Rregulla e prodhimit dhe ajo e herësit. Derivimi i funksioneve eksponenciale dhe logaritmike

Qëllimet dhe objektivat

- Derivimi i prodhimit të dy funksioneve
- Derivimi i herësit të dy funksioneve
- Derivimi i një funksioni eksponencial
- Derivimi i një funksioni logaritmik
- Zbatime të mëtejme të derivatit në aplikime biznesi.

Përmbajtja

Derivati i një prodhimi

Rregulla e prodhimit

Prodhimi i dy funksioneve të derivueshme
është funksion i derivueshëm dhe

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]$$

ose

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Me fjalë, derivati i një prodhimi të dy funksioneve është
derivati i të parit herë i dyti plus i pari herë derivati i të dytit.

Shembull numerik

Shembull

Duke zbatuar rregullën e prodhimit derivoni funksionin

$$P(x) = (x^2 + 1)(3x - 1).$$

Zgjidhje.

$$\begin{aligned} P'(x) &= [(x^2+1)(3x-1)]' \\ &= [(x^2+1)]'(3x-1) + (x^2+1)[(3x-1)]' \\ &= (2x)(3x-1) + (x^2+1)\cdot 3 = 9x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

$\square$

Derivati i një herësi

Rregulla e herësit

Herësi i dy funksioneve të derivueshme (emëruesi jozero) është funksion i derivueshëm dhe

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{g(x)^2}$$

ose

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Me fjalë, derivati i një herësi të dy funksioneve është derivati i të parit herë i dyti minus i pari herë derivati i të dytit, e tëra mbi katrorin e funksionit të dytë.

Shembull aplikimi: Profiti

Shembull

Profiti nga shitja e q njësish të një malli është

$$P(q) = \frac{-q^3 + 27q^2 + 160q + 5}{q + 4} \quad \text{mijë €.}$$

Me çfarë shpejtësie ndryshon sipas shitjes profiti kur $q = 2$?

Shembull aplikimi: Profiti. (Vazhdim)

Zgjidhje.

Na nevojitet ta llogarisim $P'(2)$.

$$P'(q)$$

$$= \frac{(-q^3 + 27q^2 + 160q + 5)'(q+4) - (-q^3 + 27q^2 + 160q + 5)(q+4)'}{(q+4)^2}$$

$$= \frac{(-3q^2 + 54q + 160)(q+4) - (-q^3 + 27q^2 + 160q + 5) \cdot 1}{(q+4)^2}$$

$$= \frac{-2q^3 + 15q^2 + 216q + 635}{(q+4)^2}$$

$$P'(2) = \frac{-2 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2^2 + 216 \cdot 2 + 635}{(2+4)^2} \approx 30.861$$

mijë € për njësi; d.m.th. 30,861 € për njësi. □

Mbi përdorimin e rregullës së herësit

Mbani mend!

Rregulla e herësit është e ngathët.
Prandaj, sa herë të keni mundësi, evitoni përdorimin e saj.

Shembull

Derivoni funksionin

$$y = \frac{3}{2x^2} - \frac{x}{3} + \frac{5}{4} + \frac{x-1}{x}$$

Rregulla logaritmike

Derivati i $\ln x$

Për $x > 0$ vlen
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Shembull aplikimi: Të ardhurat e përgjithshme

Shembull

Një prodhues vlerëson se q njësi të një malli do të shiten kur çmimi është

$$p(q) = 112 - q \ln q^3 \quad \text{qind euro për njësi.}$$

Me çfarë shpejtësie ndryshojnë të ardhurat e përgjithshme nga ky mall kur shiten 4 njësi?

Shembull aplikimi: Të ardhurat e përgjithshme. (Vazhdim)

Zgjidhje. . .

Funksioni i të ardhurave të përgjithshme është

$$\begin{aligned} R(q) = p(q)q &= (112 - q \ln q^3)q \\ &= 112q - q^2(3 \ln q) = 112q - 3q^2 \ln q \end{aligned}$$

qind euro, prandaj shpejtësia e ndryshimit të të ardhurave është

$$\begin{aligned} R'(q) &= 112 - 3[(q^2)' \ln q + q^2(\ln q)'] \\ &= 112 - 3\left(2q \ln q + q^2 \frac{1}{q}\right) = 112 - 6q \ln q - 3q. \end{aligned}$$

□

Shembull aplikimi: Të ardhurat e përgjithshme. (Vazhdim)

. . . Zgjidhje.

Kur $q = 4$ shpejtësia e ndryshimit është

$$R'(4) = 112 - 6 \cdot 4 \cdot \ln 4 - 3 \cdot 4 \approx 66.73$$

qind euro për njësi; d.m.th., 6,673 € për njësi. □

Rregulla eksponenciale

Derivati i e^x

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

ose

$$(e^x)' = e^x$$

Me fjalë, e^x është derivat i vetvetes.

Interpretimi grafik

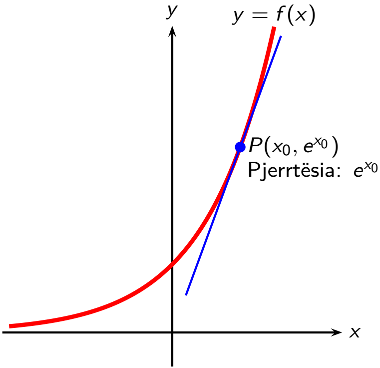

Figura: Në çdo pikë të lakores pjerrtësia e barabartë me vlerën

Shembull aplikimi: Optimizimi i të ardhurave

Shembull

Një prodhues vlerëson se kërkesa për një mall të caktuar është

$$D(p) = 5,000e^{-p} \quad \text{njësi}$$

kur çmimi është p qind euro për njësi.
Çfarë ndodh me të ardhurat e përgjithshme kur çmimi është 90 €?
Po kur ky çmim është 110 €?
Ç'mund të përfundoni për të ardhurat kur çmimi është 100 €?

Shembull aplikimi: Optimizimi i të ardhurave. (Vazhdim)

Zgjidhje. . .

$$R(p) = pD(p) = 5,000pe^{-p} \quad \text{qind euro}$$

$$R'(p) = (5,000pe^{-p})' = 5,000\left(\frac{p}{e^p}\right)'$$

$$= 5{,}000\frac{(p)'e^p - p(e^p)'}{(e^p)^2} = 5,000\frac{1-p}{e^p} \quad \text{qind euro në 100 €}$$

$\square$

Shembull aplikimi: Optimizimi i të ardhurave. (Vazhdim)

. . . Zgjidhje.

Kur çmimi është 90 € kemi $p = 0.9$:

$$R'(0.9) = 5,000\frac{1-0.9}{e^{0.9}} \approx 203.29 > 0$$

Kur çmimi është 110 € kemi $p = 1.1$:

$$R'(1.1) = 5,000\frac{1-1.1}{e^{1.1}} \approx -166.44 < 0$$

Më në fund, për çmimin 100 € kemi $p = 1$:

$$R'(1) = 5,000\frac{1-1}{e^{1}} = 0,$$

që na shtyn të mendojmë se për këtë çmim realizohen të ardhura maksimale. □

Udhëzime për lexim të mëtejmë

- `http://fberisha.netfirms.com`
- Detyrë shtëpie: Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks,* fq. 168–178.
- L. D. Hofmann, G. L. Bradley, *Calculus – for business, economics and life sciences,* fq. 122–133.

Përfundim

- Rregulla e prodhimit:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

- Rregulla e herësit:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

- Rregulla logaritmike:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- Rregulla eksponenciale:

$$(e^x)' = e^x$$

- Investigimi i rritjes, zvogëlimit dhe kulmeve të grafikut të një funksioni përmes derivatit.