Emri: ______________________

Nr. ID: ______________________

Drejtimi: ______________________

Data: ______________________

Matematikë e biznesit II

Provimi përfundimtar, Forma: $\boxed{\text{A}}$

Zgjedhni përgjegjjen korrekte (duke rrethuar **vetëm njërin** nga opcionet e ofruara).

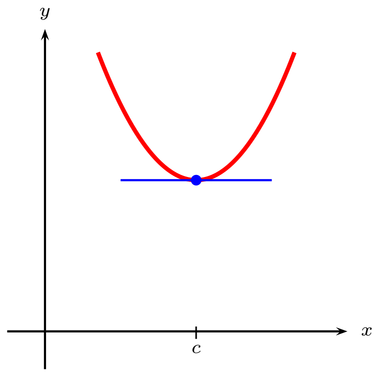
1. Cili nga pohimet vijuese është i saktë për funksionin $y = f(x)$, të paraqitur grafikisht në figurën, nga ana **e majtë** e pikës c?

   (a) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) > 0$

   (b) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) < 0$

   (c) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) > 0$

   (d) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) < 0$



2. Për funksionin $f(x) = x^4$, sa është **shpejtësia e qastit** e ndryshimit për vlerën $x = -1$të ndryshores së pavarur?

   (a) -5

   (b) -4

   (c) 1

   (d) 2

Shkruani zgjidhjet në hapësirat e zbrazëta. Në rast nevoje, mund të shfytëzoni faqen tjetër të fletës për llogaritje më të gjata.

3. Funksioni i çmimit është $p = 9 - \sqrt{x}$. Caktoni sasinë e mallit për të cilën **të hyrat e përgjithshme** janë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?

4. Prindi deponon në fillim të çdo viti, nga dita e lindjes së fëmisë deri në moshën 20 vjeçare, nga 400 € me 7% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, ashtu që i biri duke filluar nga mosha 40 vjeçare, në 20 vitet

vijuese të marrë në fund të çdo viti renta periodike. Sa është vlera e rentave?

5. Është dhënë funksioni i shpenzimeve të përgjithshme $C(x) = x\sqrt{6x^2 - 72x + 300}$. Llogaritni sasinë e prodhimit për të cilën **shpenzimet mesatare** janë minimale.

6. Cili kapital sjell për n vite me 6% kamatë të njëjtin interes **të thjeshtë** sikurse $12,000$ € me 3%?

7. Një prodhim është shitur së bashku me 15% marzhë nga 120.75 €, ndërsa i njëjti tani shitet për

99.95 €. A fitohet apo humbet tani në të, dhe për sa përqind?

8. Le të jetë $a > 0$ numër i dhënë. Duke ditur se $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, gjeni formulën për llogaritjen e derivatit të funksionit $f(x) = \log_a x$.

9. Në bankë janë deponuar $29,900$ € me 9% (p.a.d) dhe kapitalizim tremujor. Të llogaritet sa herë mund të merren renta tremujore prej $1,000$ €?

10. Një person deponon në bankë $4,000$ € me përqindje interesi 5% (p.a.d), kurse një person tjetër deponon $4,500$ € me përqindje interesi 4% (p.a.d). Pas sa kohe dy personat do të disponojnë me shumë të njëjtë?

Kapitalizimi është vjetor.

Çelësi i provimit $\boxed{\text{A}}$

Zgjedhni përgjegjjen korrekte (duke rrethuar **vetëm njërin** nga opcionet e ofruara).

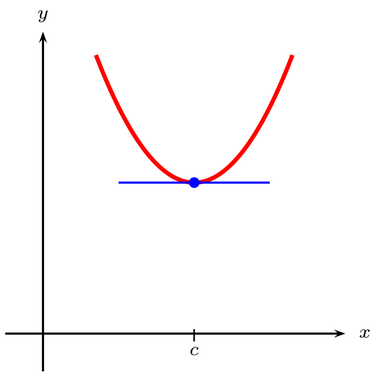
1. Cili nga pohimet vijuese është i saktë për funksionin $y = f(x)$, të paraqitur grafikisht në figurën, nga ana **e majtë** e pikës c?

   (a) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) > 0$

   (b) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) < 0$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) > 0$

   (d) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) < 0$



2. Për funksionin $f(x) = x^4$, sa është **shpejtësia e qastit** e ndryshimit për vlerën $x = -1$të ndryshores së pavarur?

   (a) -5

   $\boxed{\text{(b)}}$ -4

   (c) 1

   (d) 2

Shkruani zgjidhjet në hapësirat e zbrazëta. Në rast nevoje, mund të shfytëzoni faqen tjetër të fletës për llogaritje më të gjata.

3. Funksioni i çmimit është $p = 9 - \sqrt{x}$. Caktoni sasinë e mallit për të cilën **të hyrat e përgjithshme** janë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?

Zgjidhje. Nga
$$P(x) = px$$
gjejmë
$$P(x) = 9x - x\sqrt{x}.$$
Rrjedhimisht,
$$P'(x) = 9 - \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$
Zgjidhim ekuacionin
$$P'(x) = 0,$$
d.m.th.,
$$9 - \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0,$$
ose
$$\sqrt{x} = 6,$$
prej nga fitojmë
$$x = 36.$$
Meqë nga
$$P''(x) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

marrim

$$P''(36) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} < 0,$$

përfundojmë se në pikën $x = 36$ funksioni i të hyrave të përgjithshme $P(x)$ arrin maksimum. Vlera e të hyrave maksimale është

$$P(36) = 9 \cdot 36 - 36\sqrt{36} = 108.$$

4. Prindi deponon në fillim të çdo viti, nga dita e lindjes së fëmisë deri në moshën 20 vjeçare, nga 400 € me 7% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, ashtu që i biri duke filluar nga mosha 40 vjeçare, në 20 vitet vijuese të marrë në fund të çdo viti renta periodike. Sa është vlera e rentave?

Zgjidhje. Janë dhënë $p = 7$, $D = 400$.

Llogarisim së pari gjendjen e kapitalit pas $n = 20$ vitesh deponimesh periodike:

$$S_n = D\frac{r(r^n - 1)}{r - 1},$$

ku

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1.07.$$

Kemi

$$S_{20} = 400 \cdot \frac{1.07(1.07^{20} - 1)}{1.07 - 1} \approx 17,546.07.$$

Tani, sipas formulës për njehsimin e interesit dekursiv, llogarisim gjendjen e kapitalit në moshën 40 vjeçare të të birit:

$$K_n = S_{20}r^n,$$

d.m.th.,

$$K_{20} = 17,546.07 \cdot 1.07^{20} \approx 67,897.76.$$

Më në fund, llogarisim vlerën e rentave peridoike për 20 vjetët e mbetura:

$$R = K_{20}\frac{r^n(r - 1)}{r^n - 1},$$

d.m.th.,

$$R = 67,897.76 \cdot \frac{1.07^{20}(1.07 - 1)}{1.07^{20} - 1} \approx 6,409.07.$$

5. Është dhënë funksioni i shpenzimeve të përgjithshme $C(x) = x\sqrt{6x^2 - 72x + 300}$. Llogaritni sasinë e prodhimit për të cilën **shpenzimet mesatare** janë minimale.

Zgjidhje. Nga

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

gjejmë

$$\bar{C}(x) = \sqrt{6x^2 - 72x + 300}.$$

Rrjedhimisht,

$$\bar{C}'(x) = \frac{12x - 72}{2\sqrt{6x^2 - 72x + 300}}.$$

Zgjidhim ekuacionin

$$\bar{C}'(x) = 0,$$

d.m.th.,

$$12x - 72 = 0,$$

prej nga fitojmë

$$x = 6.$$

Meqë nga

$$\bar{C}''(x) = -\frac{(12x-72)^2}{4(6x^2-72x+300)^{3/2}} + \frac{6}{\sqrt{6x^2-72x+300}}$$

marrim

$$P''(6) = \frac{6}{\sqrt{6\cdot 6^2 - 72\cdot 6 + 300}} > 0,$$

përfundojmë se në pikën $x = 6$ funksioni i shpenzimeve mesatare $\bar{C}(x)$ arrin minimum.

6. Cili kapital sjell për n vite me 6% kamatë të njëjtin interes **të thjeshtë** sikurse $12,000$ € me 3%?

   Zgjidhje. Nga formula për njehsimin e interesit të thjeshtë

   $$I = \frac{nKp}{100},$$

   mbështetur në kushtet e dhëna në deturën kemi

   $$\frac{nK\cdot 6}{100} = \frac{n\cdot 12,000\cdot 3}{100},$$

   që është ekuivalente me

   $$K\cdot 6 = 12,000\cdot 3.$$

   Duke zgjidhur barazimin e fundit sipas K gjejmë

   $$K = \frac{12,000\cdot 3}{6} = 6,000.$$

7. Një prodhim është shitur së bashku me 15% marzhë nga 120.75 €, ndërsa i njëjti tani shitet për 99.95 €. A fitohet apo humbet tani në të, dhe për sa përqind?

   Zgjidhje. Janë dhënë $p = 15$ dhe $K + I = 120.75$. Për interesin e fituar në emër marzhe kemi

   $$I = \frac{pK}{100}.$$

   Duke zëvendësuar më sipër marrim

   $$K + \frac{15K}{100} = 120.75,$$

   ose

   $$K\left(1 + \frac{15}{100}\right) = 120.75,$$

   prej nga gjejmë vlerën e çmimit të diskontuar (pa marzhë) të mallit

   $$K = \frac{120.75}{1.15} = 105.$$

   Meqë $99.95 < 105$, konkludojmë se sipas çmimit të tanishëm malli është duke u shitur me humbje:

   $$105 - \tilde{I} = 99.95,$$

   d.m.th.,

   $$\tilde{I} = 105 - 99.95 = 5.05.$$

   Llogarisim përqindjen e humbjes:

   $$\tilde{p} = \frac{\tilde{I}}{K}\cdot 100 = \frac{5.05}{105}\cdot 100 \approx 4.8.$$

8. Le të jetë $a > 0$ numër i dhënë. Duke ditur se $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, gjeni formulën për llogaritjen e derivatit të funksionit $f(x) = \log_a x$.

   Zgjidhje. Kemi

$$f'(x) = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)',$$

   prej nga, duke pasur parasysh se $\ln a$ është konstantë, fitojmë

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a}(\ln x)',$$

   d.m.th.,

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

9. Në bankë janë deponuar $29,900$ € me 9% (p.a.d) dhe kapitalizim tremujor. Të llogaritet sa herë mund të merren renta tremujore prej $1,000$ €?

   Zgjidhje. Janë dhënë $M = 29,900$, $R = 1,000$, $p = 9$, $m = 4$. Llogarisim vlerën e $4n$. Kemi

$$r = 1 + \frac{p}{100m},$$

   d.m.th.

$$r = 1 + \frac{9}{100 \cdot 4} = 1.0225.$$

   Duke zëvendësuar vlerat në formulën

$$M = R\frac{r^{mn} - 1}{r^{mn}(r-1)},$$

   fitojmë

$$29,900 = 1,000\frac{1.0225^{4n} - 1}{1.0225^{4n}(1.0225 - 1)},$$

   d.m.th.,

$$\frac{29,900}{1,000} \cdot (1.0225 - 1) = \frac{1.0225^{4n} - 1}{1.0225^{4n}},$$

   ose

$$0.67275 \cdot 1.0225^{4n} = 1.0225^{4n} - 1.$$

   Prej këtej

$$1.0225^{4n}(1 - 0.67275) = 1,$$

   ose

$$1.0225^{4n} = \frac{1}{1 - 0.67275}.$$

   Duke logaritmuar anë për anë barazimin e fundit marrim

$$4n \log 1.0225 \approx \log 3.05577,$$

   d.m.th.

$$4n \approx \frac{\log 3.05577}{\log 1.0225} \approx 50.20.$$

10. Një person deponon në bankë $4,000$ € me përqindje interesi 5% (p.a.d), kurse një person tjetër deponon $4,500$ € me përqindje interesi 4% (p.a.d). Pas sa kohe dy personat do të disponojnë me shumë të njëjtë? Kapitalizimi është vjetor.

Zgjidhje. Janë dhënë $K = 4,000$, $p = 5$, $\tilde{K} = 4,500$, $\tilde{p} = 4$, $m = 1$. Nga formula për njehsimin e interesit dekursiv, mbështetur në kushtet e dhëna në deturën kemi

$$Kr^{mn} = \tilde{K}\tilde{r}^{mn},$$

ku

$$r = \left(1 + \frac{p}{100m}\right) = \left(1 + \frac{5}{100 \cdot 1}\right) \approx 1.05,$$
$$\tilde{r} = \left(1 + \frac{\tilde{p}}{100m}\right) = \left(1 + \frac{4}{100 \cdot 1}\right) \approx 1.04.$$

Rrjedhimisht,

$$\left(\frac{1.04}{1.05}\right)^{n} \approx \frac{4,000}{4,500}.$$

Duke logaritmuar anë për anë barazimin e fundit fitojmë

$$n \approx \frac{\log \frac{1.04}{1.05}}{\log \frac{4,000}{4,500}} \approx 12.31.$$

Emri: ______

Nr. ID: ______

Drejtimi: ______

Data: ______

Matematikë e biznesit II

Provimi përfundimtar, Forma: $\boxed{\text{B}}$

Zgjedhni përgjegjjen korrekte (duke rrethuar **vetëm njërin** nga opcionet e ofruara).

1. Për funksionin $f(x) = x^4 - x$, sa është **shpejtësia e qastit** e ndryshimit për vlerën $x = -1$të ndryshores së pavarur?

   (a) -5

   (b) -4

   (c) 1

   (d) 2

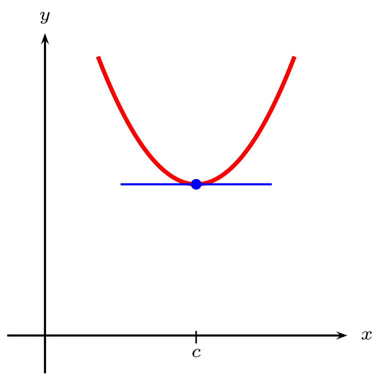
2. Cili nga pohimet vijuese është i saktë për funksionin $y = f(x)$, të paraqitur grafikisht në figurën, nga ana **e djathtë** e pikës c?

   (a) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) > 0$

   (b) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) < 0$

   (c) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) > 0$

   (d) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) < 0$



Shkruani zgjidhjet në hapësirat e zbrazëta. Në rast nevoje, mund të shfytëzoni faqen tjetër të fletës për llogaritje më të gjata.

3. Një person deponon në bankë $5,000$ € me përqindje interesi 6% (p.a.d), kurse një person tjetër deponon $5,500$ € me përqindje interesi 5% (p.a.d). Pas sa kohe dy personat do të disponojnë me shumë të njëjtë? Kapitalizimi është gjashtëmujor.

4. Le të jetë $a > 0$ numër i dhënë. Duke ditur se $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, gjeni formulën për llogaritjen e derivatit

të funksionit $f(x) = \log_a x$.

5. Një prodhim është shitur së bashku me 16% marzhë nga 133.4 €, ndërsa i njëjti tani shitet për 99.95 €. A fitohet apo humbet tani në të, dhe për sa përqind?

6. Prindi deponon në fillim të çdo viti, nga dita e lindjes së fëmisë deri në moshën 20 vjeçare, nga 500 € me 6% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, ashtu që i biri duke filluar nga mosha 40 vjeçare, në 20 vitet vijuese të marrë në fund të çdo viti renta periodike. Sa është vlera e rentave?

7. Cili kapital sjell për n vite me 7% kamatë të njëjtin interes **të thjeshtë** sikurse $14,000$ € me 4%?

8. Është dhënë funksioni i shpenzimeve të përgjithshme $C(x) = x\sqrt{5x^2 - 50x + 200}$. Llogaritni sasinë e prodhimit për të cilën **shpenzimet mesatare** janë minimale.

9. Në bankë janë deponuar $28,800$ € me 8% (p.a.d) dhe kapitalizim katërmujor. Të llogaritet sa herë mund të merren renta katërmujore prej $1,500$ €?

10. Funksioni i çmimit është $p = 9 - 2\sqrt{x}$. Caktoni sasinë e mallit për të cilën **të hyrat e përgjithshme**

janë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?

Çelësi i provimit $\boxed{\text{B}}$

Zgjedhni përgjegjjen korrekte (duke rrethuar **vetëm njërin** nga opcionet e ofruara).

1. Për funksionin $f(x) = x^4 - x$, sa është **shpejtësia e qastit** e ndryshimit për vlerën $x = -1$të ndryshores së pavarur?

   $\boxed{\text{(a)}}$ -5

   (b) -4

   (c) 1

   (d) 2

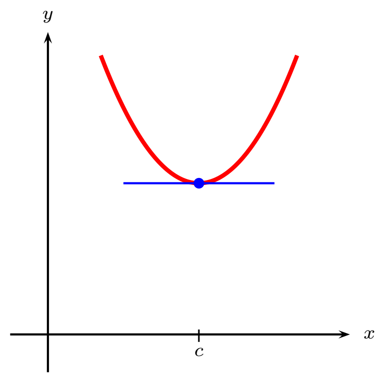
2. Cili nga pohimet vijuese është i saktë për funksionin $y = f(x)$, të paraqitur grafikisht në figurën, nga ana **e djathtë** e pikës c?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) > 0$

   (b) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) < 0$

   (c) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) > 0$

   (d) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) < 0$



Shkruani zgjidhjet në hapësirat e zbrazëta. Në rast nevoje, mund të shfytëzoni faqen tjetër të fletës për llogaritje më të gjata.

3. Një person deponon në bankë $5,000$ € me përqindje interesi 6% (p.a.d), kurse një person tjetër deponon $5,500$ € me përqindje interesi 5% (p.a.d). Pas sa kohe dy personat do të disponojnë me shumë të njëjtë? Kapitalizimi është gjashtëmujor.

Zgjidhje. Janë dhënë $K = 5,000$, $p = 6$, $\tilde{K} = 5,500$, $\tilde{p} = 5$, $m = 2$. Nga formula për njehsimin e interesit dekursiv, mbështetur në kushtet e dhëna në deturën kemi

$$Kr^{mn} = \tilde{K}\tilde{r}^{mn},$$

ku

$$r = \left(1 + \frac{p}{100m}\right) = \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 2}\right) \approx 1.03,$$

$$\tilde{r} = \left(1 + \frac{\tilde{p}}{100m}\right) = \left(1 + \frac{5}{100 \cdot 2}\right) \approx 1.025.$$

Rrjedhimisht,

$$\left(\frac{1.025}{1.03}\right)^{2n} \approx \frac{5,000}{5,500}.$$

Duke logaritmuar anë për anë barazimin e fundit fitojmë

$$2n \approx \frac{\log \frac{1.025}{1.03}}{\log \frac{5,000}{5,500}} \approx 19.59.$$

4. Le të jetë $a > 0$ numër i dhënë. Duke ditur se $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, gjeni formulën për llogaritjen e derivatit të funksionit $f(x) = \log_a x$.

   Zgjidhje. Kemi

$$f'(x) = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)',$$

   prej nga, duke pasur parasysh se $\ln a$ është konstantë, fitojmë

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a}(\ln x)',$$

   d.m.th.,

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

5. Një prodhim është shitur së bashku me 16% marzhë nga 133.4 €, ndërsa i njëjti tani shitet për 99.95 €. A fitohet apo humbet tani në të, dhe për sa përqind?

   Zgjidhje. Janë dhënë $p = 16$ dhe $K + I = 133.4$. Për interesin e fituar në emër marzhe kemi

$$I = \frac{pK}{100}.$$

   Duke zëvendësuar më sipër marrim

$$K + \frac{16K}{100} = 133.4,$$

   ose

$$K\left(1 + \frac{16}{100}\right) = 133.4,$$

   prej nga gjejmë vlerën e çmimit të diskontuar (pa marzhë) të mallit

$$K = \frac{133.4}{1.16} = 115.$$

   Meqë $99.95 < 115$, konkludojmë se sipas çmimit të tanishëm malli është duke u shitur me humbje:

$$115 - \tilde{I} = 99.95,$$

   d.m.th.,

$$\tilde{I} = 115 - 99.95 = 15.05.$$

   Llogarisim përqindjen e humbjes:

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{I}}{K} \cdot 100 = \frac{15.05}{115} \cdot 100 \approx 13.1.$$

6. Prindi deponon në fillim të çdo viti, nga dita e lindjes së fëmisë deri në moshën 20 vjeçare, nga 500 € me 6% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, ashtu që i biri duke filluar nga mosha 40 vjeçare, në 20 vitet vijuese të marrë në fund të çdo viti renta periodike. Sa është vlera e rentave?

   Zgjidhje. Janë dhënë $p = 6$, $D = 500$.

   Llogarisim së pari gjendjen e kapitalit pas $n = 20$ vitesh deponimesh periodike:

$$S_n = D\frac{r(r^n - 1)}{r - 1},$$

   ku

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1.06.$$

Kemi

$$S_{20} = 500 \cdot \frac{1.06(1.06^{20} - 1)}{1.06 - 1} \approx 19,496.36.$$

Tani, sipas formulës për njehsimin e interesit dekursiv, llogarisim gjendjen e kapitalit në moshën 40 vjeçare të të birit:

$$K_n = S_{20} r^n,$$

d.m.th.,

$$K_{20} = 19,496.36 \cdot 1.06^{20} \approx 62,527.48.$$

Më në fund, llogarisim vlerën e rentave peridoike për 20 vjetët e mbetura:

$$R = K_{20} \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1},$$

d.m.th.,

$$R = 62,527.48 \cdot \frac{1.06^{20}(1.06 - 1)}{1.06^{20} - 1} \approx 5,451.43.$$

7. Cili kapital sjell për n vite me 7% kamatë të njëjtin interes **të thjeshtë** sikurse $14,000$ € me 4%?

   Zgjidhje. Nga formula për njehsimin e interesit të thjeshtë

   $$I = \frac{nKp}{100},$$

   mbështetur në kushtet e dhëna në deturën kemi

   $$\frac{nK \cdot 7}{100} = \frac{n \cdot 14,000 \cdot 4}{100},$$

   që është ekuivalente me

   $$K \cdot 7 = 14,000 \cdot 4.$$

   Duke zgjidhur barazimin e fundit sipas K gjejmë

   $$K = \frac{14,000 \cdot 4}{7} = 8,000.$$

8. Është dhënë funksioni i shpenzimeve të përgjithshme $C(x) = x\sqrt{5x^2 - 50x + 200}$. Llogaritni sasinë e prodhimit për të cilën **shpenzimet mesatare** janë minimale.

   Zgjidhje. Nga

   $$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

   gjejmë

   $$\bar{C}(x) = \sqrt{5x^2 - 50x + 200}.$$

   Rrjedhimisht,

   $$\bar{C}'(x) = \frac{10x - 50}{2\sqrt{5x^2 - 50x + 200}}.$$

   Zgjidhim ekuacionin

   $$\bar{C}'(x) = 0,$$

   d.m.th.,

   $$10x - 50 = 0,$$

   prej nga fitojmë

   $$x = 5.$$

Meqë nga

$$\bar{C}''(x) = -\frac{(10x-50)^2}{4(5x^2-50x+200)^{3/2}} + \frac{5}{\sqrt{5x^2-50x+200}}$$

marrim

$$P''(5) = \frac{5}{\sqrt{5\cdot 5^2 - 50\cdot 5 + 200}} > 0,$$

përfundojmë se në pikën $x = 5$ funksioni i shpenzimeve mesatare $\bar{C}(x)$ arrin minimum.

9. Në bankë janë deponuar 28,800 € me 8% (p.a.d) dhe kapitalizim katërmujor. Të llogaritet sa herë mund të merren renta katërmujore prej 1,500 €?

Zgjidhje. Janë dhënë $M = 28,800$, $R = 1,500$, $p = 8$, $m = 3$. Llogarisim vlerën e $3n$. Kemi

$$r = 1 + \frac{p}{100m},$$

d.m.th.

$$r = 1 + \frac{8}{100\cdot 3} = 1.02667.$$

Duke zëvendësuar vlerat në formulën

$$M = R\frac{r^{mn}-1}{r^{mn}(r-1)},$$

fitojmë

$$28,800 = 1,500\frac{1.02667^{3n}-1}{1.02667^{3n}(1.02667-1)},$$

d.m.th.,

$$\frac{28,800}{1,500}\cdot(1.02667-1) = \frac{1.02667^{3n}-1}{1.02667^{3n}},$$

ose

$$0.512\cdot 1.02667^{3n} = 1.02667^{3n} - 1.$$

Prej këtej

$$1.02667^{3n}(1-0.512) = 1,$$

ose

$$1.02667^{3n} = \frac{1}{1-0.512}.$$

Duke logaritmuar anë për anë barazimin e fundit marrim

$$3n\log 1.02667 \approx \log 2.04918,$$

d.m.th.

$$3n \approx \frac{\log 2.04918}{\log 1.02667} \approx 27.26.$$

10. Funksioni i çmimit është $p = 9 - 2\sqrt{x}$. Caktoni sasinë e mallit për të cilën **të hyrat e përgjithshme** janë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?

Zgjidhje. Nga

$$P(x) = px$$

gjejmë

$$P(x) = 9x - 2x\sqrt{x}.$$

Rrjedhimisht,

$$P'(x) = 9 - 2\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Zgjidhim ekuacionin

$$P'(x) = 0,$$

d.m.th.,

$$9 - 2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0,$$

ose

$$\sqrt{x} = 3,$$

prej nga fitojmë

$$x = 9.$$

Meqë nga

$$P''(x) = -2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

marrim

$$P''(9) = -2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} < 0,$$

përfundojmë se në pikën $x = 9$ funksioni i të hyrave të përgjithshme $P(x)$ arrin maksimum. Vlera e të hyrave maksimale është

$$P(9) = 9 \cdot 9 - 2 \cdot 9\sqrt{9} = 27.$$

Emri: ____________________

Nr. ID: ____________________

Drejtimi: ____________________

Data: ____________________

Matematikë e biznesit II

Provimi përfundimtar, Forma: $\boxed{\text{C}}$

Zgjedhni përgjegjjen korrekte (duke rrethuar **vetëm njërin** nga opcionet e ofruara).

1. Për funksionin $f(x) = x^4 - x^2$, sa është **shpejtësia e qastit** e ndryshimit për vlerën $x = 1$të ndryshores së pavarur?

   (a) -5

   (b) -4

   (c) 1

   (d) 2

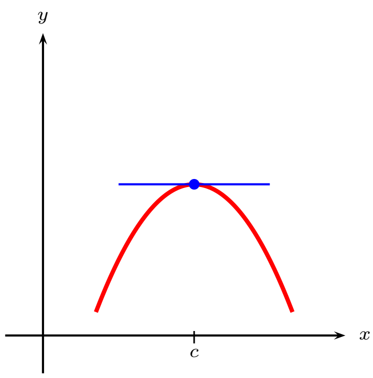
2. Cili nga pohimet vijuese është i saktë për funksionin $y = f(x)$, të paraqitur grafikisht në figurën, nga ana **e majtë** e pikës c?

   (a) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) > 0$

   (b) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) < 0$

   (c) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) > 0$

   (d) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) < 0$



Shkruani zgjidhjet në hapësirat e zbrazëta. Në rast nevoje, mund të shfytëzoni faqen tjetër të fletës për llogaritje më të gjata.

3. Në bankë janë deponuar $27,700$ € me 7% (p.a.d) dhe kapitalizim gjashtëmujor. Të llogaritet sa herë mund të merren renta gjashtëmujore prej $1,500$ €?

4. Një person deponon në bankë $6,000$ € me përqindje interesi 7% (p.a.d), kurse një person tjetër deponon $6,500$ € me përqindje interesi 6% (p.a.d). Pas sa kohe dy personat do të disponojnë me shumë të njëjtë?

Kapitalizimi është katërmujor.

5. Një prodhim është shitur së bashku me 17% marzhë nga 146.25 €, ndërsa i njëjti tani shitet për 99.95 €. A fitohet apo humbet tani në të, dhe për sa përqind?

6. Prindi deponon në fillim të çdo viti, nga dita e lindjes së fëmisë deri në moshën 20 vjeçare, nga 600 € me 5% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, ashtu që i biri duke filluar nga mosha 40 vjeçare, në 20 vitet vijuese të marrë në fund të çdo viti renta periodike. Sa është vlera e rentave?

7. Cili kapital sjell për n vite me 8% kamatë të njëjtin interes **të thjeshtë** sikurse $16,000$ € me 5%?

8. Le të jetë $a > 0$ numër i dhënë. Duke ditur se $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, gjeni formulën për llogaritjen e derivatit të funksionit $f(x) = \log_a x$.

9. Funksioni i çmimit është $p = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{x}$. Caktoni sasinë e mallit për të cilën **të hyrat e përgjithshme** janë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?

10. Është dhënë funksioni i shpenzimeve të përgjithshme $C(x) = x\sqrt{4x^2 - 32x + 100}$. Llogaritni sasinë e

prodhimit për të cilën **shpenzimet mesatare** janë minimale.

Çelësi i provimit $\boxed{\text{C}}$

Zgjedhni përgjegjjen korrekte (duke rrethuar **vetëm njërin** nga opcionet e ofruara).

1. Për funksionin $f(x) = x^4 - x^2$, sa është **shpejtësia e qastit** e ndryshimit për vlerën $x = 1$të ndryshores së pavarur?

   (a) -5

   (b) -4

   (c) 1

   $\boxed{\text{(d)}}$ 2

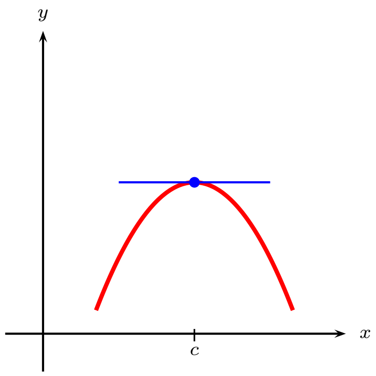
2. Cili nga pohimet vijuese është i saktë për funksionin $y = f(x)$, të paraqitur grafikisht në figurën, nga ana **e majtë** e pikës c?

   (a) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) > 0$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) < 0$

   (c) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) > 0$

   (d) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) < 0$



Shkruani zgjidhjet në hapësirat e zbrazëta. Në rast nevoje, mund të shfytëzoni faqen tjetër të fletës për llogaritje më të gjata.

3. Në bankë janë deponuar 27, 700 € me 7% (p.a.d) dhe kapitalizim gjashtëmujor. Të llogaritet sa herë mund të merren renta gjashtëmujore prej 1, 500 €?

Zgjidhje. Janë dhënë $M = 27,700$, $R = 1,500$, $p = 7$, $m = 2$. Llogarisim vlerën e $2n$. Kemi

$$r = 1 + \frac{p}{100m},$$

d.m.th.

$$r = 1 + \frac{7}{100 \cdot 2} = 1.035.$$

Duke zëvendësuar vlerat në formulën

$$M = R\frac{r^{mn} - 1}{r^{mn}(r-1)},$$

fitojmë

$$27,700 = 1,500\frac{1.035^{2n} - 1}{1.035^{2n}(1.035 - 1)},$$

d.m.th.,

$$\frac{27,700}{1,500} \cdot (1.035 - 1) = \frac{1.035^{2n} - 1}{1.035^{2n}},$$

ose

$$0.646333 \cdot 1.035^{2n} = 1.035^{2n} - 1.$$

Prej këtej

$$1.035^{2n}(1-0.646333)=1,$$

ose

$$1.035^{2n}=\frac{1}{1-0.646333}.$$

Duke logaritmuar anë për anë barazimin e fundit marrim

$$2n\log 1.035\approx\log 2.82752,$$

d.m.th.

$$2n\approx\frac{\log 2.82752}{\log 1.035}\approx 30.21.$$

4. Një person deponon në bankë $6,000$ € me përqindje interesi 7% (p.a.d), kurse një person tjetër deponon $6,500$ € me përqindje interesi 6% (p.a.d). Pas sa kohe dy personat do të disponojnë me shumë të njëjtë? Kapitalizimi është katërmujor.

Zgjidhje. Janë dhënë $K=6,000$, $p=7$, $\tilde{K}=6,500$, $\tilde{p}=6$, $m=3$. Nga formula për njehsimin e interesit dekursiv, mbështetur në kushtet e dhëna në deturën kemi

$$Kr^{mn}=\tilde{K}\tilde{r}^{mn},$$

ku

$$r=\left(1+\frac{p}{100m}\right)=\left(1+\frac{7}{100\cdot 3}\right)\approx 1.02333,$$

$$\tilde{r}=\left(1+\frac{\tilde{p}}{100m}\right)=\left(1+\frac{6}{100\cdot 3}\right)\approx 1.02.$$

Rrjedhimisht,

$$\left(\frac{1.02}{1.02333}\right)^{3n}\approx\frac{6,000}{6,500}.$$

Duke logaritmuar anë për anë barazimin e fundit fitojmë

$$3n\approx\frac{\log\frac{1.02}{1.02333}}{\log\frac{6,000}{6,500}}\approx 24.53.$$

5. Një prodhim është shitur së bashku me 17% marzhë nga 146.25 €, ndërsa i njëjti tani shitet për 99.95 €. A fitohet apo humbet tani në të, dhe për sa përqind?

Zgjidhje. Janë dhënë $p=17$ dhe $K+I=146.25$. Për interesin e fituar në emër marzhe kemi

$$I=\frac{pK}{100}.$$

Duke zëvendësuar më sipër marrim

$$K+\frac{17K}{100}=146.25,$$

ose

$$K\left(1+\frac{17}{100}\right)=146.25,$$

prej nga gjejmë vlerën e çmimit të diskontuar (pa marzhë) të mallit

$$K=\frac{146.25}{1.17}=125.$$

Meqë $99.95 < 125$, konkludojmë se sipas çmimit të tanishëm malli është duke u shitur me humbje:

$$125 - \tilde{I} = 99.95,$$

d.m.th.,

$$\tilde{I} = 125 - 99.95 = 25.05.$$

Llogarisim përqindjen e humbjes:

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{I}}{K} \cdot 100 = \frac{25.05}{125} \cdot 100 \approx 20.0.$$

6. Prindi deponon në fillim të çdo viti, nga dita e lindjes së fëmisë deri në moshën 20 vjeçare, nga 600 € me 5% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, ashtu që i biri duke filluar nga mosha 40 vjeçare, në 20 vitet vijuese të marrë në fund të çdo viti renta periodike. Sa është vlera e rentave?

Zgjidhje. Janë dhënë $p = 5$, $D = 600$.

Llogarisim së pari gjendjen e kapitalit pas $n = 20$ vitesh deponimesh periodike:

$$S_n = D\frac{r(r^n - 1)}{r - 1},$$

ku

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1.05.$$

Kemi

$$S_{20} = 600 \cdot \frac{1.05(1.05^{20} - 1)}{1.05 - 1} \approx 20,831.55.$$

Tani, sipas formulës për njehsimin e interesit dekursiv, llogarisim gjendjen e kapitalit në moshën 40 vjeçare të të birit:

$$K_n = S_{20} r^n,$$

d.m.th.,

$$K_{20} = 20,831.55 \cdot 1.05^{20} \approx 55,272.31.$$

Më në fund, llogarisim vlerën e rentave peridoike për 20 vjetët e mbetura:

$$R = K_{20}\frac{r^n(r - 1)}{r^n - 1},$$

d.m.th.,

$$R = 55,272.31 \cdot \frac{1.05^{20}(1.05 - 1)}{1.05^{20} - 1} \approx 4,435.19.$$

7. Cili kapital sjell për n vite me 8% kamatë të njëjtin interes **të thjeshtë** sikurse 16,000 € me 5%?

Zgjidhje. Nga formula për njehsimin e interesit të thjeshtë

$$I = \frac{nKp}{100},$$

mbështetur në kushtet e dhëna në deturën kemi

$$\frac{nK \cdot 8}{100} = \frac{n \cdot 16,000 \cdot 5}{100},$$

që është ekuivalente me

$$K \cdot 8 = 16,000 \cdot 5.$$

Duke zgjidhur barazimin e fundit sipas K gjejmë

$$K = \frac{16,000 \cdot 5}{8} = 10,000.$$

8. Le të jetë $a > 0$ numër i dhënë. Duke ditur se $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, gjeni formulën për llogaritjen e derivatit të funksionit $f(x) = \log_a x$.

Zgjidhje. Kemi

$$f'(x) = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)',$$

prej nga, duke pasur parasysh se $\ln a$ është konstantë, fitojmë

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a}(\ln x)',$$

d.m.th.,

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

9. Funksioni i çmimit është $p = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{x}$. Caktoni sasinë e mallit për të cilën **të hyrat e përgjithshme** janë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?

Zgjidhje. Nga

$$P(x) = px$$

gjejmë

$$P(x) = 2x - \frac{1}{3}x\sqrt{x}.$$

Rrjedhimisht,

$$P'(x) = 2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Zgjidhim ekuacionin

$$P'(x) = 0,$$

d.m.th.,

$$2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0,$$

ose

$$\sqrt{x} = 4,$$

prej nga fitojmë

$$x = 16.$$

Meqë nga

$$P''(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

marrim

$$P''(16) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} < 0,$$

përfundojmë se në pikën $x = 16$ funksioni i të hyrave të përgjithshme $P(x)$ arrin maksimum. Vlera e të hyrave maksimale është

$$P(16) = 2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{16} = \frac{32}{3}.$$

10. Është dhënë funksioni i shpenzimeve të përgjithshme $C(x) = x\sqrt{4x^2 - 32x + 100}$. Llogaritni sasinë e prodhimit për të cilën **shpenzimet mesatare** janë minimale.

Zgjidhje. Nga

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

gjejmë

$$\bar{C}(x) = \sqrt{4x^2 - 32x + 100}.$$

Rrjedhimisht,

$$\bar{C}'(x) = \frac{8x - 32}{2\sqrt{4x^2 - 32x + 100}}.$$

Zgjidhim ekuacionin

$$\bar{C}'(x) = 0,$$

d.m.th.,

$$8x - 32 = 0,$$

prej nga fitojmë

$$x = 4.$$

Meqë nga

$$\bar{C}''(x) = -\frac{(8x - 32)^2}{4(4x^2 - 32x + 100)^{3/2}} + \frac{4}{\sqrt{4x^2 - 32x + 100}}$$

marrim

$$P''(4) = \frac{4}{\sqrt{4 \cdot 4^2 - 32 \cdot 4 + 100}} > 0,$$

përfundojmë se në pikën $x = 4$ funksioni i shpenzimeve mesatare $\bar{C}(x)$ arrin minimum.

Emri: ____________________

Nr. ID: ____________________

Drejtimi: ____________________

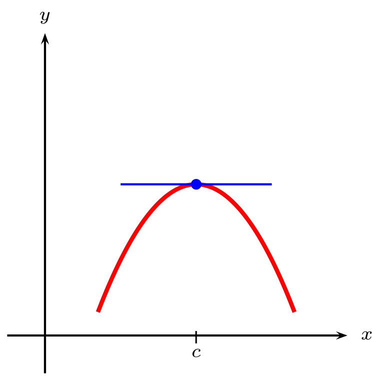
Data: ____________________

Matematikë e biznesit II

Provimi përfundimtar, Forma: $\boxed{\text{D}}$

Zgjedhni përgjegjjen korrekte (duke rrethuar **vetëm njërin** nga opcionet e ofruara).

1. Për funksionin $f(x) = x^4 - x^3$, sa është **shpejtësia e qastit** e ndryshimit për vlerën $x = 1$të ndryshores së pavarur?
   - (a) -5
   - (b) -4
   - (c) 1
   - (d) 2
2. Cili nga pohimet vijuese është i saktë për funksionin $y = f(x)$, të paraqitur grafikisht në figurën, nga ana **e djathtë** e pikës c?
   - (a) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) > 0$
   - (b) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) < 0$
   - (c) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) > 0$
   - (d) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) < 0$



Shkruani zgjidhjet në hapësirat e zbrazëta. Në rast nevoje, mund të shfytëzoni faqen tjetër të fletës për llogaritje më të gjata.

3. Prindi deponon në fillim të çdo viti, nga dita e lindjes së fëmisë deri në moshën 20 vjeçare, nga 700 € me 4% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, ashtu që i biri duke filluar nga mosha 40 vjeçare, në 20 vitet vijuese të marrë në fund të çdo viti renta periodike. Sa është vlera e rentave?

4. Funksioni i çmimit është $p = 3 - \sqrt{x}$. Caktoni sasinë e mallit për të cilën **të hyrat e përgjithshme**

janë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?

5. Një prodhim është shitur së bashku me 18% marzhë nga 159.3 €, ndërsa i njëjti tani shitet për 99.95 €. A fitohet apo humbet tani në të, dhe për sa përqind?

6. Cili kapital sjell për n vite me 9% kamatë të njëjtin interes **të thjeshtë** sikurse $18,000$ € me 6%?

7. Në bankë janë deponuar $26,600$ € me 6% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor. Të llogaritet sa herë mund

të merren renta vjetore prej $2,000$ €?

8. Le të jetë $a > 0$ numër i dhënë. Duke ditur se $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, gjeni formulën për llogaritjen e derivatit të funksionit $f(x) = \log_a x$.

9. Një person deponon në bankë $7,000$ € me përqindje interesi 8% (p.a.d), kurse një person tjetër deponon $7,500$ € me përqindje interesi 7% (p.a.d). Pas sa kohe dy personat do të disponojnë me shumë të njëjtë? Kapitalizimi është tremujor.

10. Është dhënë funksioni i shpenzimeve të përgjithshme $C(x) = x\sqrt{3x^2 - 18x + 50}$. Llogaritni sasinë e

prodhimit për të cilën **shpenzimet mesatare** janë minimale.

Çelësi i provimit $\boxed{\text{D}}$

Zgjedhni përgjegjjen korrekte (duke rrethuar **vetëm njërin** nga opcionet e ofruara).

1. Për funksionin $f(x) = x^4 - x^3$, sa është **shpejtësia e qastit** e ndryshimit për vlerën $x = 1$të ndryshores së pavarur?

   (a) -5

   (b) -4

   $\boxed{\text{(c)}}$ 1

   (d) 2

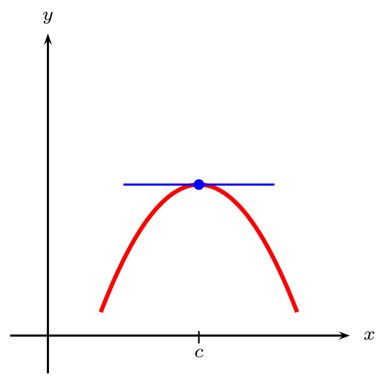
2. Cili nga pohimet vijuese është i saktë për funksionin $y = f(x)$, të paraqitur grafikisht në figurën, nga ana **e djathtë** e pikës c?

   (a) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) > 0$

   (b) $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) < 0$

   (c) $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) > 0$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $f'(x) < 0$ dhe $f''(x) < 0$



Shkruani zgjidhjet në hapësirat e zbrazëta. Në rast nevoje, mund të shfytëzoni faqen tjetër të fletës për llogaritje më të gjata.

3. Prindi deponon në fillim të çdo viti, nga dita e lindjes së fëmisë deri në moshën 20 vjeçare, nga 700 € me 4% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, ashtu që i biri duke filluar nga mosha 40 vjeçare, në 20 vitet vijuese të marrë në fund të çdo viti renta periodike. Sa është vlera e rentave?

Zgjidhje. Janë dhënë $p = 4$, $D = 700$.

Llogarisim së pari gjendjen e kapitalit pas $n = 20$ vitesh deponimesh periodike:

$$S_n = D\frac{r(r^n - 1)}{r - 1},$$

ku

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1.04.$$

Kemi

$$S_{20} = 700 \cdot \frac{1.04(1.04^{20} - 1)}{1.04 - 1} \approx 21,678.44.$$

Tani, sipas formulës për njehsimin e interesit dekursiv, llogarisim gjendjen e kapitalit në moshën 40 vjeçare të të birit:

$$K_n = S_{20}r^n,$$

d.m.th.,

$$K_{20} = 21,678.44 \cdot 1.04^{20} \approx 47,500.13.$$

Më në fund, llogarisim vlerën e rentave peridoike për 20 vjetët e mbetura:

$$R = K_{20} \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1},$$

d.m.th.,

$$R = 47,500.13 \cdot \frac{1.04^{20}(1.04-1)}{1.04^{20}-1} \approx 3,495.14.$$

4. Funksioni i çmimit është $p = 3 - \sqrt{x}$. Caktoni sasinë e mallit për të cilën **të hyrat e përgjithshme** janë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?

Zgjidhje. Nga

$$P(x) = px$$

gjejmë

$$P(x) = 3x - x\sqrt{x}.$$

Rrjedhimisht,

$$P'(x) = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Zgjidhim ekuacionin

$$P'(x) = 0,$$

d.m.th.,

$$3 - \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0,$$

ose

$$\sqrt{x} = 2,$$

prej nga fitojmë

$$x = 4.$$

Meqë nga

$$P''(x) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

marrim

$$P''(4) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} < 0,$$

përfundojmë se në pikën $x = 4$ funksioni i të hyrave të përgjithshme $P(x)$ arrin maksimum. Vlera e të hyrave maksimale është

$$P(4) = 3 \cdot 4 - 4\sqrt{4} = 4.$$

5. Një prodhim është shitur së bashku me 18% marzhë nga 159.3 €, ndërsa i njëjti tani shitet për 99.95 €. A fitohet apo humbet tani në të, dhe për sa përqind?

Zgjidhje. Janë dhënë $p = 18$ dhe $K + I = 159.3$. Për interesin e fituar në emër marzhe kemi

$$I = \frac{pK}{100}.$$

Duke zëvendësuar më sipër marrim

$$K + \frac{18K}{100} = 159.3,$$

ose

$$K\left(1 + \frac{18}{100}\right) = 159.3,$$

prej nga gjejmë vlerën e çmimit të diskontuar (pa marzhë) të mallit

$$K = \frac{159.3}{1.18} = 135.$$

Meqë $99.95 < 135$, konkludojmë se sipas çmimit të tanishëm malli është duke u shitur me humbje:

$$135 - \tilde{I} = 99.95,$$

d.m.th.,

$$\tilde{I} = 135 - 99.95 = 35.05.$$

Llogarisim përqindjen e humbjes:

$$\tilde{p} = \frac{\tilde{I}}{K} \cdot 100 = \frac{35.05}{135} \cdot 100 \approx 26.0.$$

6. Cili kapital sjell për n vite me 9% kamatë të njëjtin interes **të thjeshtë** sikurse $18,000$ € me 6%?

   Zgjidhje. Nga formula për njehsimin e interesit të thjeshtë

   $$I = \frac{nKp}{100},$$

   mbështetur në kushtet e dhëna në deturën kemi

   $$\frac{nK \cdot 9}{100} = \frac{n \cdot 18,000 \cdot 6}{100},$$

   që është ekuivalente me

   $$K \cdot 9 = 18,000 \cdot 6.$$

   Duke zgjidhur barazimin e fundit sipas K gjejmë

   $$K = \frac{18,000 \cdot 6}{9} = 12,000.$$

7. Në bankë janë deponuar $26,600$ € me 6% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor. Të llogaritet sa herë mund të merren renta vjetore prej $2,000$ €?

   Zgjidhje. Janë dhënë $M = 26,600$, $R = 2,000$, $p = 6$, $m = 1$. Llogarisim vlerën e n. Kemi

   $$r = 1 + \frac{p}{100m},$$

   d.m.th.

   $$r = 1 + \frac{6}{100 \cdot 1} = 1.06.$$

   Duke zëvendësuar vlerat në formulën

   $$M = R\frac{r^{mn} - 1}{r^{mn}(r-1)},$$

   fitojmë

   $$26,600 = 2,000\frac{1.06^n - 1}{1.06^n(1.06-1)},$$

   d.m.th.,

   $$\frac{26,600}{2,000} \cdot (1.06 - 1) = \frac{1.06^n - 1}{1.06^n},$$

   ose

   $$0.798 \cdot 1.06^n = 1.06^n - 1.$$

Prej këtej

$$1.06^n(1-0.798)=1,$$

ose

$$1.06^n=\frac{1}{1-0.798}.$$

Duke logaritmuar anë për anë barazimin e fundit marrim

$$n\log 1.06\approx\log 4.9505,$$

d.m.th.

$$n\approx\frac{\log 4.9505}{\log 1.06}\approx 27.45.$$

8. Le të jetë $a>0$ numër i dhënë. Duke ditur se $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$, gjeni formulën për llogaritjen e derivatit të funksionit $f(x)=\log_a x$.

Zgjidhje. Kemi

$$f'(x)=(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)',$$

prej nga, duke pasur parasysh se $\ln a$ është konstantë, fitojmë

$$f'(x)=\frac{1}{\ln a}(\ln x)',$$

d.m.th.,

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}.$$

9. Një person deponon në bankë $7,000$ € me përqindje interesi 8% (p.a.d), kurse një person tjetër deponon $7,500$ € me përqindje interesi 7% (p.a.d). Pas sa kohe dy personat do të disponojnë me shumë të njëjtë? Kapitalizimi është tremujor.

Zgjidhje. Janë dhënë $K=7,000$, $p=8$, $\tilde{K}=7,500$, $\tilde{p}=7$, $m=4$. Nga formula për njehsimin e interesit dekursiv, mbështetur në kushtet e dhëna në deturën kemi

$$Kr^{mn}=\tilde{K}\tilde{r}^{mn},$$

ku

$$r=\left(1+\frac{p}{100m}\right)=\left(1+\frac{8}{100\cdot 4}\right)\approx 1.02,$$

$$\tilde{r}=\left(1+\frac{\tilde{p}}{100m}\right)=\left(1+\frac{7}{100\cdot 4}\right)\approx 1.0175.$$

Rrjedhimisht,

$$\left(\frac{1.0175}{1.02}\right)^{4n}\approx\frac{7,000}{7,500}.$$

Duke logaritmuar anë për anë barazimin e fundit fitojmë

$$4n\approx\frac{\log\frac{1.0175}{1.02}}{\log\frac{7,000}{7,500}}\approx 28.11.$$

10. Është dhënë funksioni i shpenzimeve të përgjithshme $C(x)=x\sqrt{3x^2-18x+50}$. Llogaritni sasinë e prodhimit për të cilën **shpenzimet mesatare** janë minimale.

Zgjidhje. Nga

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

gjejmë

$$\bar{C}(x) = \sqrt{3x^2 - 18x + 50}.$$

Rrjedhimisht,

$$\bar{C}'(x) = \frac{6x - 18}{2\sqrt{3x^2 - 18x + 50}}.$$

Zgjidhim ekuacionin

$$\bar{C}'(x) = 0,$$

d.m.th.,

$$6x - 18 = 0,$$

prej nga fitojmë

$$x = 3.$$

Meqë nga

$$\bar{C}''(x) = -\frac{(6x - 18)^2}{4(3x^2 - 18x + 50)^{3/2}} + \frac{3}{\sqrt{3x^2 - 18x + 50}}$$

marrim

$$P''(3) = \frac{3}{\sqrt{3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 50}} > 0,$$

përfundojmë se në pikën $x = 3$ funksioni i shpenzimeve mesatare $\bar{C}(x)$ arrin minimum.