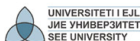


# Rregulla zingjir

F. M. Berisha



Universiteti i Evropës Juglindore, Tetovë

## Qëllimet dhe objektivat

- Shprehja e shpejtësisë së ndryshimit të një madhësie si prodhim shpejtësish tjera
- Derivimi i një funksioni të përbërë
- Zbatimi i rregullës zingjir për zgjidhje problemesh në aplikacione biznesi

# Përmbajtja

- 1 Rregulla zingjir
- 2 Derivimi i funksioneve të përbëra
  - Rregulla zingjir për funksione fuqi
  - Rregulla zingjir për funksione logaritmike
  - Rregulla zingjir për funksione eksponenciale

## Prodhimi i shpejtësive të ndryshimeve

- Le të jenë  $C$ ,  $q$  dhe  $t$  kostoja në euro, numri i njësive të prodhuara dhe koha në orë pune.
- Shpejtësia e ndryshimit të kostos sipas sasisë së prodhuar:

$$\frac{dC}{dq} \quad \text{€ për njësi}$$

- Shpejtësia e ndryshimit të sasisë së prodhuar sipas kohës:

$$\frac{dq}{dt} \quad \text{njësi për orë}$$

- Shpejtësia e ndryshimit të kostos sipas kohës:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq} \frac{dq}{dt} \quad \text{€ për orë}$$

# Rregulla zingjir

## Rregulla zingjir

Le të jetë  $y$  funksion i derivueshëm sipas  $u$   
dhe  $u$  funksion i derivueshëm sipas  $x$ .

Atëherë  $y$  është funksion i përbërë sipas  $x$  dhe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

- Për ta mbajtur në mend, bëjmë kinse thjeshtojmë:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}} \frac{\cancel{du}}{dx}$$

# Aplikacion: Shpejtësia e ndryshimit të kostos sipas kohës

## Shembull

Kostoja e prodhimit të  $x$  njësish të një malli të caktuar është  $C(x) = 0.2x^2 + x + 900$  euro dhe niveli i prodhimit pas  $t$  orësh pune prodhuese është  $x(t) = t^2 + 100t$  njësi. Me çfarë shpejtësie ndryshon kostoja sipas kohës pas 1 orë pune?

## Zgjidhje...

Meqë

$$\frac{dC}{dx} = 0.4x + 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 100,$$



## Aplikacion: Shpejtësia e ndryshimit të kostos... (Vazhdim)

... Zgjidhje.

sipas rregullës zingjir kemi

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx} \frac{dx}{dt} = (0.4x + 1)(2t + 100).$$

Qëllimi është të evaluohet ky derivat kur  $t = 1$ .

$$x(1) = 1^2 + 100 \cdot 1 = 101 \quad \text{njësi}$$

$$\left. \frac{dC}{dt} \right|_{t=1} = (0.4 \cdot 101 + 1)(2 \cdot 1 + 100) = 4222.8$$

Pra, pas 1 ore kostoja rritet me shpejtësi 4,222.80 € në orë.



# Derivimi i funksioneve të përbëra

## Derivimi i funksioneve të përbëra

Në qoftë se  $g(u)$  dhe  $h(x)$  janë funksione të derivueshme, atëherë

$$\frac{d}{dx}g[h(x)] = g'[h(x)]h'(x).$$

- Vërtet, për

$$y = g(u), \quad u = h(x),$$

mbështetur në rregullën zingjir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = g'(u)h'(x) = g'[h(x)]h'(x).$$



## Shembull derivimi funksioni të përbërë

### Shembull

Derivoni funksionin  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$ .

### Zgjidhje...

Forma e funksionit është

$$f(x) = (x^2 - x + 3)^{1/2}.$$

Atëherë

$$(x^2 - x + 3)' = 2x - 1$$



## Shembull derivimi funksioni të përbërë. (Vazhdim)

... Zgjidhje.

dhe mbështetur në rregullën për derivimin e funksionit të përbërë,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} (x^2 - x + 3)^{-1/2} (x^2 - x + 3)' \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - x + 3)^{-1/2} (2x - 1) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 3}}. \end{aligned}$$



## Rregulla zingjir për funksione fuqi

### Rregulla e përgjithshme e fuqisë

Për çdo numër real  $n$  dhe funksion të derivueshëm  $h$ ,

$$\frac{d}{dx}[h(x)]^n = n[h(x)]^{n-1} \frac{d}{dx}[h(x)].$$

## Shembull derivimi të një funksioni fuqi

### Shembull

Derivoni funksionin  $f(x) = \frac{1}{(3x-2)^4}$ .

### Zgjidhje...

$$f(x) = (3x - 2)^{-4}$$

$$f'(x) = -4(3x - 2)^{-5} \frac{d}{dx}(3x - 2) = -4(3x - 2)^{-5} \cdot 3 = -\frac{12}{(3x - 2)^5}$$



# Rregulla zingjir për funksione logaritmike

## Rregulla zingjir për funksione logaritmike

Në qoftë se  $h(x)$  është funksion i derivueshëm, atëherë

$$\frac{d}{dx}[\ln h(x)] = \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx}[h(x)].$$

## Aplikacion: Të ardhurat marginale

### Shembull

Një prodhues vlerëson se  $x$  njësi të një malli do të shiten kur çmimi është  $p(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$  qind euro për njësi. Gjeni të ardhurat marginale për këtë mall kur shiten 4 njësi.

### Zgjidhje...

Funksioni i të ardhurave totale është

$$R(x) = p(x)x = \frac{\ln(x+3)}{x+3}x = \frac{x \ln(x+3)}{x+3}$$

qind euro, prandaj të ardhurat marginale janë



## Aplikacion: Të ardhurat marginale. (Vazhdim)

... Zgjidhje...

$$\begin{aligned}
 MR(x) = R'(x) &= \frac{[x \ln(x+3)]'(x+3) - [x \ln(x+3)](x+3)'}{(x+3)^2} \\
 &= \frac{[1 \cdot \ln(x+3) + x(\ln(x+3))'](x+3) - [x \ln(x+3)] \cdot 1}{(x+3)^2} \\
 &= \frac{[\ln(x+3) + x \left( \frac{1}{x+3} (x+3)' \right)](x+3) - x \ln(x+3)}{(x+3)^2} \\
 &= \frac{[\ln(x+3) + \frac{x}{x+3}](x+3) - x \ln(x+3)}{(x+3)^2} \\
 &= \frac{x + 3 \ln(x+3)}{(x+3)^2}
 \end{aligned}$$



## Aplikacion: Të ardhurat marginale. (Vazhdim)

... Zgjidhje.

Kur  $x = 4$  të ardhurat marginale janë

$$R'(4) = \frac{4 + 3 \ln(4 + 3)}{(4 + 3)^2} \approx 0.20$$

qind euro për njësi; d.m.th. përafërsisht 20 € për njësi.





# Rregulla zingjir për funksione eksponenciale

## Rregulla zingjir për funksione eksponenciale

Në qoftë se  $h(x)$  është funksion i derivueshëm, atëherë

$$\frac{d}{dx}[e^{h(x)}] = e^{h(x)} \frac{d}{dx}[h(x)].$$

## Aplikacion: Të ardhurat totale

### Shembull

Një prodhues vlerëson se  $D(p) = 8,000e^{-0.04p}$  njësi të një malli do të shiten kur çmimi është  $p$  euro për njësi.

Çfarë ndodh me të ardhurat e përgjithshme kur çmimi është 25 € njësia?

### Zgjidhje...

$$R(p) = pD(p) = 8,000pe^{-0.04p}$$

$$R'(p) = 8,000(e^{-0.04p} - 0.04pe^{-0.04p}) = 8,000(1 - 0.04p)e^{-0.04p}$$

$$R'(25) = 8,000(1 - 0.04 \cdot 25)e^{-0.04 \cdot 25} = 0.$$



## Aplikacion: Të ardhurat totale. (Vazhdim)

... Zgjidhje.

Nuk është vështirë të vërejmë poashtu se të ardhurat totale kanë shpejtësi pozitive të ndryshimit kur  $p < 25$  € dhe shpejtësi negative ndryshimi kur  $p > 25$  €.

Prandaj përfundojmë se prodhuesi arrin të ardhura maksimale pikërisht kur çmimi i mallit është 25 € njësi.



## Udhëzime për lexim të mëtejme

- <http://fberisha.netfirms.com>
- **Detyrë shtëpie:** Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks*, fq. 189–198.
- L. D. Hofmann, G. L. Bradley, *Calculus – for business, economics and life sciences*, fq. 148–160.

# Përfundim

- Shpejtësia e ndryshimit të një funksioni të një ndryshoreje, e cila për vete është funksion i një ndryshoreje të dytë, sipas ndryshores së dytë:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

- Derivimi i funksioneve të përbëra:

$$\frac{d}{dx}g[h(x)] = g'[h(x)]h'(x)$$

- Rregulla e përgjithshme e fuqisë
  - Rregulla zingjir për funksione logaritmike
  - Rregulla zingjir për funksione eksponenciale
- Ideja e zbatimit të derivatit të një funksioni për të përcaktuar maksimumin ose minimumin e funksionit.