Integrimi me zëvendësim

F. M. Berisha

Universiteti i Evropds Juglindore, Tetovë

Qëllimet dhe objektivat

- Zbatimi i integrimit me zëvendësim për të gjetur një funksion primitiv
- Forma integrale e rregullës zingjir si një teknikë për të thjeshtuar një integral duke ndërruar variablat.

Përmbajtja

Forma integrale e rregullës zingjir

- Le të jetë $G(u)$ një funksion primitiv i $g(u)$
- Sipas rregullës zingjir

$$\frac{d}{dx}[G(u)] = G'(u)\frac{du}{dx} = g(u)\frac{du}{dx}$$

- Prandaj

$$\int g(u)\frac{du}{dx}\, dx = G(u) + C.$$

Forma integrale e rregullës zingjir. (Vazhdim)

Forma integrale e rregullës zingjir

Në qoftë se g është funksion i vazhdueshëm i u
dhe $u(x)$ është funksion i derivueshëm i x, atëherë

$$\int g(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int g(u)\,du.$$

D.m.th., për të integruar një prodhim të formës $g(u)\frac{du}{dx}$,
në të cilin njëri nga faktorët $\frac{du}{dx}$ është derivati i një shprehjeje u
e cila paraqitet në faktorin tjetër:

1. Gjejmë integralin e pacaktuar $\int g(u)\,du$ të faktorit $g(u)$ sipas u.
2. Zëvendësojmë u në përgjegjjen me shprehjen e vet sipas x.

Forma integrale e rregullës zingjir. (Vazhdim)

Shembull

Gjeni
$$\int 6(x^2 - 5x - 3)^5 (2x - 5)\, dx.$$

Zgjidhje. . .

Funksioni nën shenjën e integralit $6(x^2 - 5x - 3)^5(2x - 5)$ është prodhim i formës

$$6(x^2 - 5x - 3)^5(2x - 5) = g(u)\frac{du}{dx},$$

ku
$$g(u) = 6u^5 \quad \text{dhe} \quad u = x^2 - 5x - 3.$$

Forma integrale e rregullës zingjir. (Vazhdim)

. . . Zgjidhje.

Prandaj, sipas formës integrale të rregullës zingjir,

$$\begin{aligned}\int 6(x^2-5x-3)^5(2x-5)\,dx \\ &= \int g(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int 6u^5\,du \\ &= u^6 + C = (x^2-5x-3)^6 + C.\end{aligned}$$

$\square$

Ndërrimi i variablave

Integrimi me zëvendësim

1. Zëvendësojmë me u ndonjë shprehje sipas x e cila është zgjedhur për të thjeshtësuar integralin.
2. Rishkruajmë integralin sipas u. Për të rishkruar dx, llogarisim $\frac{du}{dx}$ dhe e zgjidhim algjebrikisht sikur të ishte simboli $\frac{du}{dx}$ thyesë.
3. Gjejmë integralin e fituar si rezultat dhe zëvendësojome u në përgjegjjen me shprehjen e vet sipas x.

Ndërrimi i variablave. (Vazhdim)

Mbani mend!

Në qoftë se funksioni nën shenjën e integralit është prodhim ose herës i dy faktorëve dhe njëri faktor është shumëfish i derivatit të një shprehjeje e cila paraqitet në faktorin tjetër, atëherë mbase kjo shprehje është zgjedhje e mirë për u.

Një shembull integrimi me zëvendësim

Shembull

Gjeni

$$\int 6(x^2 - 5x - 3)^5 (2x - 5)\, dx.$$

Zgjidhje...

Funksioni nën shenjën e integrali është prodhim
në të cilin njëri nga faktorët $2x - 5$
është derivati i një shprehjeje $6(x^2 - 5x - 3)^5$
e cila paraqitet në faktorin tjetër.
Le të jetë $u = x^2 - 5x - 3$. Atëherë,

$$\frac{du}{dx} = 2x - 5, \quad \text{d.m.th.} \quad du = (2x - 5)\, dx.$$

□

Një shembull integrimi me zëvendësim. (Vazhdim)

Zgjidhje...

Zëvendësojmë $u = x^2 - 5x - 3$ dhe $du = (2x - 5)\,dx$

$$\begin{aligned} \int 6(x^2 - 5x - 3)^5 (2x - 5)\,dx &= \int 6u^5\,du \\ &= u^6 + C = (x^2 - 5x - 3)^6 + C. \end{aligned}$$

□

Një aplikacion integrimi me zëvendësim

Shembull

Çmimi p (në euro) për njësi të një malli të caktuar vlerësohet të ndryshojë me shpejtësi

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{217x}{\sqrt{16 + x^2}},$$

ku x (qind) është kërkesa e konsumatorëve. Supozoni se 300 njësi ($x = 3$) kërkohen kur çmimi është 240 € për njësi.

1. Gjeni funksionin e çmimit $p(x)$.
2. Për çfarë çmimi do të kërkohen 400 njësi? Për çfarë çmimi nuk do të kërkohet asnjë njësi?
3. Sa njësi kërkohen për çmimin 30 € për njësi?

Një aplikacion integrimi me zëvendësim. (Vazhdim)

Zgjidhje. . .

1. $p(x)$ gjendet duke integruar $p'(x)$ sipas x:

$$p(x) = \int p'(x)\, dx = \int -\frac{217x}{\sqrt{16 + x^2}} dx.$$

Zëvendësojmë

$$u = 16 + x^2, \quad du = 2x\, dx, \quad \frac{1}{2}\, du = x\, dx,$$

□

Një aplikacion integrimi me zëvendësim. (Vazhdim)

...Zgjidhje...

për të fituar

$$
\begin{aligned}
p(x) = \int -\frac{217x}{\sqrt{16+x^2}}\,dx &= \int -\frac{217}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2}\,du \\
&= -\frac{217}{2}\int u^{-1/2}\,du = -\frac{217}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} u^{1/2} + C \\
&= -217\sqrt{16+x^2} + C.
\end{aligned}
$$

□

Një aplikacion integrimi me zëvendësim. (Vazhdim)

. . . Zgjidhje. . .

Meqë $p = 240$ kur $x = 3$, gjejmë

$$\begin{aligned} p(3) &= 240 \\ -217\sqrt{16+3^2} + C &= 240 \\ C &= 240 + 217\sqrt{25} \\ C &= 1325, \end{aligned}$$

prandaj

$$p(x) = -217\sqrt{16+x^2} + 1325.$$

$\square$

Një aplikacion integrimi me zëvendësim. (Vazhdim)

Zgjidhje...

2. Kur kërkohen 400 njësi, $x = 4$,
   dhe çmimi përkatës është

$$p(4) = -217\sqrt{16 + 4^2} + 1325 \approx 97.46.$$

   Asnjë njësi nuk kërkohet kur $x = 0$,

$$p(0) = -217\sqrt{16 + 0^2} + 1325 = 457.$$

$\square$

Një aplikacion integrimi me zëvendësim. (Vazhdim)

Zgjidhje. . .

3. Zgjidhim ekuacionin

$$\begin{aligned} p(x) &= 30 \\ -217\sqrt{16+x^2}+1325 &= 30 \\ \sqrt{16+x^2} &= \frac{1295}{217} \\ x &= \sqrt{\left(\frac{1295}{217}\right)^2 - 16} \\ x &\approx 4.43. \end{aligned}$$

Afërsisht, 443 njësi kërkohen kur çmimi është 30 € p.nj.

□

Udhëzime për lexim të mëtejmë

- `http://fberisha.netfirms.com`
- Detyrë shtëpie: Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks,* fq. 258–267.
- L. D. Hofmann, G. L. Bradley, *Calculus – for business, economics and life sciences,* fq. 386–398.

Përfundim

- Integrimi me zëvendësim:

$$\int g(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int g(u)\,du = G(u) + C,$$

ku G është një funksion primitiv i g