Seritë

F. M. Berisha, N. Berisha

Universiteti i Prishtinës

Qëllimet dhe objektivat

- Nxënja e nocionit të një serie dhe konvergjencës së saj
- Llogaritja e shumës së një serie gjeometrike
- Përcaktimi i natyrës së një serie të thjeshtë

Përmbajtja

Nocioni i një serie

Le të jetë a_1, a_2, a_3, ..., a_n, $\ldots$ një varg.
Formojmë vargun e shumave $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ të termave të vargut $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Themi se vargu $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ është një *seri.*
Në qoftë se ekziston, limiti $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ quhet *shumë e serisë.*

Nocioni i një serie. (Vazhdim)

Seri

- Në qoftë se $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ është një varg numrash, atëherë vargu i *shumave të pjesëshme* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ të tij quhet *seri.*
- Në qoftë se $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, atëherë S është *shuma e serisë:*

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

- Në qoftë se ekziston shuma e një serie, atëherë themi se seria është *konvergjente;* në të kundërtën seria është *divergjente.*

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$

Shembull

Shqyrtoni natyrën (konvergjente ose divergjente) e serisë

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. (Vazhdim)

Zgjidhje.

Tabela vijuese na jep një ide intuitive mbi natyrën e serisë $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

n	1	2	5	10	100	1000	10000
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	1	1.5	2.2833	2.9290	5.1874	7.4855	9.7876

Pra, kemi përshtypjen se shumat e pjesëshme rriten pafundësisht:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

$\square$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$

Shembull

Çfarë është natyra e serisë vijuese?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Zgjidhje.

n	10	100	10^3	10^4	10^5	10^6
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$	1.5498	1.6350	1.6439	1.6448	1.6449	1.6449

Nga tabela shohim intuitivisht se seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergjon.
Shuma e saj nuk e tejkalon, për shembull, numrin 2. $\square$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^k$

Natyra e serisë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$

- Në qoftë se $k > 1$, atëherë seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergjon.
- Në qoftë se $k \leq 1$, atëherë seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ divergjon.

Seritë gjeometrike

- Në qoftë se vargu $\{a_1\}_{n=1}^{\infty}$ është varg gjeometrik, atëherë serinë $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e quajmë *seri gjeometrike.*
- Shuma e saj është (rikujtoni pikën paraprake)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{\left(\lim_{n\to\infty} q^n\right) - 1}{q - 1}.$$

- Ç'mund të themi mbi $\lim_{n\to\infty} q^n$ për vlera të dhëna të konstantës q?

Seritë gjeometrike. (Vazhdim)

Tabela vijuese ilustron sjelljen e vargut $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ për vlerat $q = \frac{2}{3}$, $q = -\frac{3}{4}$, $q = 2$ dhe $q = -1.5$.

n	1	2	5	10	50	100
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.4444	0.1317	0.017	$1.6 \cdot 10^{-9}$	$2.5 \cdot 10^{-18}$
$\left(-\frac{3}{4}\right)^n$	-0.75	0.5625	-0.2373	0.0563	$5.7 \cdot 10^{-7}$	$3.2 \cdot 10^{-13}$
2^n	2	4	32	1024	$1.1 \cdot 10^{15}$	$1.3 \cdot 10^{30}$
$(-1.5)^n$	-1.5	2.25	-7.594	57.67	$6.4 \cdot 10^{8}$	$4.1 \cdot 10^{17}$

Seritë gjeometrike. (Vazhdim)

Natyra e vargut $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$

- Në qoftë se $-1 < q < 1$, atëherë
$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$
- Në qoftë se $q > 1$, atëherë
$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty.$$
- Në qoftë se $q < -1$, atëherë nuk ekziston limiti i vargut $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Seritë gjeometrike. (Vazhdim)

Natyra e një serie gjeometrike

- Në qoftë se $-1 < q < 1$, atëherë

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}.$$

- Në qoftë se $q > 1$, atëherë

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \infty.$$

- Në qoftë se $q < -1$, atëherë seria $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ divergjon.

Një kriter mbi divergjencën

Një kriter mbi divergjencën e një serie

- Në qoftë se një seri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon, atëherë $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Prandaj, në qoftë se **nuk** është $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, atëherë seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergjon.

Kriteri i D'Alembert-it

Kriteri i D'Alembert-it mbi konvergjencën e një serie

- Për çdo n le të jetë $a_n > 0$ dhe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

- Në qoftë se $L < 1$, atëherë seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon.
- Në qoftë se $L > 1$, atëherë seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergjon.

Udhëzime për lexim të mëtejmë

- http://www.fberisha.org
- Detyrë shtëpie: Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks,* fq. 57–63.

Përfundim

- Nocionet e një serie, konvergjencës dhe shumës së saj
- Natyra e vargut $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ dhe limiti i tij
- Llogaritja e shumës së një serie gjeometrike
- Kriteret mbi përcaktimin e natyrës së një serie