Kapitulli 2

Vargjet dhe seritë

2.1 Vargjet dhe limitet e vargjeve

Detyra për ushtrime

1. Gjeni pesë elementët e parë të vargjeve

   (a) $a_n = 2n - 5$;

   (b) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$;

   (c) $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$;

   (d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;

   (e) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{2}$.

2. Sygjeroni elementin e përgjithshëm a_n për vargun

   (a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

   (b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{7}, \frac{16}{9}, \ldots$

   (c) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \ldots$

3. Gjeni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ për vargjet

(a) $a_n = \frac{n}{n+1}$;

(b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$;

(c) $a_n = \frac{3n-1}{2n+3}$;

(d) $a_n = \frac{5n-7}{1-3n}$;

(e) $a_n = \frac{n^3-2n-1}{n-3}$;

(f) $a_n = \frac{n-1}{-n^3+2n+1}$;

(g) $a_n = \frac{3-n}{-n^2+5n-2}$.

4. Gjeni

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-5}}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3-2n+4}{5n^2\sqrt{n^2+2}}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$.

5. Themi se një varg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ është *monoton rritës* në qoftë se çdo element i tij është më i vogël sesa elementi pasardhës; d.m.th., për çdo n është $a_n < a_{n+1}$. Cilët nga vargjet vijues janë monoton rritës?

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

(b) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

(c) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

(d) $a_n = \frac{1}{2^n}$

(e) $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$

6. Themi se një varg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ është *monoton zvogëlues* në qoftë se çdo element i tij është më i madh sesa elementi pasardhës; d.m.th., për çdo n është $a_n > a_{n+1}$. Cilët nga vargjet vijues janë monoton zvogëlues?

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

(b) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

(c) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

(d) $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

(e) $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$

7. Themi se një varg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ është *i kufizuar* në qoftë se ekzistojnë dy numra m dhe M ashtu që çdo element i vargut ndodhet ndërmjet tyre; d.m.th., për çdo n është $m \leq a_n \leq M$. Numrat m dhe M quhen *kufi i poshtëm* dhe *kufi i sipërm* i vargut a_n. A është i kufizuar vargu vijues? Gjeni një kufi të poshtëm dhe një kufi të sipërm të vargut.

   (a) $a_n = \frac{1}{n}$

   (b) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

   (c) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

   (d) $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

   (e) $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$

8. Gjeni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ për vargjet

   (a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$;

   (b) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$;

   (c) $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$;

   (d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n}$;

   (e) $a_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{5n}$;

   (f) $a_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{-4n}$.

9. Le të jenë $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dhe $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dy vargje. Themi se një varg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ është $\mathrm{O}(b_n)$ (shënojmë $a_n = \mathrm{O}(b_n)$) në qoftë se ekzistojnë konstantat C dhe n_0 të tilla që $a_n \leq C b_n$ për çdo $n > n_0$. Vërtetoni transformimet vijuese në shprehje në të cilat përdoret notacion-O.

   (a) $\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(2)$

   (b) $a_n = \mathrm{O}(a_n)$

   (c) $c\,\mathrm{O}(a_n) = \mathrm{O}(a_n)$

(d) $\mathrm{O}(ca_n) = \mathrm{O}(a_n)$

(e) $\mathrm{O}(a_n)\,\mathrm{O}(b_n) = \mathrm{O}(a_n b_n)$

(f) Në qoftë se $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, atëherë $\mathrm{O}(a_n) + \mathrm{O}(b_n) = \mathrm{O}(b_n)$.

10. Duke shfrytëzuar faktet se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

dhe se për çdo k dhe çdo $\alpha > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\alpha^n} = 0,$$

vërtetoni se

(a) $\ln n = \mathrm{O}(n)$, por $n \neq \mathrm{O}(\ln n)$;

(b) $n \ln n = \mathrm{O}(n^{3/2})$, por $n^{3/2} \neq \mathrm{O}(n \ln n)$;

(c) $n^m = \mathrm{O}(\alpha^n)$, por $\alpha^n \neq \mathrm{O}(n^m)$.