetë $q_1 = 0$, sepse $u_1(q_1, q_2) > 0$ për çfarëdo $q_1 > 0$ të tillë që $q_1 + q_2 < \frac{a-c}{b}$. Më tutje, duhet të jetë $q_1 + q_2 \leq \frac{a-c}{b} \leq \frac{a}{b}$, sepse përndryshe $u_1(q_1, q_2) < 0$. Prandaj, duhet të vlejë kondita vijuese e rendit të parë

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = a - c - 2bq_1 - bq_2 = 0.$$

Ngjashëm për firmën 2. $\square$

Ekuilibri i Nash-it për dipolin e Cournot-it

Pohim

Bashkësia e ekuilibrave të Nash-it e lojës G të dipolit të Cournot-it është

$$\mathbf{N}(G) = \left\{ \left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b} \right) \right\}.$$

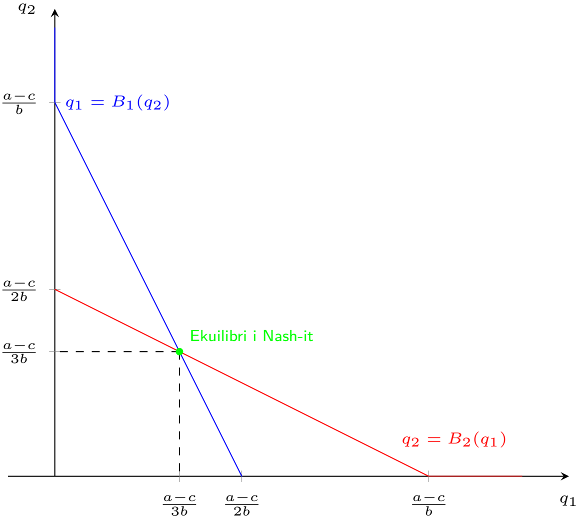
Vërtetim.

Supozojmë se (q_1^*, q_2^*) është ekuilibër i Nash-it dhe $q_1^* = 0$. Atëherë, $q_2^* = \frac{a-c}{2b} < \frac{a-c}{b}$. Por, atëherë $q_1^* \notin B_1(q_2^*)$, që është kontradiksion. Prandaj, duhet të jetë $0 < q_1^* < \frac{a-c}{b}$. Në mënyrë analoge, $0 < q_2^* < \frac{a-c}{b}$. Tani, rezultati rrjedh nga korrespondencat më të mira të përgjegjjeve: $q_1^* = \frac{a-c-bq_2^*}{2b}$ dhe

$$q_2^* = \frac{a-c-bq_1^*}{2b} = \frac{a-c-b\frac{a-c-bq_2^*}{2b}}{2b} = \frac{a-c}{4b} + \frac{q_2^*}{4}.$$

Duke zgjidhur ekuacionin e fundit sipas q_2^*, $q_2^* = \frac{a-c}{3b}$, që implikon $q_1^* = \frac{a-c}{3b}$. $\square$

Ekuilibri i Nash-it për dipolin e Cournot-it (Vazhdim)



Oligopoli i Cournot-it

- Në ekuilibrin e Nash-it për dipolin e Cournot-it profiti i secilës firmë është

$$u_i(q_1^*, q_2^*) = (a - c - b(q_1^* + q_2^*))q_i^*$$
$$= (a - c - 2b\frac{a-c}{3b})\frac{a-c}{3b} = \frac{(a-c)^2}{9b}.$$

- A ka ndonjë mënyrë për këto dy firma të rrisin profitin?
- Çfarë në qoftë se formojnë një kartel dhe sillen si një monopolist, për të ndarë pastaj profitin nga monopoli?
    - **kartel,** *e.* asociacion prodhuesish ose ofertuesish i formuar për të mbajtur çmimet e larta dhe kufizuar kompeticionin – *Concise Oxford English Dictionary,* 2011.

Oligopoli i Cournot-it (Vazhdim)

- Do të maksimizojnë

$$u(q_1 + q_2) = (a - c - b(q_1 + q_2))(q_1 + q_2))$$

  - Ekuacioni

$$\frac{du(q_1 + q_2)}{d(q_1 + q_2)} = a - c - 2b(q_1 + q_2) = 0$$

  jep pikën kritike

$$q_1 + q_2 = \frac{a - c}{2b},$$

  - e cila është maksimum global nën kufizimet $0 \leq q_1 + q_2 \leq \frac{a}{b}$.
- Gjysma e profitit maksimal është

$$\frac{u(q_1 + q_2)}{2} = \frac{(a - c)^2}{8b}.$$

- A është stabil karteli?