Vargjet dhe seritë

Vargjet dhe limitet e vargjeve

F. M. Berisha, N. Berisha

Universiteti i Prishtinës

Qëllimet dhe objektivat

- Nxënja e nocioneve të vargut të pafundmë dhe limitit të tij
- Gjetja e limitit të një vargu me anë të rregullave të llogaritjes së limitit
- Futja e nocionit të numrit *e*: bazës natyrore eksponenciale

Përmbajtja

1. Vargjet e pafundme
2. Limiti i një vargu
    - Nocioni i limitit
    - Vetitë e limiteve
    - Baza natyrore eksponenciale e

Vargjet e fundme

- *Varg i fundmë* quhet një matricë rresht $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p]$ me dimensione $1 \times p$.
- Kur flasim për vargje, zakonisht, i lëmë menjanë kllapat e matricës:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$$

ose, edhe me shkurt, $\{a_n\}_{n=1}^{p}$.

- Në qoftë se kemi një varg të fundmë $\{a_n\}_{n=1}^{p}$, atëherë çdo numri të plotë n nga intervali $1 \leq n \leq p$ i është shoqëruar një numër real a_n:

n	1	2	3	...	p
a_n	a_1	a_2	a_3	...	a_p

Vargjet e pafundme

- Në qoftë se numrin n nuk e kufizojmë nga sipër me p; d.m.th., çfarëdo numri të plotë $n \geq 1$ (pra, numri natyror) i shoqërohet një numër real a_n, atëherë fitohet *varg i pafundmë* (ose, shkurt, *varg*)
- Shoqërimi:

n	1	2	3	...	n	...
a_n	a_1	a_2	a_3	...	a_n	...

- Shënimi:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

ose, shkurt, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Shembuj vargjesh

Shembull (...)

1. Në qoftë se rregulla e shoqërimit të n me a_n është $a_n = \frac{1}{n}$, atëherë $a_1 = \frac{1}{1} = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ..., prandaj vargu i fituar është
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$
2. Në qoftë se $a_n = \frac{n}{n+1}$, atëherë vargu i fituar është
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

Shembuj vargjesh. (Vazhdim)

Shembull (...)

3. Në qoftë se $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$, atëherë vargu i fituar është

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \dots, (-1)^n \frac{1}{2n}, \dots$$

Limiti i një vargu

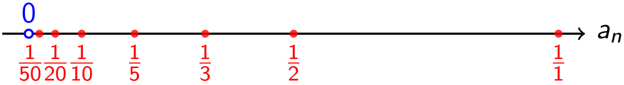
- „Sjellja“ e vargut $a_n = \frac{1}{n}$ kur n rritet pafundësisht:

n	10	100	200	500	1000	10000
a_n	0.1	0.01	0.005	0.002	0.001	0.0001

- Termi a_n i afrohet numrit 0 kur numri n rritet pafundësisht:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

- Interpretimi gjeometrik i shprehjes $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$



Limiti i një vargu. (Vazhdim)

Limiti i një vargu

Në qoftë se a_n i afrohet gjithmonë më afër numrit L
kur n rritet pafundësisht,
atëherë L është *limit i a_n kur n tenton nga ∞:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Vetitë e limiteve

Vetitë algjebrike të limiteve

Në qoftë se ekzistojnë $\lim_{n\to\infty} a_n$ dhe $\lim_{n\to\infty} b_n$, atëherë

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(ka_n)=k\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{për çdo konstantë } k,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{në qoftë se } \lim_{n\to\infty} b_n\neq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p=\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^p \quad \text{në qoftë se ekziston } \lim_{n\to\infty} a_n^p.$$

Vetitë e limiteve. (Vazhdim)

Limitet e vargjeve elementare

- Limiti i një konstante është vetë konstanta:

$$\lim_{n\to\infty} k = k.$$

- Limiti i $a_n = n$ kur $n \to \infty$ është:

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Vetitë e limiteve. (Vazhdim)

Shembull

Le të jetë $k > 0$ një konstantë.

- Limiti i një fuqie n^k:

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty.$$

- Limiti i vlerës reciproke të fuqisë:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^k = 0^k = 0.$$

Vetitë e limiteve. (Vazhdim)

Limiti i një shprehjeje polinomiale

Në qoftë se $a_n \neq 0$, atëherë

$$\lim_{n\to\infty}(a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0) = \lim_{n\to\infty} a_k n^k.$$

D.m.th., për të gjetur limitin, marrim limitin e termit me fuqinë më të madhe.

Vetitë e limiteve. (Vazhdim)

Shembull

Gjeni

$$\lim_{n\to\infty}(1-n^2+4n^3-3n^4).$$

Zgjidhje.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1-n^2+4n^3-3n^4) = \lim_{n\to\infty}(-3n^4) \\ = -3(\lim_{n\to\infty} n^4) = -\infty.\end{aligned}$$

$\square$

Vetitë e limiteve. (Vazhdim)

Limiti i një shprehjeje racionale

Për të gjetur limitin kur $n \to \infty$ të një shprehjeje racionale sipas n:

1. Krahasoni fuqitë më të mëdha të numëruesit dhe emëruesit, dhe pjesëtoni numëruesin dhe emëruesin me n të ngritur në më të voglën nga këto fuqi.
2. Gjeni limitet e numëruesit dhe emëruesit të ri.

Vetitë e limiteve. (Vazhdim)

Shembull

Gjeni
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 3n - 1}.$$

Zgjidhje.

Pjesëtojmë numëruesin dhe emëruesin me n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 3n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2-2n+1}{n^2}}{\frac{2n^2+3n-1}{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{3-0+0}{2+0-0} = \frac{3}{2}.$$

$\square$

Vetitë e limiteve. (Vazhdim)

Shembull

Gjeni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+2n+1}{5n-2}.$$

Vetitë e limiteve. (Vazhdim)

Zgjidhje.

Pjesëtojmë numëruesin dhe emëruesin me n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+2n+1}{5n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n+2+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}}.$$

Meqë

$$\lim_{n\to\infty}\left(-n+2+\frac{1}{n}\right) = -\infty \quad \text{dhe} \quad \lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{2}{n}\right) = 5,$$

rrjedh se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+2n+1}{5n-2} = -\infty.$$

□

Numri e

- Marrim në shqyrtim limitin e vargut $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- „Sjellja " e vargut kur $n \to \infty$:

n	1	10	100	1,000	10,000	100,000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2	2.5937	2.7048	2.7169	2.7182	2.7183

- Vlera e numrit e:

$$e = 2.71828...$$

Numri e. (Vazhdim)

Baza natyrore eksponenciale e

Numri

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots$$

quhet *baza natyrore eksponenciale.*

Udhëzime për lexim të mëtejmë

- `http://www.fberisha.org`
- Detyrë shtëpie: Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks,* fq. 41–50.

Përfundim

- Një varg i pafundmë $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dhe limiti i tij $\lim_{n\to\infty} a_n$
- Vetitë e limiteve:
  - Vetitë algjebrike të limiteve
  - Limitet e vargjeve elementare $\lim_{n\to\infty} k$ dhe $\lim_{n\to\infty} n$
  - Limiti i një shprehjeje polinomiale
  - Limiti i një shprehjeje racionale
- Baza natyrore eksponenciale e