Kapitulli 1

Vargjet dhe seritë

1.1 Vargjet dhe limitet e vargjeve

Siç do të bindemi në kapitujt vijues, analiza matematike është një degë tejet e fuqishme e matematikës me diapazon të gjerë zbatimesh. Ajo që e bën të fuqishme analizën matematike dhe e dallon nga algjebra është nocioni i limitit, dhe qëllimi i kësaj pike është të ofrojë një hyrje në këtë nocion të rëndësishëm. Qasja jonë do të jetë intuitive më tepër sesa formale. Idetë e skicuara këtu formojnë bazat për një zhvillim më rigoroz të ligjeve dhe procedurave të analizës matematike dhe qëndrojnë mu në zemrën e shumë nga matematika bashkëkohore.

Në këtë kapitull do të merremi me procesin limit të një *vargu*, kurse që në kapitullin vijues këtë nocion do ta zgjerojmë edhe për funksione.

Nocioni i vargut është përgjithësim i matricës njërreshtëshe nga kapitulli paraprak. Kështu, matricën $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p]$ me dimensione $1 \times p$ do ta quajmë *varg të fundmë.*

Kur flasim për vargje, zakonisht, i lëmë menjanë kllapat e matricës, kështu që një varg të fundmë rëndom e shënojmë në formën

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p,$$

ose, edhe me shkurt, $\{a_n\}_{n=1}^{p}$.

Vërejmë se në qoftë se kemi një varg të fundmë $\{a_n\}_{n=1}^{p}$, atëherë çdo numri të plotë n nga intervali $1 \leq n \leq p$ i është shoqëruar një numër real a_n. Tabela vijuese ilustron këtë shoqërim.

n	1	2	3	...	p
a_n	a_1	a_2	a_3	...	a_p

Tani, në qoftë se numrin n nuk e kufizojmë nga sipër me p; d.m.th., çfarëdo numri të plotë $n \geq 1$ (pra, numri natyror) i shoqërohet një numër real a_n, atëherë fitohet *varg i pafundmë* (ose, shkurt, *varg*). Shoqërimi i tillë është ilustruar me tabelën vijuese.

n	1	2	3	$\dots$	n	$\dots$
a_n	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_n	$\dots$

Një *varg i pafundmë* zakonisht shënohet në formën

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Në matematikë përdoret simboli ∞ (lexoni: „infinit") për të paraqitur një madhësi e cila zmadhohet përtej çdo kufiri të fundmë. Është me rëndësi të mbajmë mend se ∞ **kurrë** nuk paraqet një numër.

Kështu, në trajtë të shkurtuar, një varg numerik e paraqesim në formën $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, e cila tregon se n mund të rritet pafundësisht. Ndonjëherë, madje, një varg e shënojmë, thjesht, duke vënë elementin e përgjithshëm të tij a_n.

Shembull 1. (a) Në qoftë se rregulla e shoqërimit të n me a_n është $a_n = \frac{1}{n}$, atëherë $a_1 = \frac{1}{1} = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $\dots$, kështu që vargu i fituar si rezultat është

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

(b) Në qoftë se $a_n = \frac{n}{n+1}$, atëherë vargu i fituar është

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

(c) Në qoftë se $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$, atëherë vargu i fituar është

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \dots, (-1)^n \frac{1}{2n}, \dots$$

Në vazhdim marrim në shqyrtim procesin limit të një vargu. E thënë në vija të trasha, ky proces limit ka të bëjë me ekzaminimin e sjelljes së një vargu a_n kur n rritet pafundësisht. Kështu ekonomistët të cilët flasin për profitin vjetor afatgjatë kanë, në fakt, të bëjnë me sjellje limite.

Për të ilustruar konceptin e limitit, supozojmë se dëshirojmë të dijmë çfarë ndodh me vargun $a_n = \frac{1}{n}$ kur n rritet pafundësisht. Një ndjenë për situatën mund ta përfitojmë në qoftë se llogarisim vlerat e a_n duke shfrytëzuar vlera të n të cilat shkojnë gjithnjë duke u rritur. Tabela vijuese përmbledh sjelljen e a_n kur n rritet pafundësisht.

n	10	100	200	500	1000	10000
a_n	0.1	0.01	0.005	0.002	0.001	0.0001

Vlerat e elementeve të vargut nga kjo tabelë sugjerojnë se a_n i afrohet numrit 0 kur numri n rritet pafundësisht. Në matematikë sjellja e tillë përshkruhet duke thënë „limiti i a_n kur n tenton nga ∞ është 0“ dhe shkurt shënohet

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Në mënyrë më të përgjithshme, limiti i a_n kur n rritet pafundësisht mund të përkufizohet joformalisht si vijon.

Limiti i një vargu. Në qoftë se a_n i afrohet gjithmonë më afër numrit L kur n rritet pafundësisht, atëherë L është *limit i a_n kur n tenton nga ∞.* Sjellja e tillë shprehet duke shënuar

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Gjeometrikisht, shprehja për limitin $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ka domethënien se pikat a_n i afrohen në boshtin numerik pikës L kur n rritet pafundësisht. Figura 1.1 ilustron faktin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

të shqyrtuar më parë.

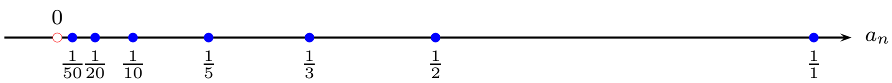

Figura 1.1. Interpretimi i gjeometrik i shprehjes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Është me rëndësi të kuptohet se limiti përshkruan sjelljen e vargut kur n **tenton** nga ∞, e jo **në** vetë ∞. Siç përmendëm edhe më parë, ∞ nuk është numër dhe n nuk mund të bëhet i barabartë me ∞.

Limitet u nënshtrohen rregullave të caktuara algjebrike, të cilat mund të shfrytëzohen gjatë llogaritjeve. Këto rregulla, të cilat duken të besueshme në bazë të përkufizimit tonë joformal të limitit, vërtetohen formalisht në kurse më teorike të matematikës. Ato janë të rëndësishme sepse thjeshtësojnë llogaritjen e limiteve.

Vetitë algjebrike të limiteve. Në qoftë se ekzistojnë $\lim_{n\to\infty} a_n$ dhe $\lim_{n\to\infty} b_n$, atëherë

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,\\
\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n,\\
\lim_{n\to\infty}(ka_n) &= k\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{për çdo konstantë } k,\\
\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) &= \big(\lim_{n\to\infty} a_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} b_n\big),\\
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{në qoftë se } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0,\\
\lim_{n\to\infty} a_n^p &= \big(\lim_{n\to\infty} a_n\big)^p \quad \text{në qoftë se ekziston } \lim_{n\to\infty} a_n^p.
\end{aligned}$$

D.m.th., limiti i një shume, ndryshimi, prodhimi, herësi ose fuqie është shuma, ndryshimi, prodhimi, herësi ose fuqia e limiteve të veçanta, përderisa të gjitha shprehjet janë të definuara.

Dy vetitë vijuese kanë të bëjnë me limitet e dy vargjeve elementare, dhe mund të shfrytëzohen për gjetjen e limiteve të vargjeve tjera.

Për çdo konstantë k,

$$\lim_{n\to\infty} k = k \quad \text{dhe} \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

D.m.th., limiti i një konstante është vetë konstanta, dhe limiti i $a_n = n$ kur n tenton në ∞ është ∞.

Dy vetitë e fundit mund të arsyetohen lehtë. Gjeometrikisht, të gjithë elementet e vargut konstant $a_n = k$ përputhen në boshtin numerik me pikën k, prandaj $\lim_{n\to\infty} k = k$. Nga ana tjetër, $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ thotë se kur n rritet pafundësisht edhe vlerat e elementëve të vargut $a_n = n$ rriten pafundësisht.

Limitet të cilat kanë të bëjnë me fuqi dhe vlera reciproke fuqishë mund të llogariten si vijon, për $k > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty \quad \text{dhe} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

Vetia e parë thotë se, për $k > 0$, vlerat e n^k rriten pafundësisht kur n tenton nga ∞. Vetinë e dytë mund ta provojmë mbështetur në rregullat algjebrike të dhëna më parë dhe faktin se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^k = 0^k = 0.$$

Në formë më të përgjithshme, limiti i një shprehjeje polinomiale $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ përcaktohet nga termi me fuqinë më të madhe, i cili rritet (ose zvogëlohet) më shpejt sesa termat tjerë me fuqi më të vogla.

Limiti i një shprehjeje polinomiale. Në qoftë se $a_n \neq 0$, atëherë

$$\lim_{n\to\infty} (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0) = \lim_{n\to\infty} a_k n^k.$$

D.m.th., për të gjetur limitin, marrim limitin e termit me fuqinë më të madhe.

Rregulla e mësipërme shfrytëzohet për të përcaktuar se a është ∞ apo $-\infty$ limiti i një shprehjeje polinomiale kur n tenton në ∞; pra, a rritet apo zvogëlohet pafundësisht shprehja kur n rritet pafundësisht.

Shembull 2. Gjeni $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - n^2 + 4n^3 - 3n^4)$.

Zgjidhje. Kemi

$$\lim_{n\to\infty} (1 - n^2 + 4n^3 - 3n^4) = \lim_{n\to\infty} (-3n^4) = -3(\lim_{n\to\infty} n^4) = -\infty.$$

Pra elementët e vargut $a_n = 1 - n^2 + 4n^3 - 3n^4$ zvogëlohen pafundësisht kur n rritet pafundësisht. $\square$

Mënyra për të gjetur limitin e një shprehjeje racionale sipas n, d.m.th. një herësi të dy shprehjesh polinomiale, është të krahasohen fuqitë më të mëdha të numëruesit dhe emëruesit, dhe të pjesëtohen numëruesi dhe emëruesi me n të ngritur në më të voglën nga këto fuqi. Një gjë e tillë do të reduktojë problemin në të tillë ku shumica e termave janë të formës $\frac{a}{n^k}$, të cilët i afrohen zeros kur n tenton nga ∞.

Limiti i një shprehjeje racionale. Për të gjetur limitin kur n tenton nga ∞ të një shprehjeje racionale sipas n:

1. Krahasoni fuqitë më të mëdha të numëruesit dhe emëruesit, dhe pjesëtoni numëruesin dhe emëruesin me n të ngritur në më të voglën nga këto fuqi.

2. Gjeni limitet e numëruesit dhe emëruesit të ri.

Shembull 3. Gjeni $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n+1}{2n^2+3n-1}$.

Zgjidhje. Pjesëtojmë numëruesin dhe emëruesin me n^2, për të fituar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n+1}{2n^2+3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2-2n+1}{n^2}}{\frac{2n^2+3n-1}{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{3-0+0}{2+0-0} = \frac{3}{2}.$$

□

Shembull 4. Gjeni $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2+2n+1}{5n-2}$.

Zgjidhje. Pjesëtojmë numëruesin dhe emëruesin me n, për të fituar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+2n+1}{5n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n+2+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}}.$$

Meqë

$$\lim_{n\to\infty}\left(-n+2+\frac{1}{n}\right) = -\infty \quad \text{dhe} \quad \lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{2}{n}\right) = 5$$

rrjedh se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+2n+1}{5n-2} = -\infty.$$

□

Marrim në shqyrtim tani vargun $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Limiti i këtij vargu kur n tenton nga ∞ zakonisht shënohet me e dhe quhet *baza natyrore eksponenciale:*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

„Prit pak!“ mund të thoni, „ky limit duhet të jetë 1, meqë $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ me siguri tenton nga 1 kur n rritet pafundësisht, dhe $1^n = 1$ për çdo n.“ Mirëpo nuk është ashtu. Procesi limit nuk funksionon kësisoji, siç mund të shohim nga tabela vijuese:

n	1	10	100	1,000	10,000	100,000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.5937	2.7048	2.7169	2.7182	2.7183

Numri e është nga më të rëndësishmit në tërë matematikën, dhe vlera e tij është llogaritur me saktësi të madhe. Vlera e tij në pesë decimale është

$$e = 2.71828...$$

Në analizën matematike vërtetohet se numri i decimaleve të tij është i pafundmë dhe se ato nuk përsëriten në mënyrë periodike.[1]

Të përmbledhim:

Baza natyrore eksponenciale e. Numri

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828...$$

quhet *baza natyrore eksponenciale.*

Detyra për ushtrime

1. Gjeni pesë elementët e parë të vargjeve

   (a) $a_n = 2n - 5$;

   (b) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$;

   (c) $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$;

   (d) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

   (e) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{2}$.

2. Sygjeroni elementin e përgjithshëm a_n për vargun

   (a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

[1] Numrat e tillë njihen në matematikë si numra irracionalë.

(b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{7}, \frac{16}{9}, \ldots$

(c) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \ldots$

3. Gjeni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ për vargjet

   (a) $a_n = \frac{n}{n+1}$;

   (b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$;

   (c) $a_n = \frac{3n-1}{2n+3}$;

   (d) $a_n = \frac{5n-7}{1-3n}$;

   (e) $a_n = \frac{n^3-2n-1}{n-3}$;

   (f) $a_n = \frac{n-1}{-n^3+2n+1}$;

   (g) $a_n = \frac{3-n}{-n^2+5n-2}$.

4. Gjeni

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-5}}$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3-2n+4}{5n^2\sqrt{n^2+2}}$;

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$.

5. Themi se një varg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ është *monoton rritës* në qoftë se çdo element i tij është më i vogël sesa elementi pasardhës; d.m.th., për çdo n është $a_n < a_{n+1}$. Cilët nga vargjet vijues janë monoton rritës?

   (a) $a_n = \frac{1}{n}$

   (b) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

   (c) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

   (d) $a_n = \frac{1}{2^n}$

   (e) $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$

6. Themi se një varg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ është *monoton zvogëlues* në qoftë se çdo element i tij është më i madh sesa elementi pasardhës; d.m.th., për çdo n është $a_n > a_{n+1}$. Cilët nga vargjet vijues janë monoton zvogëlues?

   (a) $a_n = \frac{1}{n}$

   (b) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

   (c) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

(d) $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

(e) $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$

7. Themi se një varg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ është *i kufizuar* në qoftë se ekzistojnë dy numra m dhe M ashtu që çdo element i vargut ndodhet ndërmjet tyre; d.m.th., për çdo n është $m \leq a_n \leq M$. Numrat m dhe M quhen *kufi i poshtëm* dhe *kufi i sipërm* i vargut a_n. A është i kufizuar vargu vijues? Gjeni një kufi të poshtëm dhe një kufi të sipërm të vargut.

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

(b) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

(c) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

(d) $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

(e) $a_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$

8. Gjeni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ për vargjet

(a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$;

(b) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$;

(c) $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$;

(d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n}$;

(e) $a_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{5n}$;

(f) $a_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{-4n}$.

1.2 Progresioni aritmetik dhe ai gjeometrik

Nga pikëvështrimi i zbatimit në biznes dhe ekonomiks, me rëndësi të veçantë janë dy tipe vargjesh: vargu (ose progresioni) aritmetik dhe vargu gjeometrik.

Progresioni aritmetik. Vargu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ është *varg* (ose *progresion*) *aritmetik* në qoftë se çdo element ndryshon nga elementi paraardhës për një numër konstant d (të quajtur *diferencë*, ose *ndryshim*); d.m.th., në qoftë se për çdo $n > 1$ është

$$a_n - a_{n-1} = d.$$

Shembull 1. Një biznes prodhimi detergjenti kishte në vitin 2005 produktin vjetor 147 ton. Pronari ka planifikuar që çdo vit të rrisë produktivitetin për 4.5 ton. Sa do të jetë prodhimi i planifikuar vjetor në vitin 2007?

Zgjidhje. Meqë prodhimi çdo vit është planifikuar të ndryshojë nga prodhimi vjetor paraprak për 4.5 ton, vargu i prodhimeve të planifikuara vjetore është progresion aritmetik, siç është ilustruar me tabelën vijuese.

Viti	2005	2006	2007	...
n	1	2	3	...
a_n	147	151.5	156	...

Pra, prodhimi vjetor në vitin 2007 është paraparë të jetë $a_3 = 156$ ton detergjent. □

Për të gjetur elementin e përgjithshëm a_n të një progresioni aritmetik vërejmë se

$$\begin{aligned} a_n = a_{n-1} + d = (a_{n-2} + d) + d = a_{n-2} + 2d \\ = a_{n-3} + 3d = \cdots = a_1 + (n-1)d. \end{aligned}$$

Pra, elementi i përgjithshëm i një vargu aritmetik me element të parë a_1 dhe ndryshim d është

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

Shembull 2. Gjeni sasinë e prodhimit vjetor të planifikuar për vitin 2015 në zbatimin nga shembulli 1.

Zgjidhje. Siç pamë gjatë zgjidhjes së shembullit 1, prodhimet e planifikuara vjetore formojnë progresion aritmetik me $a_1 = 147$, $d = 4.5$. Tani kërkohet elementi a_{11} i vargut. Kemi

$$a_{11} = a_1 + (11-1)d = 147 + 10 \cdot 4.5 = 192$$

ton. □

Në shumë zbatime është e nevojshme të gjendet shuma e n elementeve të para të një progresioni aritmetik; d.m.th., të gjendet vlera e shprehjes

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Shënimi i gjatë nga ana e djathtë e barazimit të fundit, në matematikë shënohet në formë të shkurtër

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Në qoftë se $\{a_k\}_{k=1}^n$ është një progresion aritmetik, atëherë shuma e n elementëve të parë të tij, e shprehur sipas a_1, është

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d],$$

kurse e shprehur sipas a_n është

$$\begin{aligned} S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 \\ &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + \cdots + [a_n - (n-1)d]. \end{aligned}$$

Duke mbledhur anë për anë dy shprehjet për S_n, fitojmë

$$2S_n = n(a_1 + a_n);$$

d.m.th.,

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).}$$

Në qoftë se në formulën për S_n zëvendësojmë $a_n = a_1 + (n-1)d$, fitojmë formulën për shumën e n elementëve të vargut aritmetik të shprehur me anë të a_1 dhe d:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].}$$

Shembull 3. Është vlerësuar se javën e parë kontributet nën ndikimin e një kampanjeje për ngritje fondesh do të jenë 5000 €, kurse gjatë javëve të ardhshme çdo javë do të zvogëlohen për 600 €. Llogaritni totalin fondeve të ngritura nga kampanja gjatë periudhës kohore 8 javore.

Zgjidhje. Vargu i fondeve javora të ngritura nga kampanja është progresion aritmetik me element të parë $a_1 = 5000$ dhe diferencë $d = -600$. Sipas formulës, për shumën e 8 elementëve të parë të këtij progresioni kemi

$$S_8 = \frac{8}{2}[2 \cdot 5000 + (8-1) \cdot (-600)] = 23200.$$

Pra, totali i fondeve të ngritura do të jetë 23,200 €. □

Siç pamë më sipër, një progresion aritmetik rritet (ose zvogëlohet) sipas një ndryshimi konstant. Për dallim, në qoftë se një varg rritet (ose zvogëlohet) sipas një faktori konstant, atëherë kemi të bëjmë me progresion gjeometrik.

Progresioni gjeometrik. Vargu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ është *varg* (ose *progresion*) *gjeometrik* në qoftë se çdo element fitohet si prodhim i elementit paraardhës me një faktor konstant q (të quajtur *herës*); d.m.th., në qoftë se për çdo $n > 1$ është

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Gjejmë elementin e përgjithshëm a_n të një progresioni gjeometrik:

$$a_n = a_{n-1}q = (a_{n-2}q)q = a_{n-2}q^2 = a_{n-3}q^3 = \cdots = a_1q^{n-1}.$$

Pra, elementi i përgjithshëm i një vargu gjeometrik me element të parë a_1 dhe herës q është

$$\boxed{a_n = a_1q^{n-1}.}$$

Shembull 4. Një prodhues vlerëson se të hyrat vjetore nga prodhimi dhe shitja e një malli do të rriten çdo vit për 15%. Sa janë të hyrat e vlerësuara vjetore për vitin 2015 në qoftë se në fund të vitit 2005 kishte të hyra vjetore prej 100,000€?

Zgjidhje. Për të hyrat vjetore gjatë periudhës së parë vëjmë $R_1 = 100{,}000$. Meqë është planifikuar që të hyrat vjetore çdo vit të rriten për 15%, kemi

$$R_2 = R_1 + R_1 \cdot \frac{15}{100} = R_1 \left(1 + \frac{15}{100}\right).$$

Në përgjithësi, në qoftë se të hyrat vjetore për periudhën e n-të i shënojmë me R_n, kurse ato të periudhës paraprake me R_{n-1}, atëherë

$$R_n = R_{n-1} + R_{n-1} \cdot \frac{15}{100} = R_{n-1} \left(1 + \frac{15}{100}\right),$$

që do të thotë se vargu i të hyrave vjetore është progresion gjeometrik me herësin $q = 1 + \frac{15}{100} = 1.15$.

Të hyrat e vlerësuara vjetore për vitin 2015 do të jenë

$$R_{11} = 100{,}000 \cdot 1.15^{10} \approx 404{,}556$$

euro. □

Le të jetë $\{a_k\}_{k=1}^n$ një progresion gjeometrik. Për të gjetur formulën për shumën e n elementëve të parë të tij

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1},$$

së pari shumëzojmë anë për anë barazimin me q, për të fituar

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n,$$

dhe pastaj zbresim anë për anë barazimin e parë nga i dyti:

$$qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1.$$

Prej këtej, për $q \neq 1$ fitojmë

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},}$$

që paraqet formulën për shumën e n elementëve të parë të progresionit gjeometrik.

Shembull 5. Supozojmë se gjatë vitit të parë të shfrytëzimit një makinë e caktuar industriale gjeneron profit prej 3000 € dhe se çdo vit të ardhshëm profiti zvogëlohet për 13%. Sa do të jetë profiti total i gjeneruar nga shfrytëzimi i makinës për 15 vjet?

Zgjidhje. Shënojmë me P_n profitin për vitin e n-të të shfrytëzimit të makinës. Atëherë

$$P_n = P_{n-1} - P_{n-1} \cdot \frac{13}{100} = P_{n-1}\left(1 - \frac{13}{100}\right),$$

që d.m.th. se vargu i profiteve vjetore është progresion gjeometrik me herës $q = 1 - \frac{13}{100} = 0.87$ dhe element të parë $P_1 = 3000$. Sipas formulës, për shumën e 15 elementëve të parë të tij kemi

$$S_{15} = 3000 \cdot \frac{0.87^{15} - 1}{0.87 - 1} \approx 20219.6$$

euro. □

Detyra për ushtrime

1. Një ndërmarrës kishte në vitin 2005 produktin vjetor 5000 njësi. Ndërmarrësi ka planifikuar që çdo vit të rrisë produktivitetin për 25 njësi.

   (a) Sa është prodhimi i planifikuar vjetor në fund të vitit 2020?

   (b) Sa është prodhimi total i planifikuar nga fillimi i vitit 2005 deri në fund të vitit 2020?

   (c) Sa është prodhimi i planifikuar nga fillimi i vitit 2015 deri në fund të vitit 2020?

2. Është vlerësuar se javën e parë kontributet nën ndikimin e një kampanjeje për ngritje fondesh do të jenë 10,000 €, kurse gjatë javëve të ardhshme

   (a) çdo javë do të zvogëlohen për 800 €;

   (b) çdo javë do të zvogëlohen për 20%.

   Llogaritni totalin fondeve të ngritura nga kampanja gjatë periudhës kohore 10 javore.

3. Një makinë industriale gjatë vitit të parë gjeneron profit prej 7000 € dhe çdo vit të ardhshëm profiti zvogëlohet për 10%. Sa do të jetë profiti total i gjeneruar nga shfrytëzimi i makinës për 10 vjet?

4. Kostoja e mirëmbajtjes së një makinë industriale gjatë vitit të parë është 2000 € dhe çdo vit të ardhshëm kostoja rritet për 15%. Sa do të jetë kostoja totale e mirëmbajtjes së makinës për 10 vjet?

5. Një kursimtar deponon në bankë kapitalin prej 10,000 € për një afat 10 vjeçar. Në çfarë shume do të shtohet kapitali i tij pas 10 vjetësh në qoftë se banka paguan 6.5% interes vjetor dekursiv (d.m.th., çdo vit akumulohet edhe interesi në interes)?

6. Një klient deponon për 20 vjet periodikisht në fillim të çdo viti deposita të barabarta vjetore prej 1000 € në emër sigurimi privat pensional. Sa do të jetë shuma e akumuluar pas 20 vjetësh në qoftë se kompania e sigurimit paguan 6% interes vjetor dekursiv?

7. Një ndërmarje në vitin e pestë ka prodhuar 126,250 m pëlhurë, kurse në vitin e gjashtë 390,625 m. Për sa vjet janë prodhuar 648,375 m pëlhurë, në qoftë se prodhimi është shtuar sipas një progresioni gjeometrik.

1.3 Seritë

Në qoftë se a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, $\ldots$ është një varg, atëherë mund të formojmë vargun e shumave $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ të elementeve të vargut $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ si vijon:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1,\\
S_2 &= a_1 + a_2,\\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3,\\
&\vdots\\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_n,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Për vargun e tillë $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ themi se është një *seri*. Elementi i tij i përgjithshëm $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$ quhet *shumë e pjesëshme* e $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Në qoftë se ekziston limiti $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, atëherë S quhet *shumë e serisë*.

Atë që u tha më sipër japim në formë të përmbledhur si vijon.

> Në qoftë se $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ është një varg numrash, atëherë vargu i *shumave të pjesëshme* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$ të tij quhet *seri*.
>
> Në qoftë se $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, atëherë S është *shuma e serisë* dhe shënojmë
>
> $$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Në qoftë se ekziston shuma e një serie, atëherë themi se seria është *konvergjente*; në të kundërtën seria quhet *divergjente*.

Shembull 1. Shqyrtoni natyrën (konvergjente ose divergjente) e serisë

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Zgjidhje. Tabela vijuese na jep një ide intuitive mbi natyrën e serisë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

n	1	2	5	10	100	1000	10000
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	1	1.5	2.2833	2.9290	5.1874	7.4855	9.7876

Pra, kemi përshtypjen se vlerat e shumave të pjesëshme rriten pafundësisht; d.m.th.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Në këtë mund të bindemi edhe formalisht. Sikur seria të ishte konvergjente; d.m.th., sikur të ishte $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, atëherë do të kishim

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

Por

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n = \sum_{n=1}^{2n} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rrjedhimisht, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ është divergjente. □

Shembull 2. Çfarë është natyra e serisë vijuese?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Zgjidhje. Ideja e parë që mund të kemi për këtë seri është se ajo duhet të divergjojë, meqë shumat e pjesëshme gjithnjë rriten kur n rritet pafundësisht. Mirëpo jo. Procesi limit nuk funksionin kësisoji, siç mund të bindemi nga tabela vijuese.

n	1	5	10	100	10^3	10^4	10^5	10^6
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$	1	1.4636	1.5498	1.6350	1.6439	1.6448	1.6449	1.6449

Nga tabela shohim intuitivisht se seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergjon. Shuma e saj nuk e tejkalon, për shembull, numrin 2. □

Në kurse më teorike të matematikës tregohet pohimi i përgjithësuar vijues.

> Në qoftë se $k > 1$, atëherë seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergjon.
>
> Në qoftë se $k \leq 1$, atëherë seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ divergjon.

Në qoftë se vargu $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ është progresion gjeometrik, atëherë serinë $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e quajmë *seri gjeometrike.*

Në pikën paraprake pamë se shuma e pjesëshme e një progresioni gjeometrik është

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Kështu,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} q^n\right) - 1}{q - 1}. \tag{1}$$

Pra, për të përcaktuar natyrën e një serie gjeomterike, së pari duhet të shqyrtojmë limitin $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ për vlera të dhëna të konstantës q.

Në analizën matematike tregohet se për vlera të q nga intervali $-1 < q < 1$ numrat q^n i ofrohen zeros (dhe atë më shpejt sesa numrat $\frac{1}{n}$) kur n rritet pafundësisht.

Nga ana tjetër, për $q > 1$ numrat q^n rriten pafundësisht kur n i ofrohet ∞, kurse për $n < -1$ numrat q^n nuk i ofrohen një numri kur n tenton në ∞.

Tabela vijuese ilustron këtë sjellje për vlerat $q = \frac{2}{3}$, $q = -\frac{3}{4}$, $q = 2$ dhe $q = -1.5$.

n	1	2	5	10	50	100
$\frac{1}{n}$	1	0.5	0.2	0.1	0.02	0.01
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.4444	0.1317	0.017	$1.6 \cdot 10^{-9}$	$2.5 \cdot 10^{-18}$
$\left(-\frac{3}{4}\right)^n$	-0.75	0.5625	-0.2373	0.0563	$5.7 \cdot 10^{-7}$	$3.2 \cdot 10^{-13}$
2^n	2	4	32	1024	$1.1 \cdot 10^{15}$	$1.3 \cdot 10^{30}$
-1.5^n	-1.5	2.25	-7.594	57.67	$6.4 \cdot 10^{8}$	$4.1 \cdot 10^{17}$

Në vijim është dhënë në mënyrë të përmbledhur sjellja e vargut q^n kur n rritet pafundësisht.

Në qoftë se $-1 < q < 1$, atëherë

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Në qoftë se $q > 1$, atëherë

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty.$$

Në qoftë se $q < -1$, atëherë nuk ekziston limiti i vargut q^n.

Tani mund të studiojmë natyrën e serisë gjeometrike. Mbështetur në barazimin (1) dhe pohimin e mësipërm, konkludojmë mbi sjelljen vijuese të serisë gjeometrike.

Në qoftë se $-1 < q < 1$, atëherë

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}.$$

Në qoftë se $q > 1$, atëherë

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^k = \infty.$$

Në qoftë se $q < -1$, atëherë seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^k$ divergjon.

Përndryshe, përcaktimi i natyrës së një serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ në rastin e përgjithshëm nuk është një punë e lehtë. Pohimi vijues na ndihmon të përcaktojmë kur një seri divergjon.

Në qoftë se një seri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon, atëherë $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Prandaj, në qoftë se **nuk** është $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, atëherë seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nuk mund të konvergjojë.

Anasjelltas, për të përcaktuar kur një seri konvergjon në analizën matematike janë zhvilluar shumë kritere.

Kriteri vijues na mundëson në shumë raste të përcaktojmë natyrën e një serie me elementë pozitivë.

Kriteri i D'Alembert-it. Për çdo n le të jetë $a_n > 0$ dhe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Në qoftë se $L < 1$, atëherë seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergjon.

Në qoftë se $L > 1$, atëherë seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergjon.

Detyra për ushtrime

1. Gjeni shumën e serisë

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

   (b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

   (d) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots$

2. Sypozojmë se për shkak të inflacionit, euro zhvlerësohet për 0.5% në vit. Në qoftë se vlera në euro e GDP të një vendi mbetet konstante gjatë viteve, sa është vlera e totalit të GDP vjetore për të gjitha vitet e mëpastajme së bashku krahasuar me vetëm atë të këtij viti?

3. Të studiohet natyra e serisë

   (a) $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$

   (b) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$

   (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \dots$

   (d) $\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots$

   (e) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{9}{3^3} + \frac{16}{3^4} + \dots$

   (f) $\frac{11}{2} + \frac{21}{2^2} + \frac{31}{2^3} + \dots$