1.8 Funksionet rritëse dhe zvogëluese

Shpesh është me rëndësi të përcaktohet ku një funksion i dhënë $f(x)$ është rritës ose zvogëlues, dhe qëllimi i kësaj pike është të tregohet se si mund të shfrytëzohet derivati $f'(x)$ për për të bërë këtë përcaktim.

Të rikujtojmë së pari përkufizimet e funksioneve rritëse dhe atyre zvogëluese.

Funksionet rritëse dhe ato zbritëse. Një funksion $f(x)$ është *rritës* në një interval $a < x < b$ në qoftë se $f(x_1) < f(x_2)$ sa herë që $x_1 < x_2$ për x_1, x_2 nga intervali.
Funksioni është *zbritës* në $a < x < b$ në qoftë se $f(x_1) > f(x_2)$ sa herë që $x_1 < x_2$ për x_1, x_2 nga intervali.

Vërejmë se në qoftë se grafiku i një funksioni $f(x)$ ka tangjente vetëm me pjerrtësi pozitive në intervalin $a < x < b$, grafiku do të ketë ngritje dhe $f(x)$ do të jetë rritës në këtë interval (fig. 1.8a). Meqë pjerrtësia e secilës tangjentë të tillë jepet me derivatin $f'(x)$, rrjedh se $f(x)$ është rritës në intervalet ku $f'(x) > 0$. Ngjashëm, $f(x)$ është zvogëlues në intervalet ku $f'(x) < 0$ (fig. 1.8b).

Në vazhdim janë dhënë të përmbledhura këto shqyrtime.

Kriteri derivat për funksione rritëse dhe zvogëluese. Funksioni $f(x)$ është rritës në interval ku $f'(x) > 0$.
Funksioni $f(x)$ është zvogëlues në interval ku $f'(x) < 0$.

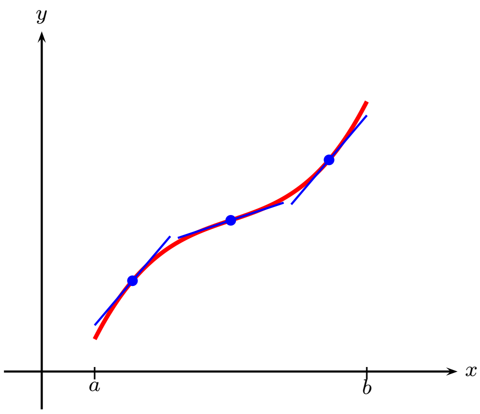
Përcaktimi i intervaleve të rritjes dhe zvogëlimit të një funksioni të dhënë $f(x)$ është me rëndësi në zbatime të shumëta. Ja një shembull.

Shembull 1. Gjeni intervalet e rritjes dhe të zvogëlimit për $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

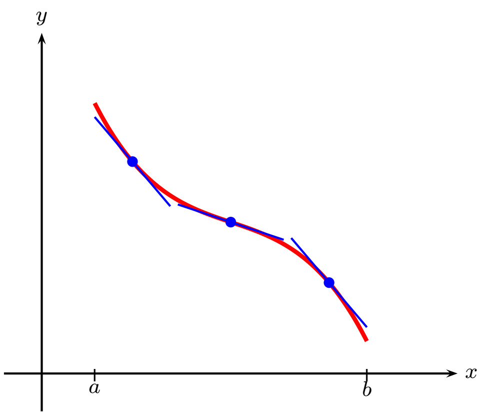
Zgjidhje. Derivati i $f(x)$ është

$$f'(x) = -x^2 + x + 2 = -(x+1)(x-2),$$

i cili është kudo i vazhdueshëm dhe ka zero në $x = -1$ dhe $x = 2$. Rrjedhimisht, $f'(x)$ mund të ndryshojë parashenjë vetëm në pikat $x = -1$ dhe $x = 2$, prandaj parashenja duhet të jetë e pandryshueshme në secilin nga



(a) $f'(x) > 0$ në $a < x < b$, prandaj $f(x)$ është rritës.



(b) $f'(x) < 0$ në $a < x < b$, prandaj $f(x)$ është zvogëlues.

Figura 1.8. Funksione rritëse dhe zvogëluese.

intervalet $x < -1$, $-1 < x < 2$ dhe $x > 2$. Në secilin nga këto intervale zgjedhim një numër testues c, dhe përcaktojmë parashenjën e $f'(x)$ përgjat tërë intervalit duke përcaktuar parashenjën e $f'(c)$. Puna është organizuar në tabelën 1.1, e cila tregon se grafiku i $f(x)$ zbret për $x < -1$, ngritet për $-1 < x < 2$ dhe zbret për $x > 2$.

Intervali	**Numri testues** c	**Shenja e** $f'(c)$	**Përfundimi**
$x < -1$	-2	$f'(-2) < 0$	$f(x) \searrow$
$-1 < x < 2$	0	$f'(0) > 0$	$f(x) \nearrow$
$x > 2$	3	$f'(3) < 0$	$f(x) \searrow$

Tabela 1.1. Intervalet e rritjes dhe të zvogëlimit të funksionit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

Grafiku është paraqitur në figurën 1.9. □

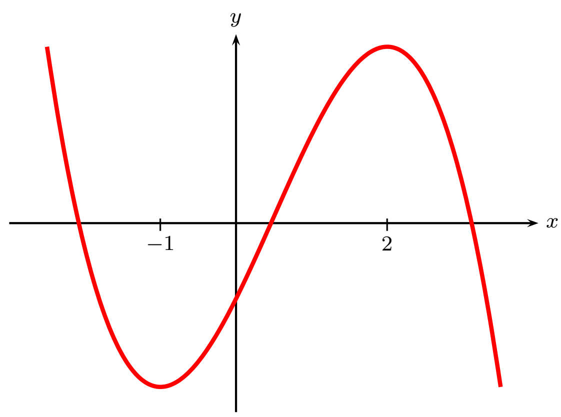
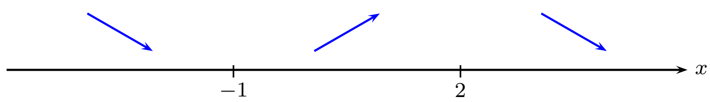


Figura 1.9. Grafiku i $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

Vëreni se si në tabelën 1.1 faktin se $f(x)$ është rritës e kemi shënuar me një „shigjetë përpjetë" ($\nearrow$) dhe faktin se $f(x)$ është zvogëlues me një „shigjetë tatëpjetë" ($\searrow$). Kështu, rezultatet nga shembulli 1 mund të paraqiten me anë të një diagrami shigjetash sikur në vijim.

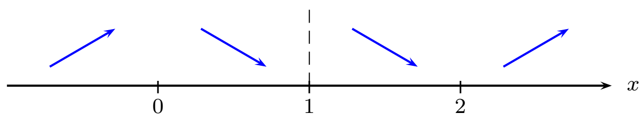


Shembull 2. Gjeni intervalet e rritjes dhe të zvogëlimit për $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Zgjidhje. Funksioni është i përkufizuar për $x \neq 1$ dhe ka derivatin

$$f'(x) = \frac{(2x)(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2},$$

i cili është i vazhdueshëm kudo përveç në $x = 1$. Prandaj, parashenja e derivatit mund të ndryshojë në $x = 1$, dhe në $x = 0$ e $x = 2$, ku $f'(x) = 0$. Kështu, ekzistojnë katër intervale në të cialt parashenja e derivatit nuk ndryshon: $x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x < 2$ dhe $x > 2$. Duke zgjedhur numra testues në këto intervale (për shembull, -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ dhe 3) fitojmë diagramin vijues të shigjetave. (Vija e ndërprerë vertikale tregon se $f(x)$ nuk është i përkufizuar në $x = 1$.)



Vërejmë se diagrami sugjeron se $f(x)$ është rritës për $x < 0$ dhe $x > 2$, kurse është zvogëlues për $0 < x < 1$ dhe $1 < x < 2$. Grafiku i $f(x)$ është paraqitur në figurën 1.10. □

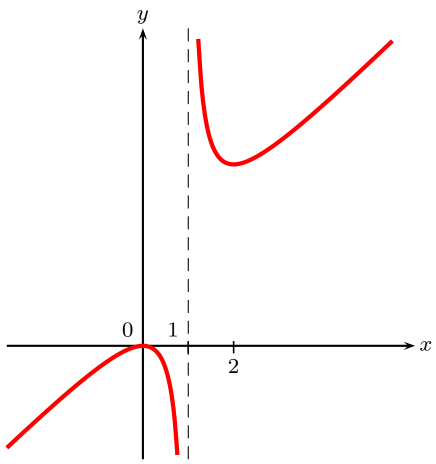


Figura 1.10. Grafiku i $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Vërejmë se në pikat $x = 0$ dhe $x = 2$ në figurën 1.10 grafiku ka tangjenta horizontale. Këto pika paraqesin „majë“ dhe „luginë“ të grafikut.

Thjeshtësia e grafikut në figurën 1.10 mund të na mashtrojë. Në përgjithësi, grafiku mund të ketë pika „të mprehta“, në të cilat nuk mund të tërhiqet tangjentë, e mund poashtu të ketë pika në të cilat tangjenta është horizontale por të cilat nuk janë as majë as luginë (shihni figurën 1.11c).

Në vazhdim do të shohim se si mund të zbatohen metoda të analizës matematike për të gjetur dhe identifikuar „majat“ dhe „luginat“ e një grafiku.

Më formalisht, një „majë“ e grafikut të një funksioni f quhet *maksimum relativ* i f, kurse një „luginë“ quhet *minimum relativ* i tij. Kështu maksimum relativ është një pikë në grafikun e f e cila është e lartë së paku sa cilado pikë e grafikut në afërsi të saj, kurse një minimum relativ është e ultë së paku sa cilado pikë në afërsi të saj.

Së bashku, maksimumet dhe minimumet relative quhen *ekstremume relative*. Vëreni se një ekstremum relativ nuk është e thënë të jetë pika më e lartë ose më e ultë në tërë grafikun. Për shembull, grafiku në figurën 1.10 ka maksimum relativ në pikën $x = 0$ por ka pika më të larta (për shembull, në $x = 2$).

Në vazhdim japim një përmbledhje të kësaj terminologjie.

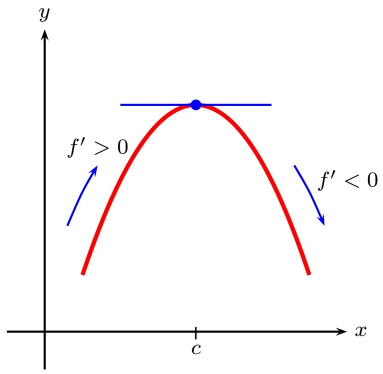
Ekstremumet relative. Themi se funksioni $f(x)$ ka *maksimum relativ* në $x = c$ në qoftë se $f(c) \geq f(x)$ për çdo x nga ndonjë interval $a \leq x \leq b$ i cili përmban pikën c.
Ngjashëm, $f(x)$ ka *minimum relativ* në $x = c$ në qoftë se $f(c) \leq f(x)$ për çdo x nga ndonjë interval $a \leq x \leq b$ i cili përmban pikën c.
Së bashku, maksimumet dhe minimumet relative të $f(x)$ quhen *ekstremume relative* të tij.

Meqë një funksion i derivueshëm $f(x)$ është rritës kur $f'(x) > 0$ dhe zvogëlues kur $f'(x) < 0$, pikat e vetme ku $f(x)$ mund të ketë ekstremum relativ janë ku $f'(x) = 0$. Pikat e tilla janë aq të rëndësishme saqë u japim emër të posaçëm.

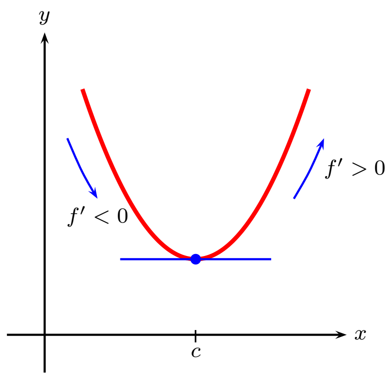
Pikat kritike. Një numër c nga domeni i një funksioni të derivueshëm $f(x)$ quhet *kritik* në qoftë se $f'(c) = 0$. Pika korresponduese $(c, f(c))$ në grafikun e $f(x)$ quhet *pikë kritike* e $f(x)$.

Në figurën 1.11 janë paraqitur tri funksione me pika kritike. Në secilin nga rastet, tangjenta e grafikut në pikën kritike $(c, f(c))$ është horizontale meqë derivati $f'(c)$ jep pjerrtësinë e tangjentës në këtë pikë dhe $f'(c) = 0$.

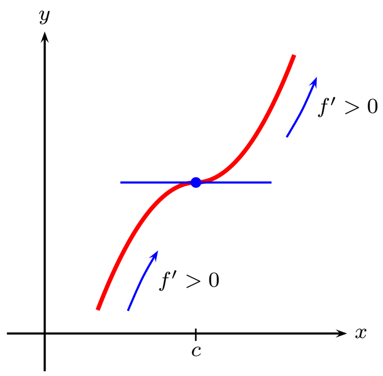
Figura 1.11 poashtu sugjeron një metodë të zbatimit të parashenjës së derivatit për të klasifikuar pikat kritike si maksimume relative, minimume relative ose as njëra as tjetra.



(a) Maksimum relativ



(b) Minimum relativ



(c) Nuk është ekstremum relativ

Figura 1.11. Tri pika kritike.

Supozojmë se funksioni $f(x)$ ka pikë kritike në $x = c$ dhe se $f'(x) > 0$ në të majtë të c, kurse $f'(x) < 0$ në të djathtë. Gjeometrikisht, kjo ka domethënien se grafiku i f shkon përpjetë para pikës kritike $P(c, f(c))$ dhe pastaj zbret, që ka për rrjedhojë se pika P është maksimum relativ.

Ngjashëm, në qoftë se $f'(x) < 0$ në të majtë të c dhe $f'(x) > 0$ në të djathtë, grafiku shkon tatëpjetë para pikës kritike $P(c, f(c))$ dhe përpjetë pas saj, kështu që pika P duhet të jetë minimum relativ.

Nga ana tjetër, në qoftë se derivati ka parashenjë të njëjtë nga të dyja anët e c, atëherë grafiku ose ngritet nëpër pikën P ose zbret nëpër P, prandaj aty nuk ka ekstremum relativ.

Këto vrojtime mund të përmblidhen si vijon.

Testi i ekstremumeve relative me anë të derivatit të parë. Le të ketë $f(x)$ pikë kritike në $x = c$ (d.m.th., $f'(c) = 0$). Atëherë, pika kritike $(c, f(c))$:

është *maksimum relativ* në qoftë se $f'(x) > 0$ në të majtë të c dhe $f'(x) < 0$ në të djathtë të c;

është *minimum relativ* në qoftë se $f'(x) < 0$ në të majtë të c dhe $f'(x) > 0$ në të djathtë të c;

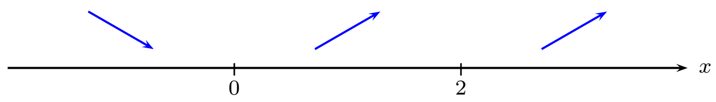
nuk është *ekstremum relativ* në qoftë se $f'(x)$ ka parashenjë të njëjtë nga të dyja anët e c.

Shembull 3. Gjeni pikat kritike të funksionit $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3$ dhe klasifikoni secilën pikë kritike si maksimum relativ, minimum relativ ose as njëra as tjetra.

Zgjidhje. Derivati i $f(x)$ është

$$f'(x) = 3x^3 - 12x^2 + 12x = 3x(x-2)^2,$$

i cili është kudo i vazhdueshëm. Pikat kritike i gjejmë duke zgjidhur sipas x ekuacionin $f'(x) = 0$; d.m.th., fitohen për $x = 0$ dhe $x = 2$. Parashenja e derivatit nuk ndryshon në asnjërin nga intervalet $x < 0$, $0 < x < 2$ dhe $x > 2$. Duke i dhënë vlera $f'(x)$ për numra testues në secilin interval (për shembull, -1, 1 dhe 3) fitojmë diagramin vijues të shigjetave, i cili tregon se funksioni i dhënë ka minimum relativ në $x = 0$ dhe nuk ka ekstremum relativ në $x = 2$.



Grafiku është paraqitur në figurën 1.12. □

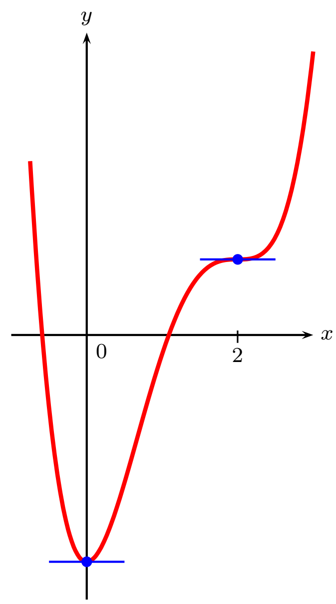


Figura 1.12. Grafiku i $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3$.

Shembull 4. Të hyrat e nxjerrura nga shitja e x njësish të një malli të caktuar janë

$$R(x) = \frac{3x - x^2}{x^2 + 3}$$

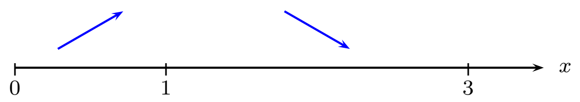
milion euro. Çfarë niveli i prodhimit rezulton me të hyra maksimale? Sa janë të hyrat maksimale?

Zgjidhje. Meqë emëruesi $x^2 + 3$ kurrë nuk bëhet 0, funksioni $R(x)$ është i përkufizuar për çdo x, por si funksion të hyrash ka kuptim vetëm për $x \geq 0$ dhe $R(x) \geq 0$, që d.m.th. se $0 \leq x \leq 3$. (Tregoni pse!)

Derivati i $R(x)$ është

$$R'(x) = \frac{(3 - 2x)(x^2 + 3) - (3x - x^2)(2x + 3)}{(x^2 + 3)^2}$$
$$= \frac{-3(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-3(x - 1)(x + 3)}{(x^2 + 3)^2}.$$

Duke barazuar me zero numëruesin e kësaj shprehjeje, gjejmë se $x = 1$ është e vetmja zgjidhje e ekuacionit $R'(x) = 0$ e cila shtrihet brenda intervalit $0 \leq x \leq 3$, që d.m.th. se e vetmja pikë kritike në domenin „praktik" të $R(x)$ fitohet për $x = 1$. Në këtë domen kemi vetëm dy intervale për të shqyrtuar: $0 < x < 1$ dhe $1 < x < 3$. Me anë të numrave testues (p.sh., $x = \frac{1}{2}$ dhe $x = 2$) fitojmë diagramin vijues të shigjetave.



Shablloni i shigjetave tregon se të hyrat rriten deri në maksimum në $x = 1$, pas të cilit zvogëlohen (shihni grafikun në figurën 1.13).

Kur shiten $x = 1$ njësi, fitohen të hyra maksimale prej

$$R(1) = \frac{3 \cdot 1 - 1^2}{1^2 + 3} = \frac{1}{2} = 0.5$$

milion euro. □

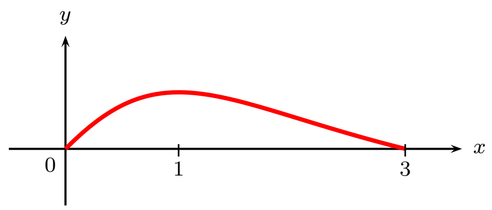


Figura 1.13. Grafiku i $R(x) = \frac{3x-x^2}{x^2+3}$.

Detyra për ushtrime

1. Gjeni intervalet e rritjes dhe zvogëlimit për funksionet e dhëna:

   (a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$;

   (b) $f(t) = t^3 + 3t^2 + 1$;

   (c) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.

2. Gjeni pikat kritike dhe klasifikoni secilën pikë kritike si maksimum relativ, minimum relativ ose as njëra as tjetra, për funksionet vijuese:

   (a) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$;

(b) $f(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$;

(c) $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 6t + 5$;

(d) $f(x) = (x-1)^5$;

(e) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

3. Kostoja totale e prodhimit të x njësish është $C(x) = \sqrt{5x+2} + 3$ euro. Paraqitni grafikisht lakoren e kostos totale dhe gjeni koston margjinale. A rritet apo zvogëlohet kostoja margjinale me rritjen e prodhimit?

4. Le të jetë $p(x) = (10 - 3x)^2$ çmimi me të cilin do të shiten x njësi të një malli. Paraqitni grafikisht lakoret e kostos totale dhe të kostos margjinale në të njëjtin grafikon. Për çfarë niveli të prodhimit arrihen të hyra maksimale?

5. Për të prodhuar x njësi të një malli një monopolist ka kosto totale $C(x) = 2x^2 + 3x + 5$, kurse çmimi për të cilin shiten që të gjitha x njësitë është $p(x) = 5 - 2x$. Gjeni funksionin e profitit $P(x) = R(x) - C(x)$ dhe paraqiteni grafikisht. Për çfarë niveli të prodhimit arrihet profit maksimal?

1.9 Konkaviteti

Në pikën paraprake pamë se si të shfrytëzojmë parashenjën e derivatit $f'(x)$ për të përcaktuar ku $f(x)$ është rritës e ku zvogëlues dhe ku grafiku i tij ka ekstremume relative. Në këtë pikë do të shohim se edhe derivati i dytë $f''(s)$ poashtu jep informata të rëndësishme mbi grafikun e $f(x)$. Si hyrje në problematikën, ja një përshkrim i shkurtër i një situate nga industria që mund të analizohet duke zbatuar derivatin e dytë.

Numri i njësive të cilat një prodhues uzine mund t'i prodhojë për t orë shpesh jepet me një funksion $Q(t)$, si, për shmbull, ai i dhënë në figurën 1.14

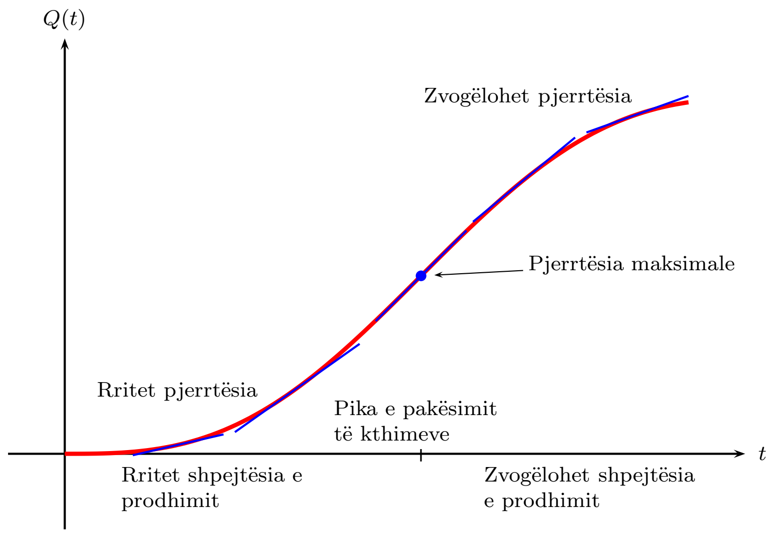


Figura 1.14. Rezultatet e punës të një punëtori uzine.

Vërejmë se fillimisht grafiku nuk është dhe aq i pjerrët. Por, pjerrtësia rritet derisa grafiku nuk arrin një pikë të pjerrtësisë maksimale, pas së cilës pjerrtësia fillon të zvogëlohet. Një gjë e tillë është reflektim i faktit se në fillim shpejtësia e prodhimit e punëtorit është e ulët. Por shpejtësia e prodhimit rritet përderisa punëtori hyn në një rutinë dhe vazhdon të rritet deri kur punëtori të performojë me efikasitet maksimal, pas së cilës kohë shprehet lodhja dhe shpejtësia e prodhimit fillon të zvogëlohet. Momenti i efikasitetit maksimal njihet në ekonomiks si *pika e pakësimit së kthimeve.*

Sjellja e grafikut të këtij funksioni të prodhimit nga cilado anë e pikës së pakësimit të kthimeve mund të përshkruhet ma anë të tangjentave. Në të majtë të kësaj pike pjerrtësia e tangjentës rritet me rritjen e t. Në të djathtë të pikës pjerrtësia e tangjentës zvogëlohet me rritjen e t. Pikërisht këtë rritje dhe zvogëlim të pjerrtësive do ta studiojmë në këtë pikë me ndihmën e derivatit të dytë.

Nocionet vijuese të *konkavitetit* përdoren për të përshkruar rritjen dhe zvogëlimin e pjerrtësisë së tangjentës së një lakoreje.

Konkaviteti. Në qoftë se një funksion $f(x)$ është i derivueshëm në një interval $a < x < b$, atëherë grafiku i funksionit është

konkav nga sipër në këtë interval në qoftë se $f'(x)$ është rritës në intervalin;

konkav nga poshtë në këtë interval në qoftë se $f'(x)$ është zvogëlues në intervalin.

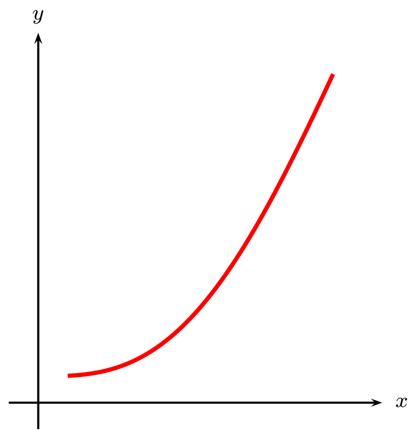
Në figurën 1.14, për shembull, lakorja e prodhimit ishte konkave nga sipër në majtë të pikës së pakësimit të kthimeve dhe konkave nga poshtë në djathtë të pikës së pakësimit të kthimeve.

Konkaviteti mund të karakterizohet thjesht me anë të parashenjës së derivatit të dytë. Karakterizimi i tillë mbështetet në faktin (e nxjerrur në pikën paraprake) se një sasi rritet kur derivati i saj është pozitiv dhe zvogëlohet kur derivati është negativ. Kur këtë fakt e zbatojmë mbi derivatin e parë (d.m.th., pjerrtësinë e tangjentës), karakteristika do të jetë pikërisht derivati i dytë. Ja argumentimi.

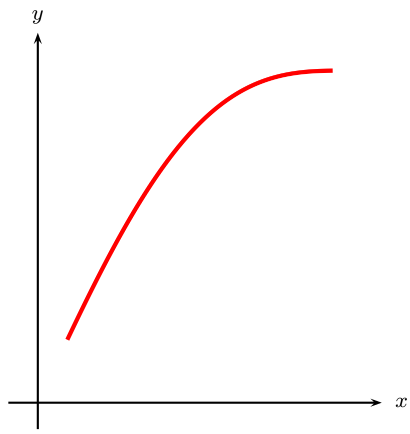
Supozojmë se derivati i dytë $f''(x)$ është pozitiv në një interval $a < x < b$. Si rrjedhojë, derivati i parë $f'(x)$ duhet të jetë rritës në këtë interval, kështu që grafiku i $f(x)$ do të jetë konkav nga sipër në intervalin. Ngjashëm, në qoftë se $f''(x) < 0$ në një interval $a < x < b$, atëherë $f'(x)$ është zvogëlues aty, prandaj grafiku i $f(x)$ është konkav nga poshtë. Të përmbledhim:

Testi për konkavitet. Në qoftë se $f''(x) > 0$ në një interval $a < x < b$, atëherë f është konkav nga sipër në këtë interval.
Në qoftë se $f''(x) < 0$ në një interval $a < x < b$, atëherë f është konkav nga poshtë në këtë interval.

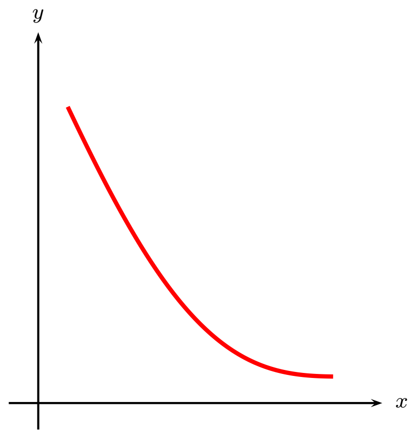
Vërejtje. Një këshillë: mos e ngatërroni konkavitetin e një lakoreje me rritjen ose zvogëlimin e saj. Një lakore konkave nga sipër në një interval mund të jetë qoftë rritëse qoftë zvogëluese në atë interval. Ngjashëm, një lakore konkave nga poshtë mund të jetë rritëse ose zvogëluese. Të katër mundësitë janë ilustruar në figurën 1.15.



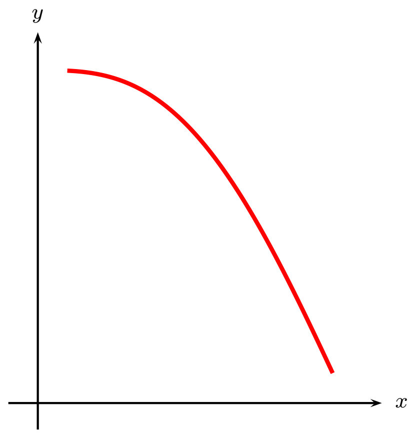
(a) Ritës, konkav nga sipër: $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$.



(b) Ritës, konkav nga poshtë: $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$.



(c) Zvogëlues, konkav nga sipër: $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$.



(d) Zvogëlues, konkav nga poshtë: $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$.

Figura 1.15. Kombinimet e mundshme të rritjes, zvogëlimit dhe konkavitetit.

Pika në grafikun e një funksioni $f(x)$ ku ndryshon konkaviteti quhet *pikë infleksioni*.

Në një pikë infleksioni $P(c, f(c))$ grafiku i $f(x)$ nuk mund të jetë as konkav nga sipër as konkav nga poshtë, prandaj $f''(c)$ nuk mund të jetë pozitiv ose negativ. Kështu, në qoftë se ekziston derivati i dytë $f''(c)$ në atë pikë, duhet të jetë $f''(c) = 0$. Mirëpo vetëm nga fakti se $f''(c) = 0$ nuk mund të konkludojmë automatikisht se $(c, f(c))$ është pikë infleksioni. Për shembull, për $f(x) = x^4$ kemi $f''(x) = 12x^2$, kurse grafiku i f është gjithmonë konkav nga sipër edhepse $f''(0) = 0$ (shihni fig. 1.16).

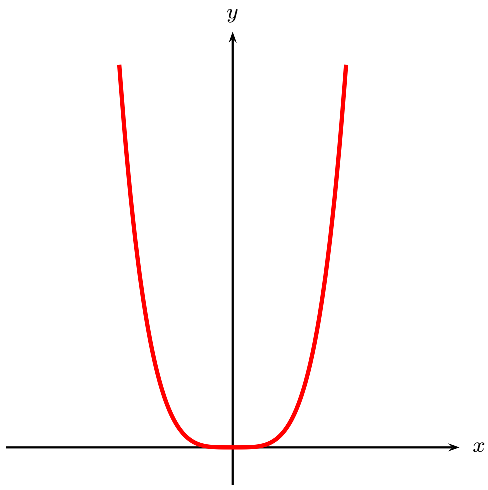


Figura 1.16. Grafiku i $f(x) = x^4$.

Gjeometrikisht, pikat e infleksionit paraqiten në grafik në „kalimet ndërmjet kthesave“.

Duke i shtuar kriteret e reja për konkavitet dhe pika infleksioni metodave me anë të derivatit të parë, të diskutuara në pikën paraprake, tani mund të analizojmë dhe skicojmë grafikë të ndryshëm në detaje të konsiderueshme.

Derivati i dytë ka edhe një zbatim shtesë; mund të shfrytëzohet poashtu për klasifikimin e pikave kritike të një funksioni si maksimume relative ose minimume relative. Ja e përmbledhur procedura.

Testi me anë të derivatit të dytë. Supozojmë se $f'(c) = 0$.

Në qoftë se $f''(c) < 0$, atëherë f ka maksimum relativ në $x = c$.

Në qoftë se $f''(c) > 0$, atëherë f ka minimum relativ në $x = c$.

Mirëpo, në rast se $f''(c) = 0$ (ose në qoftë se $f''(c)$ nuk ekziston), testi nuk mjafton dhe f mund të ketë maksimum relativ, minimum relativ ose të mos ketë fare ekstremume relativ në $x = c$.

Për të kuptuar pse testi me anë të derivatit të dytë funksionon shikoni figurën 1.17, e cila tregon katër mundësitë të cilat mund të paraqiten për një funksion dy herë të derivueshëm $f(x)$ kur $f'(c) = 0$.

Figura 1.17a sugjeron se te maksimumi relativ grafiku i funksionit duhet të jetë konkav nga poshtë, prandaj $f''(c) < 0$. Ngjashëm, te minimumi relativ (figura 1.17b) grafiku i funksionit duhet të jetë konkav nga sipër, prandaj $f''(c) > 0$.

Nga ana tjetër, figurat 1.17c dhe 1.17d sugjerojnë se në qoftë se një pikë ku $f'(c) = 0$ nuk është ekstremum relativ, atëherë ajo duhet të jetë pikë infleksioni dhe $f''(c) = 0$.

Rrjedhimisht, në qoftë se $f'(c) = 0$ dhe $f''(c) < 0$, atëherë $(c, f(c))$ duhet të jetë maksimum relativ, kurse në qoftë se $f'(c) = 0$ dhe $f''(c) > 0$, atëherë pika kritike përkatëse duhet të jetë minimum relativ.

Shembull 1. Një studim efikasiteti të punëtorëve të ndërrimit të mëngjesit në një uzinë tregon se një punëtor mesatar i cili arrin në punë në orën 8:00 do të ketë montuar

$$Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$$

njësi t orë më pas. Në ç'kohë arrin punëtori performansën më efikase gjatë ndërrimit të mëngjesit? (Supozoni se ndërrimi i mëngjesit zgjat nga 8:00 deri në 12:00.)

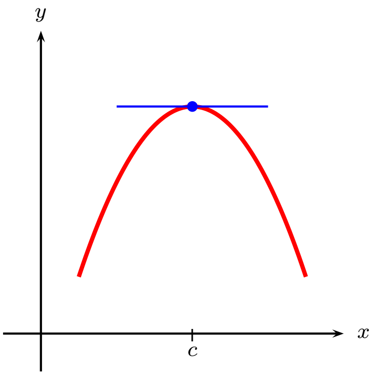
Zgjidhje. Shpejtësia e prodhimit të punëtorit është derivati

$$Q'(t) = -3t^2 + 18t + 12$$

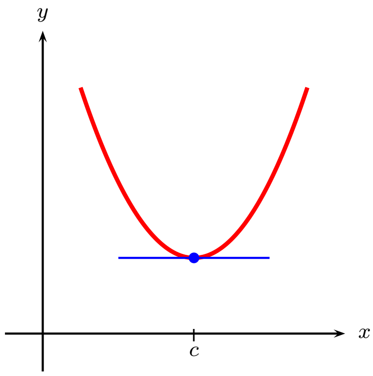
i funksionit të prodhimit $Q(t)$. Qëllimi është që të gjendet shpejtësia më e madhe $Q'(t)$ për $0 \leq t \leq 4$. Derivati i funksionit të shpejtësisë është

$$Q''(t) = -6t + 18$$

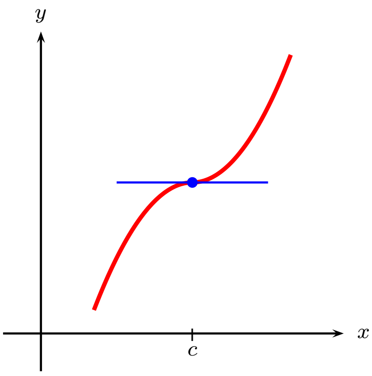
i cili bëhet zero kur $t = 3$, është pozitiv kur $0 < t < 3$ dhe është negativ kur $3 < t < 4$, siç tregon diagrami vijues i shigjetave.



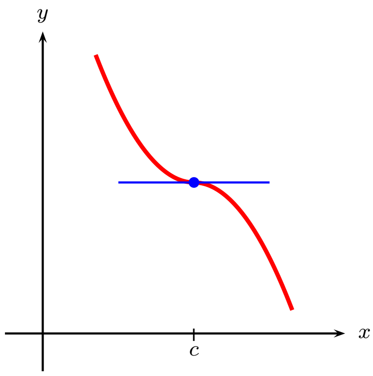
(a) Maksimum relativ: $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0$.



(b) Minimum relativ: $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$.

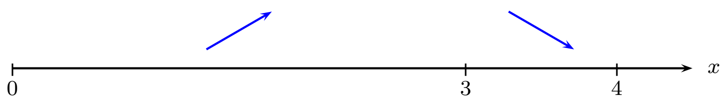


(c) Nuk është ekstremum relativ: $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$.



(d) Nuk është ekstremum relativ: $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$.

Figura 1.17. Testi me anë të derivatit të dytë.



Pra, shpejtësia e prodhimit $Q'(t)$ rritet për $0 < t < 3$, zvogëlohet për $3 < t < 4$ dhe arrin vlerën maksimale kur $t = 3$; d.m.th., në orën 11:00. □

Paraqitni grafikisht funksionin e prodhimit $Q(t)$ dhe shpejtësinë e prodhimit $Q'(t)$ nga shembulli i mësipërm.

Në shembullin e mësipërm, maksimumin relativ të shpejtësisë së prodhmit e kemi gjetur duke zbatuar testin me anë të derivatit të parë. Mund ta gjejmë poashtu duke zbatuat testin me anë të derivatit të dytë. Për këtë duhet gjetur derivatin e dytë të shpejtësisë së prodhimit $Q'(t)$, i cili në mënyrë përkatëse shënohet me $Q'''(t)$; pra,

$$Q'''(t) = \frac{d}{dt}[Q''(t)] = (-6t + 18)' = -6.$$

Meqë në pikën $t = 3$ kemi $Q''(3) = 0$ dhe $Q'''(3) = -6 < 0$, atëherë, sipas testin me anë të derivatit të dytë, përfundojmë se shpejtësia e prodhimit $Q'(t)$ ka maksimum relativ në $t = 3$.

Detyra për ushtrime

1. Për funksionet vijuese gjeni intervalet e rritjes e zvogëlimit dhe ku grafiku i dhënë është konkav nga sipër dhe konkav nga poshtë. Gjeni ekstremumet relative dhe pikat e infleksionit, dhe vizationi grafikun e funksionit.

   (a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$;

   (b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$;

   (c) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 10$;

   (d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$;

   (e) $f(t) = t^3 + 3t^2 + 1$;

   (f) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.

   (g) $f(x) = (x + 1)^{1/3}$;

   (h) $f(x) = (x + 1)^{2/3}$;

   (i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

2. Për funksionet vijuese zbatoni testin me anë të derivatit të dytë për të gjetur maksimumet relative dhe minimumet relative.

   (a) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$;

   (b) $f(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$;

   (c) $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 6t + 5$;

   (d) $f(x) = (x-1)^5$;

   (e) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

3. Kostoja totale e prodhimit të x njësish është

$$C(x) = 0.3x^3 - 5x^2 + 28x + 200.$$

   (a) Gjeni koston margjinale MC(x). Vizatoni grafikët e $C(x)$ dhe MC(x) në të njëjtin sistem koordinativ.

   (b) Gjeni ku është $C''(x) = 0$. Çfarë janë këto pika për grafikët e funksioneve $C(x)$ dhe MC(x)?

4. Një kompani vlerëson se kur shpenzohen x mijë euro për marketingun e një prodhimi të caktuar, do të shiten

$$Q(x) = -4x^3 + 252x^2 - 3,200x + 17,000$$

   njësi të prodhimit, ku $10 \leq x \leq 40$. Vizatoni grafikun e $Q(x)$ për $10 \leq x \leq 40$. Ku ka pikë infleksioni grafiku? Çfarë është rëndësia e shpenzimeve për marketing të cilat i korrespondojnë kësaj pike?

5. Një studim efikasiteti të punëtorëve të ndërrimit të mëngjesit në një uzinë tregon se një punëtor mesatar i cili arrin në punë në orën 8:00 do të ketë montuar

$$Q(t) = -t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 15t$$

   njësi t orë më pas.

   (a) Në ç'kohë arrin punëtori performansën më efikase gjatë ndërrimit të mëngjesit? (Supozoni se ndërrimi i mëngjesit zgjat nga 8:00 deri në 12:00.)

   (b) Në ç'kohë arrin punëtori performansën më joefikase gjatë ndërrimit të mëngjesit?

6. Një studim efikasiteti të punëtorëve të ndërrimit të mëngjesit (nga 8:00 deri në 12:00) në një uzinë tregon se një punëtor mesatar i cili arrin në punë në orën 8:00 do të ketë montuar $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$ radio-tranzistorë t orë më pas.

   (a) Në ç'kohë arrin punëtori performansën më efikase gjatë ndërrimit të mëngjesit?

   (b) Në ç'kohë arrin punëtori performansën më joefikase gjatë ndërrimit të mëngjesit?

7. Funksioni i kërkesës së një prodhimi është

   (a) $x(p) = -2p + 4000$

   (b) $x(p) = 8 - p$;

   (c) $x(p) = -p + 90$.

   Gjeni çmimin dhe sasinë për të cilat të hyrat e përgjithshme me rastin e shtitjes së këtij malli do të jenë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?

8. Eshtë dhënë funksioni i të hyrave të përgjithshme $R(p) = -3p^2 + 48p$. Llogaritni:

   (a) funksionin e kërkesës;

   (b) çmimin ashtu që të hyrat e përgjithshme të jenë maksimale;

   (c) të hyrat maksimale.

9. Funksioni i çmimit është

   (a) $p(x) = 2000 - \frac{x}{2}$;

   (b) $p(x) = 1000 - 2x - 3x^2$;

   (c) $p(x) = 3 - \sqrt{x}$;

   (d) $p(x) = -3x + 3000 + \frac{80\,000}{x}$.

   Caktoni sasinë e mallit për të cilën të hyrat e përgjithshme janë maksimale. Sa janë të hyrat maksimale?