

Progresioni aritmetik dhe ai gjeometrik

F. M. Berisha, N. Berisha



Universiteti i Prishtinës

Qëllimet dhe objektivat

- Nxënja e nocioneve të dy tipesh të rëndësishme vargjesh: vargut aritmetik dhe atij gjeometrik
- Llogaritja e një termi të çfarëdoshëm dhe shumës së termave të një vargu aritmetik ose gjeometrik
- Zbatime në biznes dhe ekonomiks

Përmbajtja

- 1 Vargu (progresioni) aritmetik
- 2 Vargu (progresioni) gjeometrik

Vargu (progresioni) aritmetik

Varg (progresion) aritmetik

Një varg $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ është **varg** (ose **progresion**) **aritmetik** në qoftë se çdo element ndryshon nga elementi paraardhës për një numër konstant d (të quajtur **diferencë**, ose **ndryshim**); d.m.th., në qoftë se për çdo $n > 1$ është

$$a_n - a_{n-1} = d.$$

Vargu (progresioni) aritmetik. (Vazhdim)

Shembull

Një biznes prodhimi detergjenti kishte në vitin 2007 produktin vjetor 147 ton.

Pronari ka planifikuar që çdo vit të rrisë produktivitetin për 4.5 ton.

Sa do të jetë prodhimi i planifikuar vjetor në vitin 2009?

Vargu (progresioni) aritmetik. (Vazhdim)

Zgjidhje.

Vargu i prodhimeve të planifikuara vjetore është progresion aritmetik:

Viti	2007	2008	2009	...
n	1	2	3	...
a_n	147	151.5	156	...

Pra, prodhimi vjetor në vitin 2009 është paraparë të jetë $a_3 = 156$ ton detergjent.



Termi i përgjithshëm i një vargu aritmetik

Termi i përgjithshëm i një vargu aritmetik:

$$\begin{aligned}a_n &= a_{n-1} + d = (a_{n-2} + d) + d = a_{n-2} + 2d \\ &= a_{n-3} + 3d = \cdots = a_1 + (n-1)d.\end{aligned}$$

Termi i përgjithshëm i një vargu aritmetik

Termi i përgjithshëm i një vargu aritmetik me term të parë a_1 dhe ndryshim d është

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Termi i përgjithshëm i një vargu aritmetik. (Vazhdim)

Shembull

Gjeni sasinë e prodhimit vjetor të planifikuar për vitin 2017 në zbatimin nga shembulli i mëparmë.

Zgjidhje.

Siç pamë, prodhimet e planifikuara vjetore formojnë varg aritmetik me $a_1 = 147$, $d = 4.5$.

Tani kërkohet elementi a_{11} i vargut.

$$a_{11} = a_1 + (11 - 1)d = 147 + 10 \cdot 4.5 = 192$$

ton.



Shuma a termave të një vargu aritmetik

Shuma a termave të një vargu aritmetik

Shuma e n termave të parë të një vargu aritmetik me term të parë a_1 dhe ndryshim d është

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$$

ose

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].$$

Shuma a termave të një vargu aritmetik. (Vazhdim)

Shembull

Është vlerësuar se javën e parë kontributet nën ndikimin e një kampanjeje për ngritje fondesh do të jenë 5,000 €, kurse gjatë javëve të ardhshme çdo javë do të zvogëlohen për 600 €.

Llogaritni totalin fondeve të ngritura nga kampanja gjatë periudhës kohore 8 javore.

Shuma a termave të një vargu aritmetik. (Vazhdim)

Zgjidhje.

Vargu i fondeve javora të ngritura nga kampanja është progresion aritmetik me element të parë $a_1 = 5000$ dhe diferencë $d = -600$.

$$S_8 = \frac{8}{2}[2 \cdot 5,000 + (8 - 1) \cdot (-600)] = 23,200$$

euro.



Vargu (progresioni) gjeometrik

Varg (progresion) gjeometrik

Një varg $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ është *varg* (ose *progresion*) *gjeometrik* në qoftë se çdo element fitohet si prodhim i elementit paraardhës me një faktor konstant q (të quajtur *herës*);
d.m.th., në qoftë se për çdo $n > 1$ është

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Termi i përgjithshëm i një vargu gjeometrik

Termi i përgjithshëm i një vargu gjeometrik:

$$\begin{aligned}a_n &= a_{n-1}q = (a_{n-2}q)q = a_{n-2}q^2 \\ &= a_{n-3}q^3 = \dots = a_1q^{n-1}.\end{aligned}$$

Termi i përgjithshëm i një vargu aritmetik

Termi i përgjithshëm i një vargu gjeometrik me term të parë a_1 dhe herës q është

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

Termi i përgjithshëm i një vargu gjeometrik. (Vazhdim)

Shembull

Një prodhues vlerëson se të hyrat vjetore nga prodhimi dhe shitja e një malli do të rriten çdo vit për 15%. Sa janë të hyrat e vlerësuara vjetore për vitin 2015 në qoftë se në fund të vitit 2005 kishte të hyra vjetore prej 100,000 €?

Termi i përgjithshëm i një vargu gjeometrik. (Vazhdim)

Zgjidhje....

Për të hyrat vjetore gjatë periudhës së parë vëjmë $R_1 = 100,000$.
 Meqë të hyrat vjetore çdo vit të rriten për 15%, kemi

$$R_2 = R_1 + R_1 \cdot \frac{15}{100} = R_1 \left(1 + \frac{15}{100} \right).$$

Në qoftë se të hyrat vjetore për periudhën e n -të i shënojmë me R_n ,
 kurse ato të periudhës paraprase me R_{n-1} , atëherë

$$R_n = R_{n-1} + R_{n-1} \cdot \frac{15}{100} = R_{n-1} \left(1 + \frac{15}{100} \right),$$

që do të thotë se vargu i të hyrave vjetore është progresion
 gjeometrik me herësin $q = 1 + \frac{15}{100} = 1.15$. □

Termi i përgjithshëm i një vargu gjeometrik. (Vazhdim)

...Zgjidhje.

Të hyrat e vlerësuara vjetore për vitin 2015 janë

$$R_{11} = 100,000 \cdot 1.15^{10} \approx 404,556$$

euro.



Shuma a termave të një vargu gjeometrik

Shuma a termave të një vargu gjeometrik

Shuma e n termave të parë të një vargu gjeometrik me term të parë a_1 dhe herës q është

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Shuma a termave të një vargu gjeometrik. (Vazhdim)

Shembull

Supozojmë se gjatë vitit të parë të shfrytëzimit një makinë e caktuar industriale gjeneron profit prej 3,000 € dhe se çdo vit të ardhshëm profiti zvogëlohet për 13%. Sa do të jetë profiti total i gjeneruar nga shfrytëzimi i makinës për 15 vjet?

Shuma a termave të një vargu aritmetik. (Vazhdim)

Zgjidhje.

Shënojmë me P_n profitin për vitin e n -të. Atëherë

$$P_n = P_{n-1} - P_{n-1} \cdot \frac{13}{100} = P_{n-1} \left(1 - \frac{13}{100}\right),$$

që d.m.th. se vargu i profiteve vjetore është progresion gjeometrik me herës $q = 1 - \frac{13}{100} = 0.87$ dhe element të parë $P_1 = 3,000$.

$$S_{15} = 3,000 \cdot \frac{0.87^{15} - 1}{0.87 - 1} \approx 20,219.6$$

euro.



Udhëzime për lexim të mëtejme

- <http://www.fberisha.org>
- **Detyrë shtëpie:** Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks*, fq. 50–56.

Përfundim

- Nocionet vargjeve aritmetike dhe gjeometrike
- Gjetja dhe zbatimi në aplikacione e termit të përgjithshëm dhe shumës së termave të një vargu aritmetik ose gjeometrik
- Të kuptuarit e lidhmërisë ndërmjet një rritjeje ose zvogëlimi sipas një përqindje të fiksuar dhe vargut gjeometrik.