Matricat dhe përcaktorët. Zgjidhja e sistemeve të tri ekuacioneve me metodën e Cramer-it

F. M. Berisha, N. Berisha

Universiteti i Prishtinës

Qëllimet dhe objektivat

- Nxënja e nocionit të matricës si tabelë drejtkëndëshe dhe veprimeve themelore me to.
- Llogaritja e vlerave të përcaktorëve të matricave katrore të rendit të dytë dhe të tretë.
- Zbatimi i përcaktorëve për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me metodën e Cramer-it.

Përmbajtja

Shembull sistemi tri ekuacionesh lineare

Shembull

Në një biznes, veturat më të popullarizuara janë të Tipit A, B, C.
Çmimi i shitjes për secilin tip nuk është i njëjtë.
Tabela tregon kërkesat dhe të ardhurat për një periudhë tremujore.
Paraqitni ekuacionet për llogaritjen e çmimit mesatar të shitjes.

Muaji	Tipi A	Tipi B	Tipi C	Të ardhurat
1	25	62	54	$2,756,000$ *e*
2	28	42	58	$2,695,000$ *e*
3	45	53	56	$3,124,000$ *e*

Tabela: Kërkesat dhe të ardhurat nga veturat.

Shembull sistemi tri ekuacionesh lineare. (Vazhdim)

Zgjidhje.

Shënojmë me x, y dhe z çmimet mesatare të shitjes
për Tipin A, B, përkatësisht C.
Atëherë, shitjet për secilën nga periudhat mund të paraqiten
me sistemin vijues të ekuacioneve

$$\begin{aligned} 25x + 62y + 54z &= 2{,}756{,}000 \\ 28x + 42y + 58z &= 2{,}695{,}000 \\ 45x + 53y + 56z &= 3{,}124{,}000. \end{aligned}$$

□

Matricat

Matricë është një tabelë drejtkëndëshe numrash, sikur këto të mëposhtmet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ose} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -5 & 21 & -3 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Matricat. (Vazhdim)

Matrica

Në formë të përgjithshme, një matricë A shënohet me

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}].$$

- Numrat a_{ij} janë *elementet* (ose *termat*) e matricës, ku indeksi i tregon rreshtin dhe j tregon shtyllën.
- Një matricë me m rreshta dhe n shtylla quhet *e rendit* $m \times n$.
- Në qoftë se $m = n$, themi se matrica është *katrore* e rendit n.

Verpimet e para me matrica

Mbledhja dhe zbritja e matricave

Shuma e dy matricave $A = [a_{ij}]$ dhe $B = [b_{ij}]$ të të njëjtit rend është matrica $C = A + B = [c_{ij}]$ e rendit të njëjtë, elementet e së cilës janë shumat e elementeve përkatës:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{për çdo } i \text{ e } j.$$

Ndryshimi i dy matricave $A = [a_{ij}]$ dhe $B = [b_{ij}]$ të të njëjtit rend është matrica $C = A - B = [c_{ij}]$ e rendit të njëjtë, elementet e së cilës janë ndryshimet e elementeve përkatës:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad \text{për çdo } i \text{ e } j.$$

Verpimet e para me matrica. (Vazhdim)

Shembull

Llogaritni $A+B$ dhe $A-B$ në qoftë se janë dhënë

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{dhe} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zgjidhje.

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2-1 & 6+0 \\ 2-2 & -3+3 & 5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 1-3 & 2+1 & 6-0 \\ 2+2 & -3-3 & 5-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Përcaktorët

Përcaktori (determinanta) i rendit të dytë

Në qoftë se A është një matricë katrore e rendit 2, d.m.th.,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

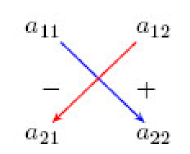
atëherë *përcaktori* (ose *determinanta*) i A është

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Përcaktorët. (Vazhdimi)

Mbani mend!

Skica vijuese na ndihmon për të mbajtur në mend mënyrën e llogaritjes së përcaktorit të një matrice të rendit të dytë.



$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Përcaktorët. (Vazhdimi)

Shembull

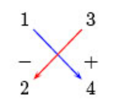
Llogaritni det A për matricën

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Përcaktorët. (Vazhdimi)

Zgjidhje.

Sipas skemës



kemi

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

$\square$

Përcaktorët. (Vazhdimi)

Përcaktori (determinanta) i rendit të tretë

Në qoftë se A është një matricë katrore e rendit 3, d.m.th.,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

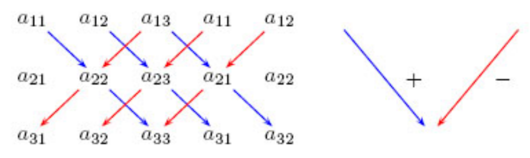
atëherë *përcaktori* i A është

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Përcaktorët. (Vazhdim)

Mbani mend!

Skica vijuese na ndihmon për të mbajtur në mend mënyrën e llogaritjes së përcaktorit të një matrice të rendit të tretë.



$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Përcaktorët. (Vazhdim)

Shembull

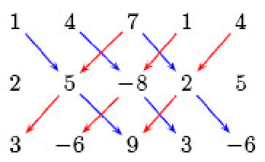
Llogaritni $\det A$ për matricën

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Përcaktorët. (Vazhdim)

Zgjidhje.

Sipas skemës



$$\det A = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot (-8) \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot (-6) - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot (-8) \cdot (-6) - 4 \cdot 2 \cdot 9 = -360.$$

$\square$

Rregulla e Cramer-it

Marrim në shqyrtim sistemin e tri ekuacioneve

$$
\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\
a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\
a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3.
\end{aligned}
$$

Rregulla e Cramer-it. (Vazhdim)

Rregulla e Cramer-it...

Të panjohurat x, y dhe z mund të gjenden nga relacionet

$$x = \frac{d_1}{\det A}, \quad y = \frac{d_2}{\det A}, \quad z = \frac{d_3}{\det A},$$

ku

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

është përcaktori i *matricës A të sistemit,*

Rregulla e Cramer-it. (Vazhdim)

...Rregulla e Cramer-it

kurse

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

janë përcaktorët të cilët formohen nga përcaktori i matricës A duke zëvendësuar shtyllën përkatëse të koeficientëve me shtyllën e vlerave b_1, b_2 dhe b_3 nga anët e djathta.

Rregulla e Cramer-it. (Vazhdim)

Shembull

Zgjidhim tani sistemin nga shembulli fillestar:

$$\begin{aligned} 25x + 62y + 54z &= 2{,}756{,}000 \\ 28x + 42y + 58z &= 2{,}695{,}000 \\ 45x + 53y + 56z &= 3{,}124{,}000. \end{aligned}$$

Rregulla e Cramer-it. (Vazhdim)

Zgjidhje....

$$\det A = \begin{vmatrix} 25 & 62 & 54 \\ 28 & 42 & 58 \\ 45 & 53 & 56 \end{vmatrix}$$

$$= 25 \cdot 42 \cdot 56 + 62 \cdot 58 \cdot 45 + 54 \cdot 28 \cdot 53$$

$$- 54 \cdot 42 \cdot 45 - 25 \cdot 58 \cdot 53 - 62 \cdot 28 \cdot 56 = 24{,}630,$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2{,}756{,}000 & 62 & 54 \\ 2{,}695{,}000 & 42 & 58 \\ 3{,}125{,}000 & 53 & 56 \end{vmatrix} = \cdots = 514{,}890{,}000,$$

□

Rregulla e Cramer-it. (Vazhdim)

...Zgjidhje.

$$d_2 = \begin{vmatrix} 25 & 2{,}756{,}000 & 54 \\ 28 & 2{,}695{,}000 & 58 \\ 45 & 3{,}125{,}000 & 56 \end{vmatrix} = \cdots = 289{,}590{,}000$$

dhe

$$d_3 = \begin{vmatrix} 25 & 62 & 2{,}756{,}000 \\ 28 & 42 & 2{,}695{,}000 \\ 45 & 53 & 3{,}125{,}000 \end{vmatrix} = \cdots = 686{,}175{,}000.$$

$\square$

Rregulla e Cramer-it. (Vazhdim)

...Zgjidhje.

Prandaj,

$$x = \frac{d_1}{\det A} = \frac{514{,}890{,}000}{24{,}630} \approx 20{,}904.99,$$
$$y = \frac{d_2}{\det A} = \frac{289{,}590{,}000}{24{,}630} \approx 11{,}757.61,$$
$$z = \frac{d_3}{\det A} = \frac{686{,}175{,}000}{24{,}630} \approx 27{,}859.32.$$

$\square$

Udhëzime për lexim të mëtejmë

- `http://www.fberisha.org`
- Detyrë shtëpie: Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks,* fq. 9–19.

Përfundim

- Një matricë $A = [a_{ij}]$
- Përcaktori $\det A = |a_{ij}|$ i matricës A
- Mënyrat e llogaritjes së përcaktorit të një matrice të rendit të dytë ose të tretë
- Rregulla e Cramer-it

$$x_i = \frac{d_i}{\det A}$$